Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi, 10(1), 162-177, 2020. DOI: 10.31466/kfbd.698035

KFBD

Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi
The Black Sea Journal of Sciences
ISSN (Online): 2564-7377

Araştırma Makalesi / Research Article

$A_w(p,q)(G)$ Banach Cebirinin İdealleri

Selim NUMAN[1]*

[1]Giresun Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Giresun, TÜRKİYE

*Sorumlu Yazar: selim.numan@giresun.edu.tr

Geliş Tarihi: 03.03.2020
Kabul Tarihi: 05.05.2020

Öz

Bu çalışmada w, Beurling-Domar (kısaca BD.) koşulunu sağlayan bir Beurling ağırlık fonksiyonu olmak üzere $A_w(p,q)(G)$ uzayının (Cigler,1969) tarafından tanımlanan bir $S_w(G)$ uzayı olduğu ve girişim işlemine göre soyut Segal cebiri olduğu gösterildi. (Blozinski,1972) çalışmasından yararlanılarak $A_w(p,q)(G)$ uzayının idealleri ve regüler maksimal idealleri araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Banach Cebiri, Girişim İşlemi, Fourier Dönüşümü, Karakter Grubu.

İdeals Of $A_w(p,q)(G)$ Banach Algebra

Abstract

In this study, w is a Beurling weight function that provides the Beurling-Domar (briefly BD.) Condition. It was shown that $A_w(p,q)(G)$ space is an $S_w(G)$ space defined by (Cigler, 1969) and is an abstract Segal algebra according to the interference process. (Blozinski,1972), the ideal and regular maximals ideals of $A_w(p,q)(G)$ space were investigated.

.**Keywords:** Banach Algebra, Convolution, Fourier Transform, Character Group.

[1]https://orcid.org/0000-0002-5483-6861

1. Giriş

(Burnham,1972) adlı makalesinde Banach cebirleri için Soyut Segal cebiri tanımı vererek bu cebirler için kapalı ideal ve regüler maksimal ideal uzaylarını araştırmıştır. Biz bu çalışmada w, Beurling ağırlık fonksiyonu olmak üzere bir $A_w(p,q)(G)$ uzayı tanımlayıp ve bu uzayı bir norm ile donatıp bu norma ve girişim işlemine göre bu uzayın Banach cebiri olduğunu gösterip (Burnham,1972) çalışmasından yararlanarak bu uzayın kapalı idealleri ve regüler maksimal ideal uzaylarını araştırdık.

Şimdi makalede kullanılacak önemli tanım ve teoremleri verelim.

1.1.Tanım: X topolojik uzayı üzerinde tanımlı ve karmaşık değerli bir f fonksiyonu verildiğinde $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$ kümesinin kapanışına f fonksiyonunun desteği denir ve suppf ile gösterilir.

1.2.Tanım: G lokal kompakt Abel grubu $(B, \|.\|_B)$ de G üzerinde tanımlı fonksiyonların bir Banach uzayı olsun. Her $f \in B$ ve x,y∈G için L_Xf(y)=f(x-y) şeklinde tanımlanmış $L_x f$ fonksiyonu için $L_x f \in B$ koşulunu sağlıyorsa B uzayına ötelemeler altında invaryanttır denir. Yine $\|L_x f\|_B = \|f\|_B$ koşulu sağlanıyorsa bu takdirde $(B, \|.\|_B)$ Banach uzayına ötelemeler altında kuvvetli invaryanttır denir (Feichtinger ve Gürkanlı, 1990).

Bu makalede bir G lokal kompakt Abel grubunun $\hat{G}$ $(veya\ \Gamma)$ ile gösterilen karakter grubu (dual grup) sık sık kullanılacaktır. Şimdi bu tanımı verelim.

1.3.Tanım: γ, bir G local kompakt Abel grubu üzerinde tanımlı, karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \epsilon G$ için $|\gamma(x)| = 1$ ve her x,y∈G,için $\gamma(x+y) = \gamma(x).\gamma(y)$ koşulları sağlanıyorsa bu takdirde γ ya G grubunun bir karakteri denir. G nin bütün sürekli karakterlerinin kümesini $\hat{G}$(veya Γ) ile gösterelim. Bu $\hat{G}$ kümesi her $x \in G$ ve her $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$için

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$$

işlemine göre bir grup oluşturur.Bu gruba G nin karakter grubu (veya dual grup) denir (Rudin,1960).

1.4.Tanım: G lokal kompakt Abel grubu olsun. her x,y∈G,için $|\gamma(x)| \neq 0$ ve γ(x+y)=γ(x).γ(y) koşullarını sağlayan G üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve sürekli her γ fonksiyonuna G nin genelleştirilmiş karakteri denir (Wang,1977).

Yine G nin her karakterinin genelleştirilmiş karakter olduğu açıktır.

1.5.Tanım: G local kompakt Abel grubu olmak üzere G üzerinde tanımlı, karmaşık değerli f ve g Borel ölçülebilir fonksiyonları verilsin.

$$\int_G |f(x-y)g(y)|dy < \infty$$

koşulunu sağlayan f ve g fonksiyonları için girişim işlemi f*g simgesi ile gösterilir ve

$$(f*g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy$$

biçiminde tanımlanır (Rudin,1960).

Şimdi makalede çok fazla kullanacağımız ağırlık fonksiyonu (Beurling'in) ve ağırlıklı uzay tanımlarını verelim.

