

SİMPLİKS ALGORİTMASININ TEMEL İLKELERİ VE BİR PAKET PROGRAM ÇÖZÜMÜ ÖRNEĞİ

Yrd. Doç. Dr. Yaşar HOŞCAN

GİRİŞ

İşletmeler gerek şu anda karşılaştıkları, gerekse gelecekte karşılaşılabilecekleri sorunların çözümünde veya kestiriminde çeşitli matematiksel modeller kullanmaktadırlar. Bu matematiksel modelleri kullanarak oldukça karmaşık olan sorunlar işletmenin amaçları doğrultusunda çözümlenmeye çalışılmaktadır. Bir açık sistem olarak kabul ettiğimiz işletmelerin davranışlarını anlama, açıklama ve yorumlamada matematiksel modellerin yararları oldukça büyüktür (1).

Sorunların çözümünde kullanılan matematiksel modellerin başında «Doğrusal Programlama» gelmektedir. Kurulan bir doğrusal karar modelinin çözümünde ise farklı metodlar kullanılmaktadır. Bu metodlardan bir olan Simpleks Algoritması, daha çok karar modelindeki değişken sayısının çok fazla olduğu durumlarda etkin olarak kullanılmaktadır.

(1) Kara İ., Yöneylem Araştırmasının Yöntembilimi, (Anadolu Üni. Yay. No: 98, Müh. Mim. Fak. Yay. No: 23, Eskişehir, 1986), s. 64.

1. SİMPLEKS ALGORİTMASI

Karar modelinde ulaşılmak istenen amaç yani amaç fonksiyonu denkleminin değeri, işlemlerin adım adım yapılması sonucunda elde edilmektedir. Karar modelindeki amaç fonksiyonun enbüyük veya enküçük değeri istenebilir. Amaç fonksiyonun enbüyüklenmesi veya enküçüklenmesi için uygulanacak yöntem temelde aynı olmakla beraber amaç doğrultusunda bazı mantıksal değişiklikler olmaktadır.

Simpleks algoritmasının çözümünde iki farklı yol izlenmektedir (2). Bunlardan birincisi temele girecek ve temelden çıkacak değişkenler saptandıktan sonra işlemler ilgili sütun üzerinde yapılmaktadır. İkinci metod ki biz bu yolu takip edeceğiz temel girecek değişkenle temelden çıkacak değişken değerleri sütun olarak yerleri değiştirilir ve işlemlere devam edilir. İşlemler sonucunda 3 türlü çözüme erişilir.

- Eniyi çözüm (Optimal Solution)
- Uygun çözüm yok (Infeasible Solution)
- Sonsuz çözüm (Unbounded Solution)

Bu çözümlerin yanısıra simpleks algoritmasında dejenerasyon, alternatif eniyi çözüm ve oluşmayan uygun çözümlerde (nonexisting feasible solution) ortaya çıkabilir (3).

1.1 SİMPLEKS TABLOSU

Kurulan karar modeli ile ilgili kısıtın ve amaç fonksiyonu denklemlerinin katsayıları ile kısıtlara ait sağ taraf sabitlerinin değerlerinin yerleştirildiği simpleks Tablosu Tablo 1'deki desendedir.

Değişkenlerin Amaç Fonksiyonundaki Katsayıları

C_b	x_b	\bar{x}_b	Temelde Olmayan Değişkenler	Temelde Olan Değişkenler
			Y_j	I
$\bar{Z}_j = C_b \bar{x}_b$			$C_j - Z_j$	

Tablo-1 Simpleks Tablosu

- (2) Anderson R.A., Dennis J.S., Thomas A.W., Quantitative Methods For Business, (Second Edition, West Publishing Comp., Minnesota, 1983), s. 314.
- (3) Taha A.H., Operations Research, (Second Ed., Macmillan Publ., Co., Inc., New York, 1976), s. 62.

Tablonun en üst satırında karar modelinde kullanılan değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katkıları (C_j) bulunmaktadır. Diğer sembollerin anlamları ise şöyledir:

- C_b : Temele giren değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katkıları,
 X_b : Temele giren değişkenleri,
 \bar{X}_b : Temele giren değişkenlerin sağ taraf sabitlerinin değerlerini,
 Y_j : Karar modelinde kullanılan değişkenlerin karar modelindeki katsayılarının oluşturduğu sütunları,
 I : Temelde olan değişkenlerin katsayılarının oluşturduğu matrisi,
 Z_j : Amaç fonksiyonunun değerini göstermektedir.

