Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi
Dergi web sayfası: http://fbd.beun.edu.tr
DOI: 10.7212/zkufbd.v10i1.1560

Araştırma Makalesi
Geliş tarihi / Received : 31.12.2019
Kabul tarihi / Accepted : 20.02.2020

Saçılım Terimi İçeren Durağan Kinetik Denklem için Bir Ters Problemin Yaklaşık Çözümünün Araştırılması

Investigation of the Approximate Solution of an Inverse Problem for a Stationary Kinetic Equation with a Scattering Term

İsmet Gölgeleyen*, Neslihan Albuz

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Zonguldak, Türkiye

Öz

Bu çalışmada, sınırlı bir bölgede saçılım terimi içeren durağan bir kinetik denklem için bir ters problemin sayısal çözümü araştırılmaktadır. İlk olarak problem üçüncü mertebeden bir kısmi türevli diferensiyel denklem için bir Dirichlet problemine indirgenmiştir. Daha sonra ortaya çıkan denklemdeki türev ve integral içeren terimlere sırasıyla sonlu fark yaklaşımı ve Newton-Cotes formülleri uygulanmıştır. Böylece katsayılar matrisi bir üçlü köşegen blok matris olan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilmiştir. Önerilen yöntemin etkinliğini göstermek için bazı model ters problemler bir Bilgisayar Cebir Sistemi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Son olarak, elde edilen yaklaşık sonuçlar kesin çözümler ile çizelge ve grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kinetik denklem, Newton-Cotes formülleri, Sonlu fark metodu, Ters problem

Abstract

In this work, the numerical solution of an inverse problem for a stationary kinetic equation with a scattering term is investigated in a bounded domain. We first reduce the problem to a Dirichlet problem for a third order partial differential equation. Next, we apply the finite difference approximation and Newton-Cotes formulas to the derivatives and the integral term in the equation, respectively. As a result, we obtain a system of linear algebraic equations whose coefficient matrix is a block tridiagonal matrix. In order to show the effectiveness of the method, some model inverse problems are solved numerically by using a Computer Algebra System. The obtained approximate results are compared with the exact solutions by using tables and graphs.

Keywords: Kinetic equation, Newton-Cotes formulas, Finite difference method, Inverse problem

1. Giriş

Bu çalışmada bir

$$\Omega = \{(x,v) \mid x \in (a,b) \subset \mathbb{R}, v \in (c,d) \subset \mathbb{R}\}$$

bölgesinde

$$\begin{aligned} Lu &\equiv v\frac{\partial u}{\partial x} + f\frac{\partial u}{\partial v} + \int_c^d K(x,v,v')u(x,v')dv' \\ &= \lambda(x,v) + F(x,v) \end{aligned} \quad (1)$$

kinetik denklemi ele alınmıştır. Kinetik denklemler matematiksel fiziğin temel denklemleri olup maddenin hareketinin sürekliliğini modellemektedir. Bu denklemler Fen ve Sosyal bilimlerdeki birçok olayın matematiksel tasvirinde karşımıza çıkmaktadır (Anikonov 2001). Kinetik denklemler için ters problemler hem teorik hem de pratik açıdan önemlidir. Bu problemler fiziksel olarak parçacık etkileşim kuvvetleri, radyasyon kaynakları, saçılım göstergeleri ve diğer fiziksel parametrelerin belirlenmesini içerir (Amirov 2001).

Kinetik ve transport denklemler için çeşitli ters problemlerin çözülebilirliği ve yaklaşık çözümleri (Amirov 2001, Gölgeleyen 2010, Gölgeleyen 2013, Gölgeleyen et al. 2010, Amirov et al. 2009, Amirov et al. 2011) de incelenmiştir. Bu çalışmada farklı olarak integral terimi içeren (1) denklemi için sayısal bir çözüm yöntemi önerilmiştir.