1.6.Tanım: G lokal kompakt Abel grubu olmak üzere G üzerinde tanımlı, reel değerli bir w fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu w fonksiyonuna bir ağırlık fonsiyonu (veya Beurling ağırlık fonksiyonu) denir (Reiter,1968).

(i) Her $x \in G$ için $w(x) = 1$

(ii) Her $x, y \in G$ için $w(x+y) \leq w(x)w(y)$

(iii) w fonksiyonu ölçülebilir ve lokal sınırlıdır (yani G nin her kompakt alt kümesinde sınırlı).

Yine w, ağırlık fonksiyonu olmak üzere bir $\|.\|_{1,w}$ fonksiyonunu

$$\|f\|_{1,w} = \int_G |f(x)|w(x)\, dx$$

biçiminde tanımlıyalım. Bu takdirde $\|f\|_{1,w} < \infty$ olacak şekildeki f fonksiyonlarının denklik sınıfından oluşan küme $L_w^1(G)$ ile gösterilir. Bu küme $\|.\|_{1,w}$normuna ve girişim işlemine göre bir Banach cebiridir. Bu cebir Beurling cebiri olarak bilinir (Reiter,1968).

Ayrıca w, ağırlık fonksiyonu olmak üzere her x∈G için

$$\sum_{n\geq 1} n^{-2} log\big(w(nx)\big) < \infty$$

koşulu sağlanırsa w ağırlık fonksiyonu Beurling-Domar (kısaca BD) koşulunu sağlıyor denir.

1.7.Tanım: G local kompakt Abel grubu ve $\hat{G}$ de onun dual grubu olsun. Herhangi bir $f \in L^1(G)$ fonksiyonunun fourier dönüşümü $\hat{f}$ ile gösterilir ve $\gamma \in \hat{G}$ olmak üzere

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\, dx$$

şeklinde tanımlanır (Rudin,1960).

Eğer w ağırlık fonksiyonu (BD) koşulunu sağlıyorsa bu takdirde $L_w^1(G)$ uzayının Fourier dönüşümü kompakt destekli elemanlarının kümesinin $L_w^1(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğu biliniyor (Domar,1956).

1.8.Tanım: G lokal kompakt Abel grubu ve μ de onun üzerinde bir Haar ölçümü olsun. Yine f, G üzerinde tanımlı, ölçülebilir ve karmaşık değerli bir fonksiyon olmak üzere her $y > 0$ için $\lambda_f(y) = \mu\{x \in G||f(x)| > y\}$ biçiminde tanımlanan λ_f fonksiyonuna dağılım (distrubition) fonksiyonu denir. Her $t > 0$ olmak üzere $f^*(t) = sup\{y > 0|\lambda_f(y) > t\}$ şeklinde tanımlanan f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun rearrangementi denir. Yine her $t > 0$ için $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(x)\,dx$ biçiminde tanımlanan f^{**} fonksiyonuna ise f fonksiyonunun ortalama fonksiyonu denir (Hunt,1966).

1.9.Tanım: G lokal kompakt Abel grubu μ de onun üzerinde bir Haar ölçümü olsun. f, G üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve ölçülebilirbir fonksiyon olmak üzere bir $\|.\|_{(p,q)}^*$ fonksiyonunu

$$\|f\|_{(p,q)}^* = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\int\limits_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}[f^*(t)]^q d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} & ,0 < p,q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & ,0 < p \le \infty, \quad q = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlıyalım. Bu takdirde $\|f\|_{(p,q)}^* < \infty$ olacak şekildeki f fonksiyonlarının denklik sınıfının meydana getirdiği küme L(p,q) ile gösterilir ve Lorentz uzayı olarak adlandırılır (Hunt,1966).

Ayrıca bu L(p,q) uzayının $L^p(G)$ uzayları ile de ilişkisi vardır. Eğer $p = q$ olarak alınırsa, $\|f\|_{(p,q)}^* = \left(\int_G |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$ olup $L(p,p)(G) = L^p(G)$ elde edilir (Halmos,1950). Bu ise bilinen $L^p(G)$ Lebesgue uzayıdır. L(p,q)(G) uzayında

$$\|f\|_{(p,q)} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}[f^{**}(t)]^q d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} & ,0 < p,q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & ,0 < p \le \infty,\ q = \infty \end{cases}$$ şeklinde tanımlanan

$\|f\|_{(p,q)}$ fonksiyonunun bir norm olduğu ve bu norma göre L(p,q)(G) uzayının bir Banach uzayı olduğu biliniyor (Hunt,1966). Yine $\|.\|_{(p,q)}^*$ ve $\|.\|_{(p,q)}$ fonksiyonları arasında ise

$1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ olmak üzere $\|f\|^*_{(p,q)} \leq \|f\|_{(p,q)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|^*_{(p,q)}$ eşitsizliği vardır (Hunt,1966),(Chen ve Lai,1975).

2. Materyal ve Metod

2.1.Tanım: G lokal kompakt Abel grubu , S(G) kümesi de $L^1(G)$ uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt cebiri olsun. Bu takdirde S(G) uzayına Segal cebiri denir (Reiter,1968).

(i) S(G), $L^1(G)$ uzayında heryerde yoğun ve ötelemeler altında invaryanttır. Yani herhangi $f \in S(G)$ ve $a \in G$ için $L_a f \in S(G)$ olur.

(ii) S(G) uzayı $\|.\|_s$ normuna ve girişim işlemine göre Banach cebiridir.

(iii) Herhangi $f \in S(G)$ ve $a \in G$ için $\|L_a f\|_s = \|f\|_s$ eşitliği vardır.

