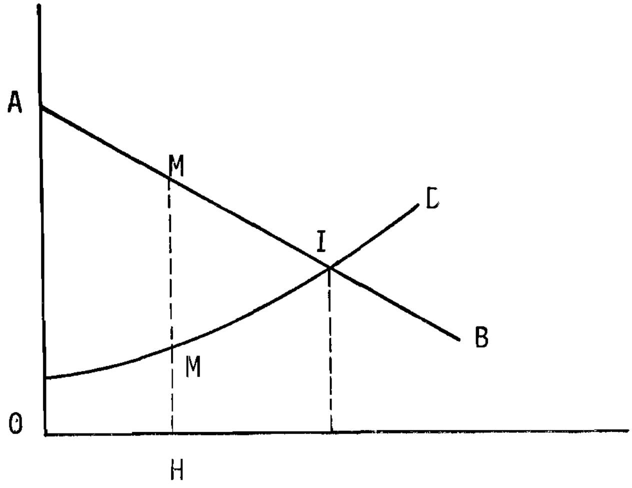
VERGİLEMENİN MATEMATİKSEL TEORİSİNE İLİŞKİN BAZI TEMEL TEOREMLER *

Çeviren :
ENRICO BARONE Öğ. Gr. Dr. Fazıl TEKİN

1. Vergilemenin kantitatif analiz iile uğraşan ve marjinal fayda teorisinden hareket eden iktisatçılar şimdi analizine başlayacağımız problemle kendilerini karşı karşıya bulmuşlardır. Biz bu problemi en basit terimlere indir-



Şekil : 1

(*) AEA Readings in the Economics of Taxation, Vol. IX, pp. 436-444.

geyerek, ve matematiğin yardımı ile çözümlemeye çalışacağız. Çözüm, en kolay ve kabul edilebilecek bir yöntemle ortaya konulacaktır.

Primus, -teorinin, hazlarına düşkün kabul ettiği bir tip-belli bir mal üretmektedir. Onun bu maldan elde etmiş olduğu fayda 1 Nolu şekilde AB eğrisi ile gösterilmiştir (1).

Şayet Primus üretiminin tümünden haz alabilme durumunda bulunuyorsa -ki bu durum üretim miktarının faydası ile maliyetin arasındaki farkın maksimum olduğu durumdur- onun üretimi U (x) — C (x)'yi maksimize eden üretim seviyesidir. Örneğin, u (x) = e (x) için x'in değeridir. Daha başka bir ifade ile üretim, kesişme noktası olan l'dir. Bunun anlamı; Primus, marjinal faydası marjinal maliyetine eşit oluncaya dek üretimini sürdürecek demektir.

Fakat şimdi herhangi bir otoritenin araya girerek Primus'un ürettiği malın bir kısmını vergi olarak (teslim etmek) zorunda bıraktığını farzedelim ve yine ilk olarak farzedelim ki üretimin bu kısmı (meselâ, buna a diyebiliriz) x üretim miktarına bağlı olmasın ve ikinci olarak a, x'in belli bir oranına eşit olsun (meselâ, t < 1 olduğu durumda, tx olsun). Yine farzedelim ki Primus, kendisine yüklenmiş olan bu vergiyi başkalarına yansıtmak olanağını bula-

---

(1) Burada marjinal fayda teorisinin matematiksel uygulamasına yabancı olacaklar için bir açıklama gerekebilir. AB fayda eğrisi şu şekilde tarif edilir: Eğri üzerindeki her nokta tekabül ettiği üretim hacmindeki marjinal faydaya eşittir. Her iki eksenin arasında kalan alan, yani ordinat ile eğrinin arasındaki alan, toplum faydayı vermektedir. Meselâ, MH; OH üretim miktarında elde edilecek nihaî faydayı ifade etmekte ve AMHO'nın kapladığı alan ise bu üretim seviyesinde sağlanan toplam faydayı belirlemektedir.