1.2 SİMPLİKS ALGORİTMASININ ADIMLARI

Simpleks algoritması, doğrusal karar modellerinin bir başlangıç değerinden hareketle, eniyi çözümü bulmak için geliştirilen ardışık sayısal çözümleme tekniği (4) olduğundan işlem adımlarının kurallara uygun biçimde yapılması gerekmektedir. Yapılacak adımlar şunlardır:

Adım 1 ; Karar modelindeki eşitsizlikler yapay değişkenler (slack variable) kullanılarak eşitlik haline getirilir. Bu işleme genişletme (augmentation) denir (5).

Adım 2 ; Başlangıç simpleks tablosu düzenlenir.

Adım 3 ; $Z_j = C_b Y_j$ lerden hareketle temelde olmayan her j için $C_j - Z_j$ hesaplanır. Amaç fonksiyonunun enbüyük değeri araştırılıyorsa bütün j ler için $C_j - Z_j \leq 0$ ise veya amaç fonksiyonunun enküçük değeri araştırılıyorsa bütün j ler için $C_j - Z_j \geq 0$ ise en iyi çözüme (optimal solution) erişilmiş demektir.

Adım 4 ; Amaç fonksiyonunun enbüyük değeri araştırılıyorken pozitif yönde enbüyük $C_j - Z_j$, enküçük değeri araştırılıyorken negatif yönde mutlak değer olarak enbüyük $C_j - Z_j$ temele girer.

(4) Kara İ., Yöneylem Araştırması, (Ders Notları, E.İ.T.İ.A., 1980), s. 154.

(5) Levin R.I., Kirkpatrick C.A., Rubin D.S., Quantitative Approaches To Management, (Fifth Edition, McGraw Hill Book Comp., Tokyo, 1982), s. 389.

Adım 5 ; Temele giren değişken (X_k) saptandıktan sonra enküçük

$$\left\{ \frac{X_b}{Y_k} \mid Y_k > 0 \right\} \text{ temelden } (X_e) \text{ çıkacaktır.}$$

Adım 6 ; Temele giren ve temelden çıkan değişkenler bulunduğu sonra simpleks tablosu tekrar düzenlenir. I matrisi birim matris haline getirilir.

Adım 7 ; Adım 3'e dönülür.

Bu işlemleri bir örnekle açıklamaya çalışalım.

1.3 SİMPLEKS ALGORİTMASI İLE İLGİLİ BİR ÖRNEK ÇÖZÜM

Karar Modelimizin kısıtları:

$$X_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 > 0 \quad \text{olsun.}$$

Amaç fonksiyonumuz ise şöyle:

$$\text{Enbüyük } Z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4$$

Çözüme başlamak için eşitsizlikleri eşitlik haline getirmek gerekmektedir. Birinci kısıta X_5 değişkenini, ikinci kısıta X_6 değişkenini ilave etmeliyiz. Her iki değişkende yapay (slack) değişkendir. Kısıtlara ilave ettiğimiz yapay değişkenleri başlangıç simpleks tablosunda temele alırsak temelde olan değişkenlerin oluşturduğu matrisi kolaylıkla birim matris yapabiliriz.

Başlangıç temel uygun çözüm için ilk simpleks tablosunu oluşturalım.

			2	-4	5	-6	0	0
Cb	x _b	\bar{x}_b	X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	x ₅	2	1	4	-2	8	1	0
0	x ₆	1	-1	2	3	4	0	1
$\bar{Z}_j = 0$			2	-4	5	-6		

Temelde olan değişkenlerin değerleri birim matris oluşturduğu için C_j-Z_j değerleri hesaplanır. Hesaplama sonucunda temelde olmayan X_1 2, X_2 -4, X_3 5 ve X_4 değişkeni -6 değerlerini almıştır. Amaç fonksiyonumuz enbüyüklemek olduğundan amaç fonksiyonunu en çok pozitif yönde arttıran X_3 değişkeni temele alınır. Temelden çıkacak değişken ise X_6 'dır. Çünkü X_5 değişkeninin ilgili sütununda negatif bir değer vardır.

Temele giren ve çıkan değişkenler yer değiştirdiğinde tablomuz şu şekli alacaktır.