(iv) Herhangi $f \in S(G)$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $y \in U$ için $\left\|L_y f - f\right\|_s < \varepsilon$ olacak şekilde birimin bir U komşuluğu vardır.

Şimdi de tanımlamış olduğumuz $A_w(p,q)(G)$ uzayının ideallerini incelerken kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri verelim.

2.2.Tanım: A bir cebir I da A'nın bir alt vektör uzayı olsun. Her $x\epsilon A$ için $xI\ C\ I$ $(I\ x\ CI)$ oluyorsa I'ya A'nın bir sol(sağ) ideali denir. Eğer I hem sol hemde sağ ideal ise buna iki taraflı ideal denir. Yine I C A ideali $I \neq A$ koşulunu ağlıyorsa I'ya A'nın bir has ideali denir. I, A'nın bir has ideali olsun. I C J olacak şekilde A'nın bir J sol (sağ veya iki taraflı) ideali olduğunda I = J veya J = A oluyorsa bu takdirde I'ya A'nın maksimal ideali denir. Yine her $x \in A$ için $xu - x \in I$ $(ux - x \in I)$ olacak şekilde bir $U \in A$ varsa bu takdirde I idealine A'nın bir regüler maksimal ideal uzayı denir (Larsen,1973).

A değişmeli bir Banach cebiri olsun. $\Delta(A)$ ile A'da ki M regüler maksimal ideallerinin kümesini gösterelim. Bu takdirde $\Delta(A)$ ya A'nın regüler maksimal ideal uzayı denir (Larsen,1973).

2.3.Tanım: $(B, \|.\|_B)$ bir normlu uzay ve $(A, \|.\|_A)$ bir Banach cebiri olsun. **:** $(B, \|.\|_B)$ normlu uzayına aşağıdaki koşulları sağlarsa $(A, \|.\|_A)$ Banach cebirine göre soyut Segal cebiri denir (Chen ve Lai,1975).

(i) B, A'nın heryerde yoğun ideali ve $\|.\|_B$ normuna göre Banach cebiridir.

(ii) Her $f \in B$ için $\|f\|_A \leq M\|f\|_B$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır.

(iii) Her $f, g \in B$ için $\|fg\|_B \leq c\|f\|_A\|g\|_B$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır.

2.4.Teorem: B, A Banach cebirine göre P(r,1) özelliğini sağlayan bir soyut Segal cebiri olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) Eğer J, A'da kapalı bir ideal ise bu takdirde $J \cap B$ de B'de kapalı bir idealdir.

(ii) Eğer I, B'de kapalı bir ideal ise bu takdirde $\bar{I}$ kümesi de (Burada ki kapanış A uzayındaki topolojiye göredir) A'da kapalı olup $I = \bar{I} \cap B$ eşitliği vardır (Burnham,1972).

2.5.Tanım: A değişmeli bir Banach cebiri ve $\Delta(A)$ da onun regüler maksimal ideal uzayını göstersin. Her $x \in A$ elemanı $\Delta(A)$ üzerinde tanımlı

$$\hat{x}(h) = h(x) \qquad , \quad \big(h \in \Delta(A)\big)$$

eşitliği ile verilen bir verilen bir $\hat{x}$ fonksiyonu tanımlar. Böylece $\hat{x}$ fonksiyonu $\Delta(A)$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca $\hat{x}$ fonksiyonu $\Delta(A)$ üzerinde tanımlı, sürekli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonların uzayı $C_0\big(\Delta(A)\big)$ ya aittir. Bunun sonucu eğer

$$\hat{A} = (\hat{x} | x \in A)$$

denirse $\widehat{A} \subset C_0\big(\Delta(A)\big)$ olur. Yine $x \to \hat{x}$ dönüşümü A'dan $\hat{A}$ uzayına bir homomorfizmdir. Bu $\hat{x}$ fonksiyonuna x in Gelfand dönüşümü denir (Rudin,1960).

2.6.Teorem(Gelfand Teoremi): A değişmeli bir Banach cebiri olsun. Bu takdirde her A değişmeli bir Banach cebiri olsun. Bu takdirde her $x \in A$ için

$$\lim_{n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|\hat{x}\|_\infty$$

eşitliği vardır. Burada $\|\hat{x}\|_\infty$ normu $\tau \in \Delta(A)$ olmak üzere

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{\tau \in \Delta(A)} |\hat{x}(\tau)|$$

biçiminde tanımlıdır (Larsen,1973).

2.7.Tanım: A değişmeli bir Banach cebiri olsun.Eğer A üzerindeki Gelfand dönüşümü birebir ise bu takdirde A cebirine yarı-basit (semisimple)denir.

Yine biliniyor ki bu değişmeli A Banach cebirinin yarı-basit olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in A$ için $\|\hat{x}\|_\infty = 0$ olduğunda $x = 0$ olmasıdır (Larsen,1973).

Şimdi ifade edeceğimiz teorem $A_w(p,q)(G)$ uzayının maksimal ideal uzayını bulmak için bize gerekli olacaktır.

2.8.Teorem: B, A değişmeli Banach cebiri üzerinde bir soyut Segal cebiri olsun. Bu zaman aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) B'nin regüler maksimal ideal uzayı A'nın regüler maksimal ideal uzayına homeomorftur.

(ii) B'nin yarı-basit olması için gerekli ve yeterli koşul A'nın yarı-basit olmasıdır (Burnham,1972).

(Cigler,1969) tarafından bir $S_w = S_w(G)$ uzayı şu şekilde tanımlandı.