Maliyet eğrisi de benzer şekilde açıklanabilir. Maliyet eğrisi üzerindeki her nokta o üretim seviyesindeki marjinal maliyeti yansıtmaktadır. İki eksen arasında kalan alan toplam maliyeti vermektedir. Meselâ, mH, Oh üretim miktarındaki marjinal maliyeti ifade etmekte ve aynı üretim seviyesindeki toplam maliyet ise CmHO'nun kapladığı alan olmaktadır.

AB ve CD eğrilerinin ordinatları U (x) ve C (x) fonksiyonları ile gösterilecek olursa, u (x) ve c (x) bu fonksiyonların türevleri olacaktır. Zira bunlar fayda miktarındaki (ya da maliyetteki) artışların tüketim miktarlarındaki artışlara oranının bilhassa bu artış sıfıra yaklaştığı zamanki limitini belirlemekmektedir.

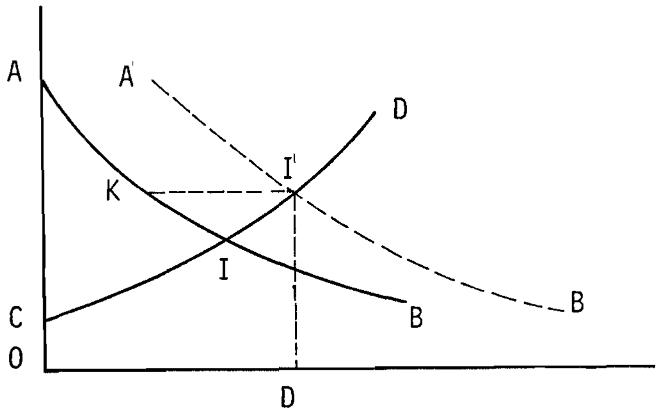
Bunu şu şekilde de ifade etmek mümkündür: Şayet tüketimdeki (ya da üretimdeki) artış çok az miktarda olursa, bu artışın tekabül ettiği fayda artışı (ya da maliyet artışı) yüksekliği, alan ve taban arasınsaki oranı aynı olan küçük bir dikdörtgene benzetilebilir.

masın, yani kısacası vergi kendi üzerinde yerleşmiş olsun. Bizim burada çözümleyeceğimiz problem şu olacaktır: Böyle bir durumda Primus nasıl bir davranışta bulunacaktır? Yine önceki üretim seviyesinde mi kalacaktır, yoksa eskisinden daha fazla, ya da daha az mı üretim yapacaktır?

Bu sorunun cevabı aşağıdaki teoremlerde verilmiştir. Bu teoremlerin yararlı olduklarını sanıyor ve bunlarda yeni gelişmeler sağlanabileceğine inanıyorum.

2. Önce farzedelim ki mükellefiyet miktarı a, üretim miktarından bağımsızdır. Örneğin, toplu bir vergidir.

Şimdi artık Primus'un üretim miktarı U (x) — C (x) farkının maksimum olduğu durum tarafından saptanmayacak fakat U (x-a) — C (x) farkının maksimum olduğu durumca saptanacaktır. Bu durumu doğrulayan x'in değeri, u (x-a) = c (x) denklemindeki değeridir.



Şekil : 2

Bu nedenle:

Teorem I. Üretim miktarından bağımsız bir vergi konulacak olursa, Primus üretim miktarını, üretimin marjinal maliyeti tüketimin marjinal faydasına eşit olacak biçimde düzenleyecektir. 2 Nolu şekilde görüleceği gibi yeni üretim noktası ya da üretimin durdurulacağı nokta, A^1B^1 maliyet eğrisinin CD'yi kestiği I^1 noktasıdır. Bu nokta u — u (x-a) denklemi ile tanımlanan eğri üzerinde yer almakta ve AB eğrisinin sağında ve ona a uzaklığında bulunmaktadır. Devam edelim;

Teorem II. Vergi üretim miktarından bağımsız olduğu takdirde Primus tüketimini kısacak ve üretimini arttıracaktır. Vergi miktarı arttıkça bu eğilim de güçlenecektir.