			2	-4	0	-6	0	5
C_b	x_b	\bar{x}_b	X_1	X_2	X_6	X_4	X_5	X_3
0	x_5	2	1	4	0	8	1	-2
5	x_3	1	-1	2	1	4	0	3

Tablonun sağ tarafında bulunan ve temelde olan değişkenlerin katsayılarını birim matris yapabilmek için;

İlk önce $X_3 = X_3/3$ işlemi yapılarak X_3 'ün yeni değerleri, daha sonra $X_5 = (x_3 * x_2) + 5$ işlemi yapılarak da X_5 'in yeni değerleri bulunur ve tabloda ilgili sütunlara yerleştirilir. Şu tablo elde edilir.

			2	-4	0	-6	0	5
C_b	x_b	\bar{x}_b	X_1	X_2	X_6	X_4	X_5	X_3
0	x_5	$8/3$	$1/3$	$16/3$	$2/3$	$32/3$	1	0
5	x_3	$1/3$	$-1/3$	$2/3$	$1/3$	$4/3$	0	1
$\bar{Z}_j = 5/3$			$11/5$	$-22/3$	$-5/3$	$-38/3$		

Birinci adım sonunda birim matris elde edilmiştir. Fakat optimal çözüme henüz erişilmemiştir. Çünkü amaç fonksiyonunun değerini hala arttıran bir değişken vardır. Bu değişken X_1 'dir. Onun için X_1 değişkeni temele alınarak, temelden çıkacak değişken için işlemler yapıldığında temelden X_5 in çıkacağı bulunur. Tablo şu şekli alır:

			0	-4	0	-6	2	5
Cb	xb	\bar{x}_b	X5	X2	X6	X4	X1	X3
2	x1	8/3	1	16/3	2/3	32/3	1/3	0
5	x3	1/3	0	2/3	1/3	4/3	-1/3	1

Yine temelde olan X1 ve X3 değişkenlerin katsayılarını birim matris yapabilmek için:

İlk önce $X3 = X1 + X3$ işlemi, daha sonra da $X1 = X1 \times X3$ işlemi yapılarak birim matris elde edilir. Tablo şu değerleri alır:

			0	-4	0	-6	2	5
Cb	xb	\bar{x}_b	X5	X2	X6	X4	X1	X3
2	x1	8	3	16	2	32	1	0
5	x3	3	1	6	1	12	0	1
$\bar{Z} = 31$			-11	-66	-9	-130		

Temelde olmayan değişkenlerin değerlerine baktığımızda artık hiçbir değişkenin amaç fonksiyonun değerini arttırmadığı görülür. Artık eniyi çözüme (optimal solution) erişilmiştir. Temelde X1 ve X3 değişkenleri kalmış olup aldıkları değerler ise sırası ile 8 ye 3 dür. Amaç fonksiyonu ise $((2 \times 8) + (5 \times 3)) = 31$ değerini almıştır.

1.4. SİMPLEKS ALGORİTMASINDA DİKKAT EDİLECEK DİĞER NOKTALAR

Eđer;

1. X_k temele girecek değişken iken bu sütundaki bütün değerler 0 veya negatif ise modelin sınırsız çözümü vardır. Amaç fonksiyonu uygun çözüm alanında sonlu değildir.
2. Modelin eniyi çözümüne erişildiği zaman temelde yapay değişken var ise ilk modelin uygun çözüm alanı boştur.
3. Eniyi çözüm koşuluna erişildiği zaman temelde olmayan X_i için $C_i - Z_i = 0$ ise modelin birden fazla uygun çözüm alanı var demektir.

2. PAKET PROGRAM ÇÖZÜMÜ

Simpleks Algoritması için örnek çözümünde IBM tarafından yazılmış MPSX/370 isimli paket programı kullanacağız (6).

Paket programı kullanmak için başlıca iki adet kütüğün oluşturulması gereklidir. Bu kütüklerden birincisi doğrusal programın parametrelerinin yazıldığı kontrol program kütüğü, diğeri ise doğrusal karar modelinin değişkenlerinin ve amaç fonksiyonu ile sağtaraf sabitlerinin yazıldığı veri kütüğüdür.

2.1 MPSX/370 KONTROL PROGRAM KÜTÜĞÜNÜ OLUŞTURMA

MPSX paket programında kullanılacak parametrelerin yazıldığı bu kütüğün tipi MPSXPROG olmalıdır. Parametreler örneğimizde kullandıklarımız ile sınırlı değildir (7).