2.9.Tanım: G lokal kompakt Abel grubu olmak üzere $S_w = S_w(G)$ uzayı $L_w^1(G)$ uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt cebiri olsun.

(i) S_w, $L_w^1(G)$uzayında heryerde yoğundur.

(ii) S_w uzayı $\|.\|_{S_w}$ normuna göre bir Banach cebiri olup ötelemeler altında invaryanttır.

(iii) Herhangi $f \in S_w$ ve $y \in G$ için $\|L_y f\|_{S_w} \leq w(y)\|f\|_{S_w}$ eşitsizliği sağlanır.

(iv) Herhangi $f \in S_w$ ve $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $y \in U$ için $\|L_y f - f\|_{S_w} < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

(v) Herhangi $f \in S_w$ için $\|f\|_{1,w} \leq \|f\|_{S_w}$ eşitsizliği vardır.

3. Bulgular ve Tartışma

3.1.Tanım: Bir $A_w(p,q)(G)$ kümesini $1 \leq p, q < \infty$ olmak üzere
$A_w(p,q)(G) = \{f \in L_w^1(G) \big| \hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)\}$ şeklinde tanımlıyalım.

3.2.Önerme: $A_w(p,q)(G)$ uzayı karmaşık sayılar cismi üzerinde vektör uzayıdır.

Şimdi bu vektör uzayı üzerine $f \in A_w(p,q)(G)$ olmak üzere

$$\|f\|_{A_w} = \|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{(p,q)}$$

fonksiyonu tanımlıyalım. Bu fonksiyon iki normun toplamı olduğundan bir norm olup $(A_w(p,q)(G), \|.\|_{A_w})$ bir normlu uzay olur.

3.3.Önerme: $A_w(p,q)(G)$ uzayı $\|.\|_{A_w}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat: $A_w(p,q)(G)$ normlu uzayında herhangi bir $(f_n)_{n\in N}$ Cauchy dizisi verilsin. Cauchy dizisi tanımı gereğince herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $m, n \geq n_0$ için $\|f_n - f_m\|_{A_w} = \|f_n - f_m\|_{1,w} + \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{(p,q)} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ sayısı vardır. Buradan $\|f_n - f_m\|_{1,w} < \varepsilon$ ve $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{(p,q)} < \varepsilon$ bulunur. Bu ise $(f_n)_{n\in N}$ dizisinin $L_w^1(G)$ ve $(\hat{f}_n)_{n\in N}$ dizisinin de $L(p,q)(\Gamma)$ uzayında Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $L_w^1(G)$ ve $L(p,q)(\Gamma)$ uzayları Banach uzayı olduklarından $(f_n)_{n\in N}$ dizisi $L_w^1(G)$ nin bir $f \in L_w^1(G)$ ve $L(p,q)(\Gamma)$ nın bir $g \in L(p,q)(\Gamma)$ elemanına yakınsar. Böylece verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_1$ olduğunda

$$\|f_n - f\|_{1,w} \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

olacak şekilde $n_1 \in N$ sayısı ve her $n \geq n_2$ olduğunda

$$\left\|\hat{f}_n - g\right\|_{(p,q)} \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in N$ sayısı vardır. Yine (1) eşitsizliği kullanılırsa

$$\left\|\hat{f}_n - \hat{f}\right\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f\|_{1,w} \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ olup}$$

$$\left\|\hat{f}_n - \hat{f}\right\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

bulunur. Öte yandan $q < \infty$ olmak üzere her $f \in L(p,q)(\Gamma)$ için

$$\|f\|^*_{(p,\infty)} \leq \|f\|^*_{(p,q)} \tag{4}$$

eşitsizliği biliniyor (Hunt,1966). Ayrıca her $f \in L(p,q)(\Gamma)$ için

$$\|f\|^*_{p,q} \leq \|f\|_{(p,q)} \tag{5}$$

eşitsizliği de biliniyor (Chen ve Lai,1975). O halde (4) ve (5) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$\|f\|^*_{(p,\infty)} \leq \|f\|^*_{p,q} \leq \|f\|_{(p,q)} \tag{6}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece her $n \geq n_2$ için

$$\left\|\hat{f}_n - g\right\|^*_{(p,\infty)} \leq \left\|\hat{f}_n - g\right\|_{(p,q)} \leq \varepsilon$$

olduğundan $\left\|\hat{f}_n - g\right\|^*_{(p,\infty)} \leq \varepsilon$ bulunur. Yani,

$$\left\|\hat{f}_n - g\right\|^*_{(p,\infty)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(\hat{f}_n - g\right)^*(t) \leq \varepsilon$$

olur. Halbuki

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(\hat{f}_n - g\right)^*(t) = \sup_{y>0} y \left[\lambda_{\hat{f}_{n-g}}(y)\right]^{\frac{1}{p}}$$

olduğundan (Hunt,1966), $\sup_{y>0} y\left[\lambda_{\hat{f}_{n-g}}(y)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$ olup buradan her $y > 0$ için $\lambda_{\hat{f}_n-g}(y) \leq \varepsilon$ yazılır. Böylece her $y > 0$ ve her $n \geq n_0$ için

$$\lambda_{\hat{f}_n-g}(y) = \mu\left(\left\{x \in \Gamma \middle| \left|\hat{f}_n(x) - g(x)\right| > y\right\}\right) \leq \varepsilon$$

olur. Bu ise $(\hat{f}_n)$ dizisinin ölçüm içinde $g \in L(p,q)(\Gamma)$ elemanına yakınsaması demektir. O halde $(\hat{f}_n)$ dizisinin g fonksiyonuna hemen hemen heryerde yakınsayan bir $(\hat{f}_{n_k})$ alt dizisi vardır (Halmos,1950). Dolayısıyla $(\hat{f}_{n_k})$ alt dizisinin g fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini A ile gösterirsek $\mu(A) = 0$ olur. O halde aynı $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $x \in G - A$ için her $n_k \geq m_1$ olduğunda

$$\left|\hat{f}_{n_k}(x) - g(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{7}$$

olacak şekilde bir bir $m_1 \in N$ sayısı vardır.