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: ismet.golgeleyen@beun.edu.tr

İsmet Gölgeleyen orcid.org/0000-0002-3602-7219
Neslihan Albuz orcid.org/0000-0001-8912-893X

Bu makalede aşağıdaki problem incelenecektir:

Problem 1 Kabul edelim ki $f\in C^1(\overline{\Omega}),K(x,v,v')\in C^2(\overline{\Omega})$ fonksiyonları verilsin. (1) denklemini,

$$u|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

sınır koşulunu ve

$$\hat{L}\lambda\equiv\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial v}=0 \tag{3}$$

bağıntısını sağlayan Ω da tanımlı (u,λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemini ele alalım. Yukarıda verilen (3) diferensiyel denklemi genelleşmiş fonksiyonlar anlamında sağlanır. Yani her $\eta\in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\langle\lambda,\hat{L}^*\eta\rangle=0$$

dır. Burada $\hat{L}^*,\hat{L}$ nın Lagrange anlamında eşlenik ifadesidir.

Matematiksel fiziğin problemleri genel olarak aşağıdaki kurala göre direkt ve ters problem olarak sınıflandırılmaktadır. Örneğin fiziksel bir sistem içerisinde ve dış etkiye maruz olan bir süreci ele alalım. Burada sistemin özelliklerinin bilindiğini kabul edelim. Bu durumda ilgili süreci tanımlama problemi direkt problem olarak ifade edilir. Diğer taraftan, kabul edelim ki bu sürecin nasıl işlediği hakkında ek bir bilgimiz olsun fakat sistemin bazı parametreleri veya kaynakları bilinmesin. Bu parametrelerin belirlenmesi problemi ters problem olarak adlandırılır (Blagoveshchenskii 2001).

Klasik olarak direkt problem, uygun fizik yasalarını kullanarak verilen bir sebepten bir tek sonucun bulunması olarak ifade edilir. Bu nedenle genel olarak matematikte ve diğer doğa bilimlerinde bir problemin çözümünün varlığı, tekliği ve küçük değişikliklere karşı duyarlılığı önemli bir araştırma konusu olmaktadır. Böyle problemlere iyi konulmuş problem denir.

Bilim ve teknolojideki gelişmeler ve gereksinimler doğrultusunda klasik direkt problemlere ters olan problemlerin çözümüne ihtiyaç duyulmuştur. Daha açık olarak, bir sonuçtan nedenin veya neden ve sonuç verildiğinde fizik kanununun belirlenmesi problemi ortaya çıkmıştır. Bu tür problemlere örnek olarak sınırda yapılan ölçümlerden ulaşılamayan bir bölgenin iç yapısının özelliklerinin belirlenmesi, girdi ve çıktı ölçümlerinden sistem parametrelerinin belirlenmesi, bugüne ait verilerden geçmiş olayların belirlenmesi gibi uzaktan algılama ve direkt olmayan ölçüm ile ilgili pek çok problem verilebilir. Bu tür ters problemler genellikle kötü konulmuştur çünkü farklı sebepler aynı sonucu doğurabilir ve sonuçta ortaya çıkan küçük değişiklikler verilen sebepte büyük bir değişikliğe karşılık gelebilir (Groetsch 1993).

Problem 1 için çözülebilirlik şartları aşağıda verilmiştir.

2. Ters Problemin Çözülebilirliği

Bu bölümde, Problem 1'in çözülebilirliği için, ispat yöntemi Amirov (2001) de verilen, iki teorem sunulmuştur. Bu amaçla ilk olarak aşağıdaki kümeyi tanımlayalım:

Γ(A) kümesi aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonlardan oluşan bir kümedir:

i. u∈Γ(A) için genelleşmiş fonksiyonlar anlamında $Au\in L_2(\Omega)$ dır. Burada

$Au=\hat{L}Lu$ olarak tanımlıdır.

ii. Bir $\{u_k\}\subset\tilde{C}_0^3=\{\varphi:\varphi\in C^3(\Omega),\varphi|_{\partial\Omega}=0\}$ dizisi vardır öyle ki

$u_k\xrightarrow{L_2(\Omega)}u$ ve $\langle Au_k,u_k\rangle\to\langle Au,u\rangle,k\to\infty$ dır.