PROGRAM

* SİMPEKS ÇÖZÜMÜNE ÖRNEK

INITIALZ

MOVE (XDATA, 'ORNEK')

MOVE (XMINMAX, 'MAX')

CONVERT

SETUP

MOVE (XOBJ, 'AMAC')

MOVE (XRHS, 'RHS1')

OPTIMIZE

SOLUTION

EXIT

PEND

Parametrelerin anlamlarını kısaca özetleyelim.

PROGRAM : MPSX paket program kütüğünün birinci deyi mi olan bu komut programın başlangıcını gösterir. Konulması zorunludur.

-
- (6) Uygulaması yapılacak olan MPSX/370 paket programı VM/CMS işletim sistemi altında çalışmaktadır. Doğrusal programlama çözümünün yanısıra tamsayı programlama (mixed integer programming) çözümünü de yapabilmektedir. IBM'in lisanslı bir paket programıdır.
- (7) IBM Mathematical Programming System Extended/370 (MPSX/370), Basic Reference Manual, (Program Product 5746-XM2, 1976).

- INITIALZ : Paket programın başlangıcında, programın tüm komutlarını sıfırlayan bir makro komuttur.
- MOVE : Karakter dizgelerini bir adresten diğerine taşır.
- XDATA : Paket program kullanacak programın verilerinin başlık ismidir.
- XMINMAX : Amaç fonksiyonun amacıdır.
- CONVERT : Girdileri kart imajında okuyup ikili formata çevirir.
- SETUP : — Bellek tahsisi yapar,
— Çalışma matrislerini oluşturur,
— Başlangıç çözümü yapar.
- OPTIMIZE : Eniyi çözüme ulaşırken geçilen tüm adımların çıktı olarak alınmasını sağlayan bir makrodur. Birden çok fonksiyonu otomatik olarak gerçekleştirir. (PRIMAL, DUAL, SAVE gibi)
- SOLUTION : Paket programın çıktılarının alınmasını sağlar.
- EXIT : MPSX paket programından çıkıp kontrolü işletim sistemine verir.
- PEND : MPSX paket programının bittiğini belirtir.
: Açıklamaları gösterir.

2.2 MPSX/370 VERİ KÜTÜĞÜNÜ OLUŞTURMA

Bu kütükde oluşturduğumuz karar modeli ile ilgili kısıtların katsayıları, eşitlik durumları, sağ taraf sabitlerinin sayısal değerleri, amaç fonksiyonun katkıları verilir. Kütük tipi MPSXDATA olmalıdır.

```
NAME ORNEK FREE
* SİMPLKS ÇÖZÜMÜNE ÖRNEK
ROWS
N AMAC
L KS1
```


L KS2

COLUMNS

X1 AMAC 2.0 KS1 1.0

X1 KS2 -1.0

X2 AMAC -4 KS1 4.0

X2 KS2 2.0

X3 AMAC 5.0 KS1 -2.0

X3 KS2 3.0

X4 AMAC -6.0 KS1 8.0

X4 KS2 4.0

RHS

RHS1 KS1 2.0 KS2 1.0

ENDATA

Kısaltmaların anlamları şöyledir:

N : Amaç fonksiyonu tanımlar,

L : Kısıtın küçük veya eşit'i,

G : Kısıtın büyük veya eşit'i,

E : Kısıtın eşitliğini,

KS : Kısıtları göstermektedir.

Karar değişkenlerinin, amaç fonksiyonundaki ve kısıtlardaki katsayıları COLUMNS başlığı altında gösterilen formatta verilir.

Sağ taraf sabitlerinin değerleri ise RHS başlığında verilir.

ENDATA deyimi ile veri grubu sona erdirilir.

2.3 YÜRÜTME SONUÇLARI

Oluşturulan kontrol program ve veri kütüğü, ilgili MPSX komutu ile yürütülür. Yürütme komutu Üniversitemiz bilgi işlem merkezinde yazılmış özel bir program yardımıyla gerçekleştirilir ve şu format yapısındadır:

MPSX PROG=«kontrol programının ismi» DATA=«veri kütüğünün ismi»