Yine $(f_n)_{n\in N}$ dizisi L_w^1G uzayında Cauchy dizisi olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ ve her $n, n_k \geq m_2$ olduğunda

$$\left\|f_n - f_{n_k}\right\|_{1,w} \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{8}$$

olacak şekilde bir $m_2 \in N$ sayısı vardır. Şimdi $m_0 = maks\{n_1, m_1, m_2\}$ diyelim ve n, n_k sayılarını $n, n_k \geq m_0$ olacak şekilde seçerek sabitleştirelim. O halde her $x \in G - A$ için

$$\left|\hat{f}(x) - g(x)\right| = \left|\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x) + \hat{f}_n(x) - \hat{f}_{n_k}(x) + \hat{f}_{n_k}(x) - g(x)\right| \leq$$

$$\leq \left|\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)\right| + \left|\hat{f}_n(x) - \hat{f}_{n_k}(x)\right| + \left|\hat{f}_{n_k}(x) - g(x)\right|$$

$$\leq \left\|\hat{f}_n - \hat{f}\right\|_\infty + \left\|\hat{f}_n - \hat{f}_{n_k}\right\|_\infty + \left|\hat{f}_{n_k}(x) - g(x)\right|$$

$$\leq \|f_n - f\|_{1,w} + \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_{1,w} + \left|\hat{f}_{n_k}(x) - g(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

olup böylece hemen hemen heryerde $\hat{f}(x) = g(x)$ elde edilir. Yine $L(p,q)(\Gamma)$ uzayının elemanları denklik sınıfından oluştuğu için $\hat{f} = g$ olur. Buradan $k_0 = mak\{n_1, n_2\}$ dersek her $n \geq k_0$ olduğunda

$$\|f_n - f\|_{A_w} = \|f_n - f\|_{1,w} + \left\|\hat{f_n} - \hat{f}\right\|_{(p,q)} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

elde edilir. O halde $A_w(p,q)(G)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

3.4.Teorem: $A_w(p,q)(G)$ uzayı girişim işlemine göre Banach cebiridir.

İspat: $A_w(p,q)(G)$ uzayının bir Banach uzayı olduğu 3.3.Önerme de gösterildi. Şimdi herhangi $f, g \in A_w(p,q)(G)$ alalım. Buradan $f, g \in L_w^1(G)$ ve $\hat{f}, \hat{g} \in L(p,q)(\Gamma)$ yazılır. $L_w^1(G)$ girişim işlemine göre Banach cebiri olduğundan (Reiter,1968),

$$\|f * g\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w} \tag{9}$$

eşitsizliği yazılır. Eğer $A = \left\|\hat{f}\right\|_\infty$ dersek,

$$\lambda_{\hat{f}\hat{g}}(y) = \mu\left(\left\{x \in \Gamma \middle| \left|\hat{f}(x)\hat{g}(x)\right| > y\right\}\right) \leq \mu\left(\left\{x \in \Gamma \middle| \left|\left(sup\hat{f}(x)\right)\hat{g}(x)\right| > y\right\}\right)$$

$$= \mu(\{x \in \Gamma || (A\hat{g})(x)| > y\}) = \lambda_{A\hat{g}}(y)$$

olur. Bunun sonucu

$$\left(\hat{f}\hat{g}\right)^*(t) = \sup\left\{y > 0 \middle| \lambda_{\hat{f}\hat{g}}(y) > t\right\}$$

$$\leq \sup\left\{y > 0 \middle| \lambda_{A\hat{g}}(y) > t\right\} = (A\hat{g})^*(t) = A\hat{g}^*(t)$$

ve buradan da

$$\left(\hat{f}\hat{g}\right)^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \left(\hat{f}\hat{g}\right)^*(x)\,dx \leq \frac{1}{t}\int_0^t A(\hat{g})^*(x)\,dx = A\frac{1}{t}\int_0^t (\hat{g})^*(x)\,dx = A(\hat{g})^{**}(t)$$

bulunur. Böylece

$$\left\|\hat{f}\hat{g}\right\|_{(p,q)} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}\left[\left(\hat{f}\hat{g}\right)^{**}(t)\right]^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq A\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}[(\hat{g})^{**}(t)]^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= A\|\hat{g}\|_{(p,q)} = \sup_{x\in\Gamma}\left|\hat{f}(x)\right|\|\hat{g}\|_{(p,q)} = \left\|\hat{f}\right\|_\infty \|\hat{g}\|_{(p,q)} \tag{10}$$

elde edilir. Eğer (9) ve (10) eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa

$$\|f*g\|_{A_w} = \|f*g\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\hat{g}\right\|_{(p,q)} \leq \|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w} + \|f\|_{1,w}\|\hat{g}\|_{(p,q)}$$

$$= \|f\|_{1,w}\left(\|g\|_{1,w} + \|\hat{g}\|_{(p,q)}\right) \leq \left(\|f\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{(p,q)}\right)\left(\|g\|_{1,w} + \|\hat{g}\|_{(p,q)}\right)$$

$$= \|f\|_{A_w}\|g\|_{A_w} \tag{11}$$

çıkar. Banach cebiri olması için gerekli diğer koşulların ispatı kolaydır. O halde $A_w(p,q)(G)$ uzayı bir Banach cebiridir.