Teorem 1: Kabul edelim ki $f\in C^1(\overline{\Omega}),K(x,v,v')\in C^1([a,b]\times[c,d]\times[c,d])$, olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın:

$$f_x\geq\alpha_1,\alpha_1-\frac{L_0}{2}\geq\alpha_2. \tag{4}$$

Burada $L_0=l_0C,l_0=\max_{x\in[a,b]}\int_c^d\int_c^d K_v^2(x,v,v')dv\,dv'$ ve α_1,α_2 pozitif sayılardır.

Bu durumda Problem 1, en çok bir (u,λ) çözümüne sahiptir öyle ki $u\in\Gamma(A)$ ve $\lambda\in L_2(\Omega)$ dır.

İspat: Kabul edelim ki (u,λ),∂Ω sınırında $u=0$ ve $u\in\Gamma(A)$ olacak şekilde Problem 1'in bir çözümü olsun. (1) denkleminde $F=0$ olmak üzere ve (3) şartından $Au=0$ olur. Ayrıca $u\in\Gamma(A)$ olduğundan bir $\{u_k\}\subset\tilde{C}_0^3$ dizisi vardır öyle ki $L_2(\Omega)$ da $u_k\to u$ ve $k\to\infty$ iken $\langle Au_k,u_k\rangle\to 0$ olur. ∂Ω sınırında $u_k=0$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$-2\langle Au_k,u_k\rangle=2\Big\langle\frac{\partial}{\partial v}(Lu_k),u_{k_x}\Big\rangle$$

yazılabilir. Son eşitliğin sağ tarafı için

$$2\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}(Lu_k)=2\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x}\Big)^2+2v\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial^2u_k}{\partial x\partial v}+2f_v\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial v}$$
$$+2f\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial^2u_k}{\partial v^2}+2\frac{\partial u_k}{\partial x}\Big(\int_c^d K_v(x,v,v')u_k(x,v')dv'\Big) \tag{5}$$

bulunur. (5) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci ve dördüncü terimler tekrar değerlendirilirse

$$2\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}(Lu_k)=\frac{\partial^2u_k}{\partial x^2}+\Big(v\frac{\partial^2u_k}{\partial x^2}\Big)_v+2\Big(f\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial v}\Big)_v$$
$$-\Big(f\frac{\partial^2u_k}{\partial v^2}\Big)_x+\Big(f_x\frac{\partial^2u_k}{\partial v^2}\Big)+2\frac{\partial u_k}{\partial x}\Big(\int_c^d K_v(x,v,v')u_k(x,v')dv'\Big) \tag{6}$$

olduğu görülür. Eğer bölgenin geometrisi ve $\partial\Omega$'da $u_k = 0$ olması dikkate alınırsa (6) dan

$$-\langle Au_k, u_k\rangle = J(u_k) \tag{7}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} J(u_k) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)^2 + \left(f_x \frac{\partial^2 u_k}{\partial v^2}\right)\right. \\ &\left. +2\int_c^d K_v(x,v,v')u_k(x,v')dv' \frac{\partial u_k}{\partial x}\right)d\Omega \end{aligned} \tag{8}$$

dır. (8) in sağındaki üçüncü terimi aşağıdaki şekilde değerlendirebiliriz:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega}\int_c^d K_v(x,v,v')u_k(x,v')dv' u_{k_x} d\Omega \\ &\geq -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\left(\int_c^d K_v(x,v,v')u_k(x,v')dv'\right)^2 + (u_{k_x})^2\right)d\Omega \\ &\geq -\frac{L_0}{2}\int_{\Omega}(u_{k_v})^2 d\Omega - \frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_{k_x})^2 d\Omega. \end{aligned} \tag{9}$$

Burada $l_0 = \max_{x\in[a,b]}\int_c^d\int_c^d K_v^2(x,v,v')dvdv', L_0 = l_0 C$ dır.