Bu iki teoremin geometrik bir doğrulamasını da verebiliriz. Şöyle ki:

Primus OP[1] den daha fazla üretimde bulunacak olursa bundan bir kazancı olmayacaktır. Şayet üretimde bulursa, bu taktirde ilâve üretim nedeniyle ortaya çıkacak olan maliyet farkını karşılaması gerekecektir.

Şayet Primus OP1 den daha az üretimde bulunacak olursa, üretim hacmindeki daralma ile uğranılan fayda kaybı maliyetlerde sağlanan tasarruflardan daha fazla olacaktır. Bu nedenle a büyüdüğü oranda I[1] kesişme noktası daha yüksekte meydana gelecektir.

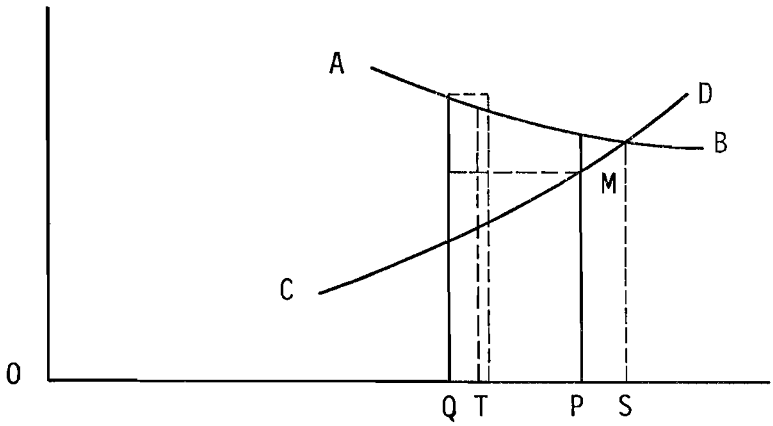
3. Şimdi daha karmaşık bir durum düşünelim, diyelimki vergi tx'e eşittir; t, t <I durumunda üretimin (x), bir kesir iolsun. Bu durumda Primus x üretim miktarını U (x-tx) — C (x) farkını maksimize ederek saptayacaktır. Bu durumu doğrulayan x'in değeri şu denklemle verilmiştir:

$$(\text{ı-t})\ u\ (x\text{-}tx) = c\ (x)$$

Bu nedenle:

Teorem III. Şayet konulan vergi üretim ile doğru orantılı ise Primus üretimini, marjinal maliyetin net bir değere indirgenmiş marjinal faydaya eşit olduğu noktaya kadar sürdürecektir.

4. III Nolu teoremin geometrik açıklaması aşağıda gösterilmiştir:



Şekil : 3

3 Nolu şekilde üretim miktarını OP, tüketime elverişli miktarı OQ kabul edelim, dolayısiyle ilkinin marjinal maliyeti olan PM, ikincinin net bir değere indirgenmiş marpinal faydası olan RQ'ya eşittir. Burada PQ = t. OP ve NR = t. NQ eşitliklerine sahip bulunuyoruz.