3.5.Teorem: $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L_w^1(G)$ uzayında bir Banach idealidir.

İspat: Herhangi $f \in A_w(p,q)(G)$ ve $g \in L_w^1(G)$ alalım. $f \in A_w(p,q)(G)$ ise $f \in L_w^1(G)$ ve $\hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)$ olur. Dolayısıyla $f, g \in L_w^1(G)$ ve $L_w^1(G)$ girişim işlemine göre Banach cebiri olduğundan

$$\|f*g\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w} \tag{12}$$

eşitsizliğinin varlığı biliniyor. Yine 3.4.Teoremden dolayı

$$\left\|\hat{f}\hat{g}\right\|_{(p,q)} \leq \left\|\hat{f}\right\|_{(p,q)}\|g\|_{1,w} \tag{13}$$

eşitsizliği de biliniyor. Böylece (12) ve (13) eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa

$$\|f*g\|_{A_w} = \|f*g\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\hat{g}\right\|_{(p,q)} \leq \|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{(p,q)}\|g\|_{1,w}$$

$$= \left(\|f\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{(p,q)}\right)\|g\|_{1,w} = \|f\|_{A_w}\|g\|_{1,w}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu ise istenendir.

3.6.Önerme: w ağırlık fonksiyonu, (BD.) koşulunu sağlamak üzere $1 \le p, q < \infty$ için $A_w(p,q)(G)$ uzayının Fourier dönüşümü kompakt destekli olan bir yaklaşık birimseli vardır.

İSPAT: $A_w(p,q)(G)$ uzayında ötelemeler sürekli olduğundan herhangi bir $f \in A_w(p,q)(G)$ ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $y \in U$ için

$$\left\|L_y f - f\right\|_{A_w} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

olacak şekilde orjinin bir U komşuluğu vardır.Yine $L_w^1(G)$ uzayının Fourier dönüşümler altındaki görüntü uzayı $F_w^1(\hat{G})$ nin bir standart cebir olduğu biliniyor (Reiter,1968).

Bunun sonucu $suppk \subset U$ ve $\int_G k(y)\,dy = 1$ olacak şekilde bir $k \in C_c(G)$ vardır. Yine $y \rightarrow \left\|L_y f - f\right\|_{A_w}$ fonksiyonunun sürekliliğini göstermek kolaydır. Buradan $k * f - f = \int_G k(y)\left(L_y f - f\right) dy$ olup yukarıda verilen $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $y \in U$ için

$$\|k * f - f\|_{A_w} \le \int_G k(y)\left\|L_y f - f\right\|_{A_w} dy = \int_U k(y)\left\|L_y f - f\right\|_{A_w} dy$$

$$< \int_U k(y)\frac{\varepsilon}{2} dy = \frac{\varepsilon}{2}\int_U k(y)\,dy = \frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

elde edilir. Şimdi $F_{0,w}$ ile Fourier dönüşümü kompakt destekli fonksiyonların kümesini gösterelim. Buradan $k \in L_w^1(G)$olur. Öte yandan w ağırlık fonksiyonu (BD.) koşulunu sağladığından $F_{0,w}$ kümesi $L_w^1(G)$ uzayında heryerde yoğun olup aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|k - h\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{A_w}} \tag{16}$$

olacak şekilde bir $h \in F_{0,w}$ vardır. Yine $C_c(\Gamma) \subset L(p,q)(\Gamma)$ kapsaması kullanılırsa (Yap,1969), $\hat{h} \in L(p,q)(\Gamma)$ olup buradan $h \epsilon A_w(p,q)(G)$ elde edilir. O halde aynı $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $A_w(p,q)(G)$ uzayının $L_w^1(G)$ modül olması ve (15) ile (16) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\|h * f - f\|_{A_w} = \|h * f - k * f + k * f - f\|_{A_w}$$

$$\le \|h * f - k * f\|_{A_w +}\|k * f - f\|_{A_w}$$

$$= \|(h - k) * f\|_{A_w} + \|k * f - f\|_{A_w}$$

$$\leq \|h-k\|_{1,w}\|f\|_{A_w} + \|k*f-f\|_{A_w} < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{A_w}}\|f\|_{A_w} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

3.7.Önerme: w, (BD.) koşulunu sağlasın. Bu takdirde $A_w(p,q)(G)$ uzayı bir S_w(G) uzayıdır.

İspat: Bir $F_{0,w}$ kümesini, $F_{0,w} = \left\{f \in L_w^1(G) \middle| \hat{f} \in C_c(\Gamma)\right\}$ şeklinde tanımlıyalım. Eğer $C_c(\Gamma) \subset L(p,q)(\Gamma)$ kapsaması kullanılırsa

$$F_{0,w} = \left\{f \in L_w^1(G) \middle| \hat{f} \in C_c(\Gamma)\right\} \subset \left\{f \in L_w^1(G) \middle| \hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)\right\} = A_w(p,q)(G)\ ,$$

$$F_{0,w} \subset A_w(p,q)(G) \subset L_w^1(G) \qquad (17)$$

kapsaması elde edilir. Yine w, (BD.) koşulunu sağladığından $F_{0,w}$ kümesinin $L_w^1(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğu biliniyor (Domar,1956). Dolayısıyla herhangi $f \in L_w^1(G)$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\|f-g\|_{1,w} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $g\epsilon F_{0,w}$ vardır. Böylece (17) kapsamasından dolayı $g\epsilon A_w(p,q)(G)$ olup $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L_w^1(G)$ uzayında heryerde yoğun olur.