Ω bölgesi sınırlı ve $\partial\Omega$ sınırında $u_k = 0$ olduğundan, Steklov eşitsizliği, teoremin kabulleri ve (9) dan

$$\begin{aligned} J(u_k) &\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_{k_x})^2 d\Omega + \alpha_1\int_{\Omega}(u_{k_v})^2 d\Omega - \frac{L_0}{2}\int_{\Omega}(u_{k_v})^2 d\Omega \\ &-\frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_{k_x})^2 d\Omega \geq \alpha_1\int_{\Omega}(u_{k_v})^2 d\Omega - \frac{L_0}{2}\int_{\Omega}(u_{k_v})^2 d\Omega \\ &\geq \left(\alpha_1 - \frac{L_0}{2}\right)\int_{\Omega}(u_{k_v})^2 d\Omega \geq \alpha_2\int_{\Omega}(u_k)^2 d\Omega \end{aligned}$$

yazılabilir. $\Gamma(A)$ tanımı kullanılarak

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq 0$$

bulunur. Bu durumda $u(x,v) = 0$ ve (1) denkleminden $\lambda(x,v) = 0$ olduğu görülür. Böylece Problem 1'in çözümünün tekliği ispatlanmış olur.

Problem 1'in çözümünün varlığı için aşağıdaki teorem verilmiştir. Bu teoremin ispatı Amirov (2001) de yer alan Teorem 2.2.2'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 2: Kabul edelim ki $F \in H^2(\Omega)$ olsun. Teorem 1'in şartları altında Problem 1'in bir (u,λ) çözümü vardır öyle ki $u \in \Gamma(A)\cap H^1(\Omega), \lambda \in L_2(\Omega)$ dır.

Burada $H^1(\Omega)$ ve $H^2(\Omega)$ uzayları Sobolev uzaylarıdır (Adams 2003).

3. Ters Problem İçin Bir Sayısal Çözüm Yöntemi

Bu bölümde, Problem 1'in yaklaşık çözümünü elde etmek için bir sayısal çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Bu amaçla $\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial v \partial x}$ operatörünü (1) denklemine uygulayalım:

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{xvx} + f_{vx}u_v + f_v u_{vx} + f_x u_{vv} + f u_{vvx} \\ &+\int_c^d K_{vx}(x,v,v')u(x,v')dv' + \int_c^d K_v(x,v,v')u_x(x,v')dv' = \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{10}$$

Burada $\mathcal{F} = \hat{L}F$ şeklinde tanımlıdır ve (10) denklemi üçüncü mertebeden bir kısmi türevli diferensiyel denklemdir. Böylece (2) sınır koşuluyla birlikte bir Dirichlet problemi ortaya çıkar. Aşağıda bu problemin sayısal çözümü için bir yöntem verilecektir. Bu amaçla

$$x_i = a + i\Delta x, i = 0,...,n;\ v_j = c + j\Delta v, j = 0,...,m$$

olmak üzere (10) denklemindeki türevler için sonlu fark yaklaşımı, integral terimler için ise Newton-Cotes formülü kullanılırsa (Burden 2011);

$$\begin{aligned} &\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ &+\frac{2w_{i,j-1} - 2w_{i,j+1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}}{2(\Delta x)^2\Delta v}v_j \\ &+\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\Delta v}\frac{\tilde{f}_{i+1,j+1} - \tilde{f}_{i+1,j-1} - \tilde{f}_{i-1,j+1} + \tilde{f}_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta v} \\ &+\frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta v}\frac{\tilde{f}_{i+1,j} - \tilde{f}_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ &+\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{(\Delta v)^2}\frac{\tilde{f}_{i,j+1} - \tilde{f}_{i,j-1}}{2\Delta v} \\ &+\frac{2w_{i-1,j} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}}{2(\Delta v)^2\Delta x}\tilde{f}_{i,j} \\ &+[a_j k_7 w_{i,j}] + [a_j k_8(w_{i+1,j} - w_{i-1,j})] = \mathcal{F}_{i,j} \end{aligned} \tag{11}$$