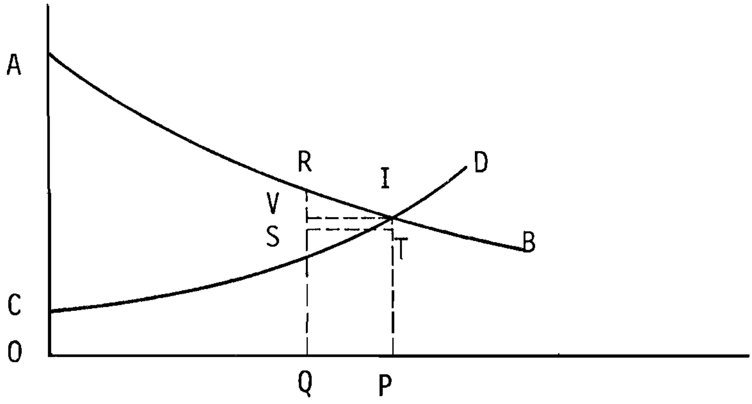
Yukarıdaki şekilden de kolayca anlaşılacağı gibi OP üretim miktarından daha çok ya da daha az üretimde bulunmak Primus'a bir çıkar sağlamayacaktır. Şayet Primus, PS kadar ek bir üretimde bulunacak olursa -ki bunun maliyeti şekildeki taralı olan alan kadar olacaktır- tüketim için elverişli üretim miktarındaki artış QT = PS olmayacak fakat QT (ı-t) olacaktır. Zira yeni üretilen miktar her birim t için aynı miktar vergiye tabi olacaktır. Şimdi, tüketime elverşili üretimi nmiktarındaki artıştan sağlanan fayda artışını gösteren taralı küçük dikdörtgen RVTQ dikdörtgenine eşittir. Fakat bu maliyetteki artıştan daha azdır bu nedenle OP den daha fazla üretimde bulunmak Primus'a bir yarar sağlamayacaktır. Aynı şekilde OP den daha az üretimde bulunmanın da Primus'a bir yararı olmayacaktır.

5. Bu durumda artık üretim miktarı, maliyet eğrisinin fayda eğrisini kestiği nokta, (y = u (x), tarafından saptanmakta fakat net eğri y = (ı-t) u (x-tx), tarafından belirlenmektedir. Net eğri, fayda eğrisinin türevi alınarak elde edilebilir, ve üretim miktarı arttıkça azalan bir eğilim gösterir (2). Verginin konması sonucunda Primus'un üretim miktarını arttıracağı mı yoksa azaltacağı mı sorusunu cevaplandırabilmek için ordinatları (ı-t) u (x-tx) olan bütün net eğriyi çizmeye gerek yoktur; bunun için net eğri üzerinde bulunan ve I kesişme noktasına tekabül eden noktanın (Bkz. Şekil 4) fayda ve maliyet eğrilerinin kesişme noktası olan I'in üstünde veya altında olduğunu saptamak yeterlidir. Şayet üstünde bulunuyorsa Primus üretimini arttıracak ve eğer altında ise azaltacaktır.

Net fayda eğrisi üzerinde bulunan ve I'ye tekabül eden T noktası şu şekilde saptanır. PQ = t. OP değerini alarak R'yi saptayın ve RS = t. RQ eşitliğini ölçün. Daha sonra ST paralelini çizin.

---

(2) Bu husus daha basit olarak, türev olmaksızın da açıklanabilir. Şöyleki: u (x) azalırken x'deki bir artış, miktarda da (ı-t) u (x-tx) azalmaya yol açar. Farzedelim ki önce y = u (x) eğrisinden y = u (x-tx)'i elde ettik. Bu iki eğri öyle olacaktır ki aynı ordinatta ikincisinin absisi daima birincisinin absisinden yüksekte bulunacaktır ve her iki absis arasındaki fark ordinat yükseldikçe daha da artacaktır. Bu nedenle u (x-tx) x'deki artışla birlikte azalmakta ve sonuçta (ı-t) u (x-tx) için de aynı durum geçerli olmaktadır.



Şekil : 4

$\dfrac{PQ}{OP} : \dfrac{RV}{IP}$ oranını e harfiyle gösterelim. Bu oran fayda eğrisinin I noktasındaki elâstikiyetidir ve Marshall'ın talep eğrisinin analizinde kullandığı terimin aynıdır. Bu noktadaki elâstikiyetin tekabül ettiği miktarı, nihai faydadaki artış yüzdesi ile çarptığımızda bize üretim miktarındaki artış yüzdesini verecek olan, değerdir (3).

Bu nedenle:

$$TP = (1\text{-}t)\ RQ = (1\text{-}t)\ (RV + IP);$$

eşitliğini kuruyoruz.

$$e = \frac{PQ}{OP} : \frac{PV}{IP} = t : \frac{RV}{IP}$$

verildiğine göre

$$RV = \frac{1}{e}\ IP$$

(3) Marshall'ın, talep eğrisi analizinde elâstikiyet, fiyattaki nisbî değişme ile çarpıldığında tüketim miktarındaki nısbî değişmeyi veren miktar olarak tanımlanmaktadır.

eşitliğini elde ediyoruz ve buradan da

$$TP = \frac{(ı\text{-}t)\ (e + t)}{e}\ IP$$

eşitliğine ulaşıyoruz.