Yine 3.4.Teoremden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olduğu ve ötelemeler altında invaryant olduğu biliniyor.

Şimdi herhangi bir $f \in A_w(p,q)(G)$ alalım. Buradan $f \in L_w^1(G)$ ve $\hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)$ olur. Bu $f \in L_w^1(G)$ ve herhangi $y \in G$ için

$$\left\|L_y f\right\|_{1,w} \leq w(y)\|f\|_{1,w} \qquad (18)$$

olduğu ve (Avcı,1998) çalışmasından da

$$\left\|L_y f\right\|_{(p,q)} = \left\|M_{-y}\hat{f}\right\|_{(p,q)} = \left\|\hat{f}\right\|_{(p,q)} \qquad (19)$$

eşitliği biliniyor. Böylece (18) ve (19) ifadeleri birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\|L_y f\right\|_{A_w} &= \left\|L_y f\right\|_{1,w} + \left\|\widehat{L_y f}\right\|_{(p,q)} \leq w(y)\|f\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{(p,q)} \\ &\leq w(y)\|f\|_{1,w} + w(y)\left\|\hat{f}\right\|_{1,w} = w(y)\left(\|f\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{(p,q)}\right) \\ &= w(y)\|f\|_{A_w}\end{aligned}$$

bulunur. Yine her $f \in A_w(p,q)(G)$ ve her $y \in G$ için G'den $A_w(p,q)(G)$ uzayına giden $y \to L_y f$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca her $f \in A_w(p,q)(G)$ için $\|f\|_{1,w} \le \|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{(p,q)} = \|f\|_{A_w}$ olur. Öte yandan $A_w(p,q)(G)$, vektör uzayı ve girişim işlemine göre cebir olduğundan $A_w(p,q)(G)$ uzayı bir $S_w(G)$ uzayıdır.

3.8.Önerme: w, (BD.) koşulunu sağlasın. Bu takdirde $\left(A_w(p,q)(G), \|.\|_{A_w}\right)$ uzayı $\left(L_w^1(G), \|.\|_{1,w}\right)$ uzayında girişim işlemine göre soyut Segal cebiridir.

İspat: $L_w^1(G)$ uzayının girişim işlemine göre bir Banach cebiri olduğu olduğu biliniyor (Larsen,1973). Böylece $A_w(p,q)(G)$ uzayı girişim işlemine göre bir Banach cebiri olup dolayısıyla $L_w^1(G)$ uzayının bir alt cebiridir. Yine

(i) w, (BD.) koşulunu sağladığından $A_w(p,q)(G)$ uzayının $L_w^1(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğu 3.7.Önerme ve yine $L_w^1(G)$ uzayında bir ideal olduğu da 3.5.Teoremde ispatlandı.

(ii) Her $f \in A_w(p,q)(G)$ için $\|f\|_{1,w} \le \|f\|_{A_w}$ eşitsizliğinin varlığı normların tanımından hemen görülür.

(iii) Herhangi $f \in A_w(p,q)(G)$ ve $g \in L_w^1(G)$ için $\|f * g\|_{A_w} \le \|f\|_{A_w} \|g\|_{1,w}$ eşitsizliği 3.5.Teoremde gösterildi. Bu özelliklerden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L_w^1(G)$ uzayında bir soyut Segal cebiridir.

3.9.Önerme: w, (BD.) koşulunu sağlasın. Bu takdirde,

(i) Eğer I, $\left(L_w^1(G), \|.\|_{1,w}\right)$ uzayının sağ kapalı (sol kapalı) ideali ise bu takdirde $I \cap A_w(p,q)(G)$, $\left(A_w(p,q)(G), \|.\|_{A_w}\right)$ uzayının sağ kapalı (sol kapalı) idealidir ve $I = \overline{I \cap A_w(p,q)(G)}$ olur. (Burada kapanış $L_w^1(G)$ uzayının $\|.\|_{1,w}$ normuna göredir.)

(ii) Eğer J, $A_w(p,q)(G)$ uzayında kapalı ideal ise bu takdirde $\bar{J}$, $L_w^1(G)$ uzayında kapalıdır ve $I = \bar{I} \cap A_w(p,q)(G)$ olur.

İspat: w, (BD.) koşulunu sağladığından $A_w(p,q)(G)$ uzayının $L_w^1(G)$ uzayında sınırlı ve fourier dönüşümü kompakt destekli bir e(f) yaklaşık birimselinin varlığı 3.6.Önermeden biliniyor. Dolayısıyla e(f) yaklaşık birimseli girişim işlemine göre değişmeli olup $A_w(p,q)(G)$ uzayında hem sağ hem de sol yaklaşık birimsel olduğundan bu önermenin ispatı (Chen ve lai,1975) çalışmasından dolayı tamamlanır.

$L_w^1(G)$ uzayının regüler maksimal ideal uzayının genelleştirilmiş karakterler olduğu biliniyor (Yap,1972).

3.10.Önerme: a) Eğer w, (BD.) koşulunu sağlıyorsa bu takdirde $A_w(p,q)(G)$ uzayının regüler maksimal ideal uzayı ile $L_w^1(G)$ uzayının regüler maksimal ideal uzayı aynı olup $\hat{G}$ dual grubudur.

b) $A_w(p,q)(G)$ uzayı yarı-basittir.