elde edilir. Burada I,J pozitif sayılar, $\Delta x = \frac{b-a}{I+1}$ ve $\Delta v = \frac{d-c}{J+1}$ sırasıyla x ve v yönlerindeki adım büyüklükleri, $w_{i,j}$ ise $u(x_i,v_j) = u(a+i\Delta x, c+j\Delta_v)$ için sonlu fark yaklaşımıdır. Ayrıca (11) de $L_j(v)$ Lagrange interpolasyon polinomları olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_j &= \int_{v0}^{v_m} L_j(v)dv = \int_{v0}^{v_m}\prod_{j=0,\, j\neq i}^{m}\frac{(v-v_j)}{(v_i - v_j)}dv, \\ \mathcal{F}_{i,j} &= \mathcal{F}(x_i,v_j) = \mathcal{F}(a+i\Delta x, c+j\Delta v), f_{i,j} = f(x_i,v_j) \\ &= f(a+i\Delta x, c+j\Delta v) \end{aligned}$$

dir. (11) cebirsel denklem sistemi düzenlenirse:

$$\begin{aligned} &w_{i-1,j-1}(-k_2 + k_4 - k_6) + w_{i,j-1}(2k_2 + k_3 - k_5) \\ &+w_{i+1,j-1}(-k_2 + k_4 + k_6) + w_{i-1,j}(k_1 + 2k_6 - a_j k_8) \\ &+w_{i,j}(-2k_1 + 2k_5 + a_j k_7) + w_{i+1,j}(k_1 - 2k_6 + a_j k_8) \\ &+w_{i-1,j+1}(k_2 - k_4 - k_6) + w_{i,j+1}(-2k_2 + k_3 + k_5) \\ &+w_{i+1,j+1}(k_2 - k_4 + k_6) = \mathcal{F}_{i,j} \end{aligned} \tag{12}$$

elde edilir. Burada

$$k_1=\frac{1}{\Delta x^2},k_2=\frac{v}{(\Delta x)^2(\Delta v)},$$
$$k_3=\frac{1}{2(\Delta v)}\frac{\tilde f_{i+1,j+1}-\tilde f_{i+1,j-1}-\tilde f_{i-1,j+1}+\tilde f_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta v},$$
$$k_4=\frac{1}{4(\Delta x)(\Delta v)}\frac{\tilde f_{i,j+1}-\tilde f_{i,j-1}}{2\Delta v},k_5=\frac{1}{(\Delta v)^2}\frac{\tilde f_{i+1,j}-\tilde f_{i-1,j}}{2\Delta x},$$
$$k_6=\frac{\tilde f_{i,j}}{2(\Delta x)(\Delta v)^2},$$
$$k_7=a_j\frac{K(x_{i+1},v_{j+1})-K(x_{i+1},v_{j-1})-K(x_{i-1},v_{j+1})+K(x_{i-1},v_{j-1})}{4(\Delta x)(\Delta v)},$$
$$k_8=a_j\frac{K(x_i,v_{j+1})-K(x_i,v_{j-1})}{4(\Delta x)(\Delta v)}$$

olarak tanımlanır. Ek olarak sınır koşulları için

$$w_{0,j}=u(a,v_j)=0,w_{l+1,j}=u(b,v_j)=0,w_{i,0}=u(x_i,c)=0,w_{i,j+1}=u(x_i,d)=0$$

yazılabilir. Böylece $w_{1,1},w_{2,1},...,w_{I,1},w_{1,2},w_{2,1},...,w_{I,2},...,w_{I,2},...,w_{1,j},w_{2,j},...w_{1,J}$ sıralaması esas alınarak,

$$NW=\mathcal{T} \tag{13}$$

şeklinde bir matris denklemi ortaya çıkar. Burada N bir üçlü köşegen blok matris olup aşağıdaki formdadır:

$$N=\begin{bmatrix} P^{(1)} & R^{(1)} & 0 & \cdots & 0\\ S^{(2)} & P^{(2)} & R^{(2)} & \ddots & \vdots\\ 0 & S^{(3)} & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & R^{(J-1)}\\ 0 & \cdots & 0 & S^{(J)} & P^{(J)}\end{bmatrix}_{IJ\times IJ}. \tag{14}$$