Yukarıdaki formülden kolaylıkla anlaşılacağı gibi formülün katsayısı $\frac{ı\ (\text{-}t)\ (e + t)}{e}$, l'den farklı bir değer olup, ı-t nin e'den (fayda eğrisinin I noktasındaki elâstikiyeti) az veya çok olmasına bağlı bulunmaktadır (4).

Bu nedenle:

Teorem IV. Şayet vergi, düz oranlı ise, yani üretim miktarı ile orantılı olarak artıyor ya da azalıyorsa, Primus üretimini, üretimden vergi olarak alınan kesrin, (ı-t), fayda ile maliyet eğrilerinin kesişmiş olduğu noktadaki elâstikiyetten az veya çok olmasına göre, düzenleyecektir.

6. Bu teoremden, fayda ve maliyet eğrilerinin biçimlerindeki değişmelere ilişkin hipotezlere göre değişen teoremler çıkarılabilir.

Ben burada, fayda eğrisinin x eksenine iç bükey olduğu hipotezine dayanan bir örnek sunmak istiyorum. Eğrinin x eksenine dış bükey olduğu yada kısmen iç bükey, kısmen dış bükey olduğu hipotezlerine göre uygulanabilirliği olan teoremler ortaya konabilir.

Eğri ister iç bükey, ister dış bükey veya iç bükeyden dış bükeye geçiş noktaları olan bir eğri olsun, değişmeyen husus şudur: Herhangi bir noktadaki elâstikiyet **kotanjant** ve **absis** arasındaki orana eşittir. 5 Nolu şekilde M ve N nin, MN'nin M'nin tanjantı olarak biçimde birbirine yakın olduğunu kabul edecek olursak;

$$\frac{NR}{RM} = \frac{MP}{PT},$$

---

(4) l-t > e den (ı-t) (e +) > e değerine geçmek için eşitsizliğin her iki tarafını «t» ile çarpıyor ve onlara «e» ilâve ediyor, denklemin ikinci tarafındaki terimlerini e hariç değiştiriyor ve denklemin solunda da (ı-t) çarpanını kullanıyoruz.

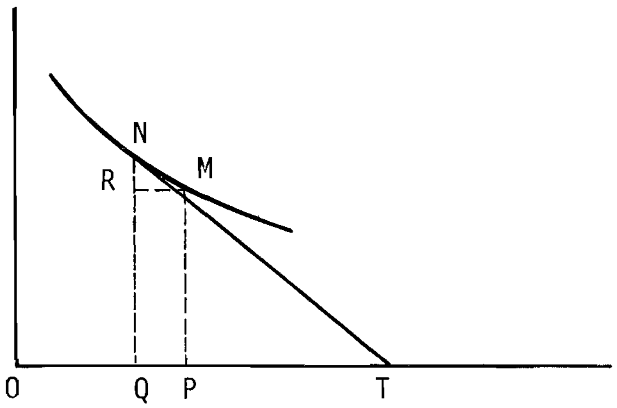
bu nedenle

$$PT = \frac{RM.MP}{NR},$$

ve buradan

$$\frac{PT}{OP} = \frac{RM.MP}{OP.NR} = \frac{RM}{OP} : \frac{NR}{MP}$$

elde ederiz.