İspat: a) $L_w^1(G)$ uzayının girişim işlemine göre bir değişmeli Banach cebiri olduğu biliniyor (Reiter,1968). Yine w, (BD.) koşulunu sağladığından 3.8.Önermeden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayı

$L_w^1(G)$ uzayı üzerinde bir soyut Segal cebiridir. Böylece (Burnham,1972) den dolayı bu iki uzayın regüler maksimal ideal uzayı aynıdır. Öte yandan w, (BD.) koşulunu sağladığından $L_w^1(G)$ uzayının regüler maksimal ideal uzayı $\widehat{G}$ dual grubudur (Domar,1956). O halde $A_w(p,q)(G)$ uzayının regüler maksimal ideal uzayı da $\widehat{G}$ dual grubu olur.

b) $A_w(p,q)(G)$ bir değişmeli Banach cebiri olduğundan $A_w(p,q)(G)$ uzayının yarı-basit olması için her $f \in A_w(p,q)(G)$ alındığında $\|\hat{f}\|_\infty = 0$ olduğunda $f = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir (Larsen,1973). Yine her $f \in A_w(p,q)(G)$ için

$$\lim_n \|f^n\|^{\frac{1}{n}} = \|\hat{f}\|_\infty \tag{20}$$

eşitliği de biliniyor (Larsen,1973). Şimdi herhangi bir $f \in L_w^1(G)$ alalım.f^n ile f fonksiyonunun n defa kendisi ile girişimini gösterelim. Buradan $f^n \in L_w^1(G)$ olup $L_w^1(G) \subset L_1(G)$ kapsamasından $f^n \in L_1(G)$ ve $\|f^n\|_1 \le \|f^n\|_{1,w}$ eşitsizliğinden $\|f^n\|_1^{\frac{1}{n}} \le \|f^n\|_{1,w}^{\frac{1}{n}}$ yazılır. Her iki tarafın $n \to \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_n \|f^n\|_1^{\frac{1}{n}} \le \lim_n \|f^n\|_{1,w}^{\frac{1}{n}} \tag{21}$$

bulunur. Gelfand teoremi gereğince, $\|\hat{f}\|_\infty = \lim_n \|f^n\|_1^{\frac{1}{n}}$ ve $\|\hat{f}\|_\infty^{\iota} = \lim_n \|f^n\|_{1,w}^{\frac{1}{n}}$ ile gösterelim. Böylece (21) eşitsizliğinden

$$\|\hat{f}\|_\infty \le \|\hat{f}\|_\infty^{\iota} \tag{22}$$

elde edilir. Burada (22) eşitsizliği kullanılırsa $\|\hat{f}\|_\infty^{\iota} = 0$ olduğundan $\|\hat{f}\|_\infty = 0$ elde edilir. Yine $L_1(G)$ uzayının yarı-basit olduğu $b$iliniyor (Larsen,1973). Buradan $f = 0$ elde edilir. Bu ise $L_w^1(G)$ uzayının yarı-basit olduğunu gösterir.

Yine $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L_w^1(G)$ üzerinde girişim işlemine göre soyut Segal cebiri olduğundan (Chen ve Lai,1975), $A_w(p,q)(G)$ uzayı yarı-basittir.

Teşekkür

Yazar bu çalışmada yardım ve desteklerinden dolayı Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI’ya teşekkür eder. Bu çalışma yazarın doktora tezinden hazırlanmıştır (Numan, 1998).

Kaynaklar

Avcı, H.,1998. Lorentz uzaylarının tensor çarpımları ve çarpanlar uzayı. Doktora tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, (94).

Blozinski,A.P.,1972. On a convolution theorem for L(p,q) spaces. Trans. of the Amer. Math. Society, Vol.164 (255- 265).

Chen,Y.K.-Lai,H.C.,1975. Multipliers of the Lorentz spaces, Hokkaido Math. J. Vol.4 (247-267).

Cigler,J.,1969. Normed ideals in $L^1(G)$, Indag Math. 31, (272-282).

Domar,Y.,1956. Harmonic Analysis Based on Certain Commutative Banach Algebras, Acta Math. 96, (1-66).

Feichtinger, H.G.-Gürkanlı, A.T.,1990. On a Family of Weighted Convolution Algebras, Internat J. Math. And Dci. Vol13, No 3, (517-526)

Halmos, P.R.,1950. Measure Theory, Van Nostrand Company, INC. (304).

Hunt, R.A., 1966. On L(p,q) Spaces, Extrait de L'Enseignement Mathematique, T. XII, Fasc.4, (249-277).

Larsen, R., 1973. Banach Algebras an Introduction, Marcel Dekker INC. New-York (345).

Numan, S., (1998). $A_w(p,q)(G)$ Uzayı ve Onun Çarpanlar uzayı. Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.

Reiter, H., 1968. Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups, Oxford at the Clarendon Press (200).

Rudin, W., 1960. Fourier Analysis on Groups, Interscience Publishers, New-York (285).

Yap, L.Y.H., 1969. Some Remarks on Convolution Operators and L(p,q) Spaces, Duke Math. J. Vol.36, (647-658).

Yap,L.Y.H., 1972. On Two Classes of Subalgebras of $L^1(G)$, Proceedings of the Japan Acad., Vol.48, No.5 (314-319).

Wang, H.C.,1977, Homogenous Banach Algebras, Marcel Dekker INC. New-York and Basel (204).