(14) matrisinde yer alan $P^{(J)},R^{(J)},S^{(J)}$ matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır. Burada $P^{(J)}=P(J)'+K^{(J)\prime}$ ve $P^{(J)\prime},K^{(J)\prime}$ sırasıyla türevden ve integralden gelen terimlerden oluşan matrislerdir:

$$P^{(J)'}=\begin{bmatrix} p_1^{(1,j)} & p_2^{(1,j)} & 0 & \cdots & 0\\ p_3^{(2,j)} & p_1^{(2,j)} & p_2^{(2,j)} & \ddots & \vdots\\ 0 & p_3^{(3,j)} & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & p_2^{(I-1,j)}\\ 0 & \cdots & 0 & p_3^{(I,j)} & p_1^{(I,j)}\end{bmatrix}_{I\times I},$$

$$K^{(J)'}=\begin{bmatrix} k_1^{(1,j)} & k_2^{(1,j)} & k_3^{(1,j)} & \cdots & k_I^{(1,j)}\\ k_1^{(2,j)} & k_2^{(2,j)} & k_3^{(2,j)} & \ddots & \vdots\\ k_1^{(3,j)} & k_2^{(3,j)} & \ddots & \ddots & k_I^{(3,j)}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & k_I^{(I-1,j)}\\ k_1^{(I,j)} & \cdots & k_{I-2}^{(I,j)} & k_{I-1}^{(I,j)} & k_I^{(I,j)}\end{bmatrix}_{I\times I}.$$

Ayrıca, $R^{(J)}=R^{(J)'}+L^{(J)'}$ olup

$$R^{(J)'}=\begin{bmatrix} r_1^{(1,j)} & r_2^{(1,j)} & 0 & \cdots & 0\\ r_3^{(2,j)} & r_1^{(2,j)} & r_2^{(2,j)} & \ddots & \vdots\\ 0 & r_3^{(3,j)} & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r_2^{(I-1,j)}\\ 0 & \cdots & 0 & r_3^{(I,j)} & r_1^{(I,j)}\end{bmatrix}_{I\times I},$$

$$L^{(J)'}=\begin{bmatrix} l_1^{(1,j)} & l_2^{(1,j)} & l_3^{(1,j)} & \cdots & l_I^{(1,j)}\\ l_1^{(2,j)} & l_2^{(2,j)} & l_3^{(2,j)} & \ddots & \vdots\\ l_1^{(3,j)} & l_2^{(3,j)} & \ddots & \ddots & l_I^{(3,j)}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & l_I^{(I-1,j)}\\ l_1^{(I,j)} & \cdots & l_{I-2}^{(I,j)} & l_{I-1}^{(I,j)} & l_I^{(I,j)}\end{bmatrix}_{I\times I}$$

şeklinde tanımlıdır.

Benzer bir gösterimle $S^{(J)}=S^{(J)'}+L^{(J)'}$ olup $S^{(J)'},L^{(J)'}$ matrisleri aşağıdaki formda verilmiştir:

$$S^{(J)'}=\begin{bmatrix} s_1^{(1,j)} & s_2^{(1,j)} & 0 & \cdots & 0\\ s_3^{(2,j)} & s_1^{(2,j)} & s_2^{(2,j)} & \ddots & \vdots\\ 0 & s_3^{(3,j)} & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & s_2^{(I-1,j)}\\ 0 & \cdots & 0 & s_3^{(I,j)} & s_1^{(I,j)}\end{bmatrix}_{I\times I},$$

$$L^{(J)'}=\begin{bmatrix} l_1^{(1,j)} & l_2^{(1,j)} & l_3^{(1,j)} & \cdots & l_I^{(1,j)}\\ l_1^{(2,j)} & l_2^{(2,j)} & l_3^{(2,j)} & \ddots & \vdots\\ l_1^{(3,j)} & l_2^{(3,j)} & \ddots & \ddots & l_I^{(3,j)}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & l_I^{(I-1,j)}\\ l_1^{(I,j)} & \cdots & l_{I-2}^{(I,j)} & l_{I-1}^{(I,j)} & l_I^{(I,j)}\end{bmatrix}_{I\times I}.$$