Yürütme sırasında gerek kontrol programında gerekse veri küğünde bir hata ortaya çıkarsa, hata kodu ve açıklaması MPSX LISTING A kütüğüne yazılır. Herhangi bir hata yoksa yürütme sonunda alınan çıktı aşağıdaki gibidir.

```

0001          PROGRAM
0002          * SİMPLEKS ÇÖZÜMÜNE ÖRNEK
0003          INITIALZ
0211          MOVE (XDATA, ÖRNEK')
0212          MOVE (XMINMAX, 'MAX')
0214          CONVERT
0216          SETUP
0217          MOVE (XDEJ, 'AMAC')
0218          MOVE (XRHS, 'RHS1')
0219          OPTIMIZE
0418          SOLUTION
0419          EXIT
0420          PEND
    
```

	ITER NUMBER	VECTOR OUT	VECTOR IN	REDUCED COST
M	1	2	4	1.00000-
	2	3	6	2.25000-
NUMBER	FUNCTION	NUMBER	SUM	
NONOPT	VALUE	INFEAS	INFEAS	
2	4.0000	0		
	31.0000	0		

OPTIMAL SOLUTION
SOLUTION (OPTIMAL)

TIME = 0.00 MINS. ITERATION NUMBER = 2

...NAME... ...ACTIVITY... DEFINED AS

```

FUNCTIONAL      31.00000   AMAÇ
RESTRAINTS                RHS1
SECTION 1—ROWS
    
```

NUMBER	...ROW...	AT	...ACTIVITY...	SLACK	ACTIVITY
1	AMAC	BS	31.00000		31.00000-
2	KS1	UL	2.00000		.
3	KS2	UL	1.00000		.

...LOWER LIMIT... ...UPPER LIMIT... DUAL ACTIVITY

NONE	NONE	1.00000
NONE	2.00000	11.00000—
NONE	1.00000	9.00000—

SECTION 2—COLUMNS

NUMBER	COLUMNS	AT	...ACTIVITY...	...INPUT COST...
4	X1	BS	8.00000	2.00000
5	X2	LL	.	4.00000—
6	X3	BS	3.00000	5.00000
7	X4	LL	.	6.00000—
...LOWER LIMIT...		...UPPER LIMIT...		REDUCED COST...
.	.	NONE		.
.	.	NONE		66.00000—
.	.	NONE		.
.	.	NONE		130.00000—

EXIT - TIME = 0.00

Çıktının analizi

MPSX/370 paket programının yürütümü hatasız tamamlandığında çözüme gidilirken oluşan her adım (iteration) tek tek verilmektedir. Ayrıca her adımda temele giren ve çıkan karar değişkenleri ile aldıkları değerler de gösterilmektedir. Uygun çözümde duyarlılık çözümlemesi de yapılarak karar değişkenlerinin alabileceği alt ve üst değerlerde belirtilmektedir. Ayrıca DUAL ACTIVITY başlığı altında verilen değerler gölge fiyatlarını göstermektedir. REDUCED COST ise $C_j - Z_j$ değerlerini içermektedir.

Örnek çözüm, 2 adımda eniyi çözüme ulaşmış olup, temelde X1 ve X3 karar değişkenleri kalmıştır. Aldıkları değer yine sırası ile 8 ve 3 olup, amaç fonksiyonu da 31 değerini almıştır. Son tabloda kullanılan kısaltmaların anlamları şöyledir:

BS : Temelde olan değişkenleri,

LL : Temelde olmayan değişkenleri göstermektedir (8).

KAYNAKLAR

- Anderson R.A. : Quantitative Methods For Business (Second Edition, West Publishing Comp., Thomas A.W. Minnesota, 1983).

(8) IBM Mathematical Programming System Extended/370 (MPSX/370), Program Reference Manual, (Program Product 5746-XM2, 1979), s. 112.

- _____ : IBM Mathematical Programming System
Extended/370 (MPSX/370 Basic Reference
Manual, Program Product 5747-XM2,
1976)
- _____ : IBM Mathematical Programming System
Extended/370 (MPSX/370 Program Reference
Manual, Program Product 5747-
XM2, 1979)
- Levin R.I. : Quantitative Approaches To Management
Kirkpatrick C.A. (Fifth Edition, McGraw Hill Book Comp.,
Rubin D.S. Tokyo, 1982)
- Kara İ. : Yöneylem Araştırmasının Yöntembilimi
(Anadolu Üni. Yay. No: 98, Müh. Mim.
Fak. Yay. No: 23, Eskişehir, 1986)
- Kara İ. : Yöneylem Araştırması (Ders Notları, E.
T.İ.A., 1980).
- Taha A.H. : Operations Research (Second Edition,
Mcmillan Pub., Co., Inc., New York, 1976)
1976)