Şekil : 5

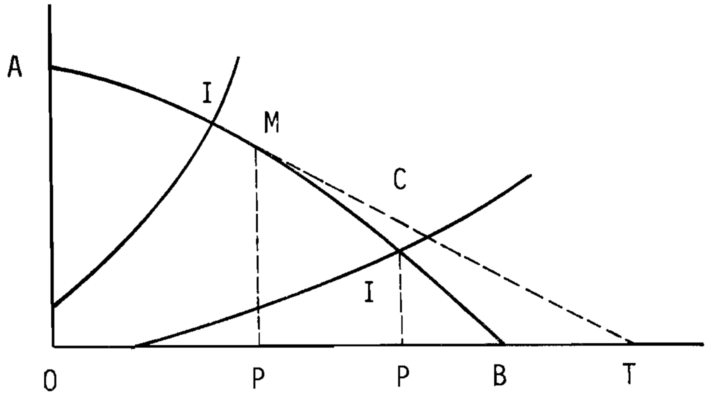
7. Şimdi farzedelim ki AB eğrisi x eksenine iç bükeydir (Bkz. Şekil 6). Kolaylıkla görülebileceği için elâstikiyet, A noktasında sonsuz denecek kadar büyük, B noktasında sıfır olup, A ile B noktası arasında ise devamlı olarak azalan bir eğilim göstermektedir. M noktası A'dan uzaklaştıkça **kotanjant** PT küçülmekte ve absis OP, büyümekte olduğundan elâstikiyet azalmaktadır.

Şekilde kotanjantın absise eşit olduğu C noktası vardır ve bu noktada elâstikiyet I'e eşittir. Bu C noktasına «COURNOT noktası» diyeceğiz (5).

---

(5) Elâstikiyetin I olduğu C noktası, absisle ordinatın çarpımının xu (x) maksimum olduğu noktadır. Çünkü bu noktada u (x) + xu'(x) = o denklemini elde ediyoruz. Şayet AB talep eğrisi olacak olursa C noktası, tekelin matematiksel teorisindeki noktanın aynı oluyor ki biliyorsunuz bunu en mükemmel biçimde ortaya koyan Cournot olmuştur.

8. Şayet maliyet eğrisi fayda eğrisini (Şekil 6'da olduğu gibi) Cournot noktasının solunda kesecek olursa, I noktasındaki elâstikiyet daima I'den büyük olacaktır. Bu nedenle her birim (ı-t) için tüketime elverişli miktar, eğrinin I noktasındaki elâstikiyetinden daha az olacaktır. Sonuç olarak IV Nolu teorem uyarınca, üretim miktarı ile düz oranlı bir vergi konduğunda, Primus üretimini azaltacak; vergi oranı yükseldikçe üretimdeki azalma da o nisbette fazla olacaktır.



Şekil : 6

Farzedelim ki Şekil 6'da görüldüğü gibi maliyet eğrisi fayda eğrisini Cournot noktasının sağında I^1 noktasında kessin. Pek tabii böyle bir durumda sonuç farklı olacaktır. I^1 noktasında elâstikiyet I'den azdır, diyelim ı-h'dir. Her birim için vergiyi sıfır kabul edersek yani t = o olduğunda Primus'un üretimi OP^1 miktarında olacaktır. Şayet mali yükümlülük (vergi), tüketime elverişli her birimin eğrinin I noktasındaki elâstikiyetini aşacak derecede az olması halinde vergi, üretimi arttıracakıtr. Fakat birim vergi h'i geçerse, tüketimi elverişli miktar I noktasındaki elâstikiyetten az olacak ve bu nedenle üretim azalacaktır.

Bundan dolayı:

Teorem V. Verginin üretim miktarı ile düz oranlı olması ve maliyet eğrisinin fayda eğrisini Cournot noktasının solunda kesmesi halinde vergi Primus'un üretimini azaltmasına yolaçar, ve vergi arttıkça üretimdeki azalma o ölçüde büyük olur. Kesişme noktası Cournot noktasının sağında bulunursa, üretimin her birimine isabet eden tüketime elverişli kısım, fayda eğrisinin maliyet eğrisini kestiği noktanın elâstikiyetinin üstünde kaldığı sürece, vergi, üretimin artmasına yolaçacaktır. Tüketime elverişli birim miktar söz konusunu elâstikiyetin altına düşerse, üretim de azalacaktır.