Burada

$$p_1=-2k_1-2k_5,p_2=-2k_2+k_3+k_5,p_3=2k_2-k_3+k_5,$$
$$r_1=k_1-2k_6,r_2=k_2+k_4+k_6,r_3=-k_2-k_4+k_6,$$
$$s_1=k_1+2k_6,s_2=k_2-k_4-k_6,s_3=-k_2+k_4-k_6,$$
$$k_1=a_1k_7,k_2=a_2k_7,k_3=a_3k_7,k_{(l-1)}=a_{(l-1)}k_7,k_l=a_lk_7,$$
$$l_1=a_1k_8,l_2=a_2k_8,l_3=a_3k_8,l_{(l-1)}=a_{(l-1)}k_8,l_l=a_lk_8,$$
$$(l=1,...,N,J=1,...,M),$$
$$\mathcal{T}=[\mathcal{F}_{1,1},\mathcal{F}_{2,1},...,\mathcal{F}_{l,1},\mathcal{F}_{1,2},\mathcal{F}_{2,2},...,\mathcal{F}_{l,2},...\mathcal{F}_{1,J},\mathcal{F}_{2,J},...,\mathcal{F}_{I,J}]^T$$

olarak tanımlanmıştır. Sonuç olarak (13) matris denklemi çözülerek $I\times J$ adet bilinmeyeni içeren

$$W=[w_{1,1},w_{2,1},...,w_{l,1},w_{1,2},w_{2,2},...,w_{I,2},...,w_{1,j},w_{2,j},...,w_{I,J}]^T$$

çözüm vektörü bulunur. Ayrıca (1) de merkezi fark formülleri ve Newton-Cotes formülü yazılarak elde edilen

$$v_j\frac{w_{i+1,j}-w_{i-1,j}}{2\Delta x}+f_{ij}\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j-1}}{2\Delta v}+\sum_{j=0}^{m}a_jK_{i,j,j}w_{ij}=\tilde\lambda_{ij}+\mathcal{F}_{ij}$$

denkleminden $\tilde\lambda_{ij}$ yaklaşık değerleri hesaplanır.

4. Sayısal Örnekler

Örnek 1 Bir $\Omega=\left(-\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)\times\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ bölgesinde $f(x,v)=-2x, K(x,v,s)=-(6+x)xvs$ ve

$$F(x,v)=3v^4x^2+6v^2x^4-\frac{68v^2x^2}{27}+\frac{128vx^4}{3645}+\frac{256vx^3}{1215}-\frac{2048vx^2}{295245}-\frac{4096vx}{98415}$$

olmak üzere, (1) denklemini ve (2) sınır şartını sağlayan (u,λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemini ele alalım. Bu problemin kesin çözümünün

$$u(x,v)=\left(x^2-\frac{16}{81}\right)\left(v^2-\frac{4}{9}\right)xv, \lambda(x,v)=-\frac{16v^4}{81}+\frac{64v^2}{729}-\frac{8x^4}{9}+\frac{128x^2}{729}$$

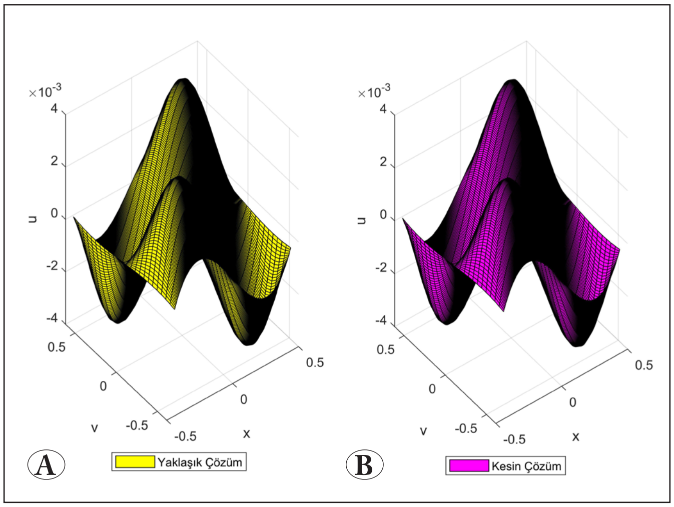
olduğu bilinmektedir.

Çizelge 1'de Örnek 1 için problemin yaklaşık çözümleri ve hesaplama süreleri verilmiştir:

Çizelge 1. Örnek 1'de $u(x,v)$ ve $\lambda(x,v)$ için sayısal sonuçlar

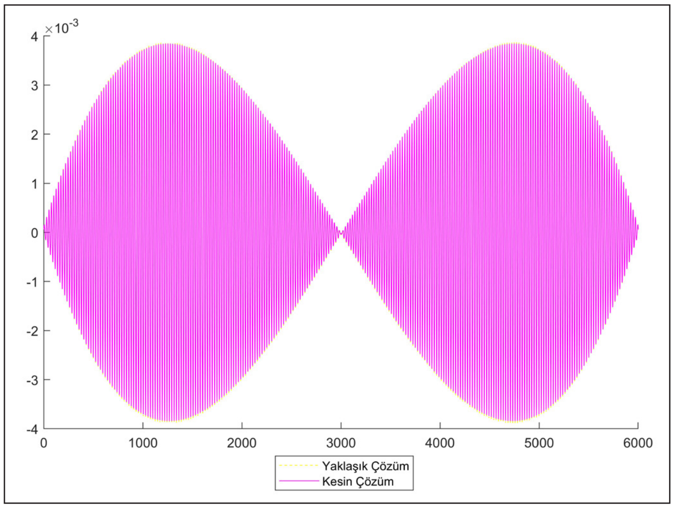
	$I=36, J=10$	$I=250, J=24$
Örgü Noktalarının Sayısı	360	6000
$u(x,v)$ için Maksimum Hata	$2.0259E$-04	$4.2443E$-05
$\lambda(x,v)$ için Maksimum Hata	$1.7E$-03	$6.4713E$-04
Hesaplama Süresi	$372.706008s$	$16815.232110s$

Şekil 1'de u için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümler sunulmuştur.



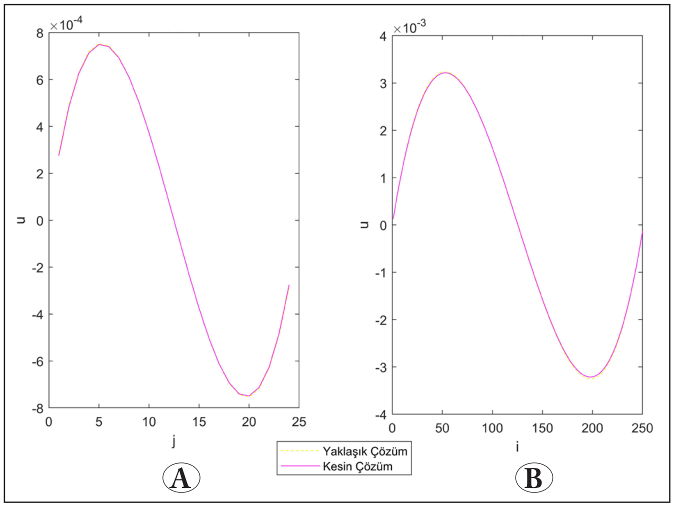
Şekil 1. Örnek 1'de u için **(A)** yaklaşık çözüm ve **(B)** kesin çözüm.

Şekil 2'de u için elde edilen sayısal sonuçlar 6000 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır:



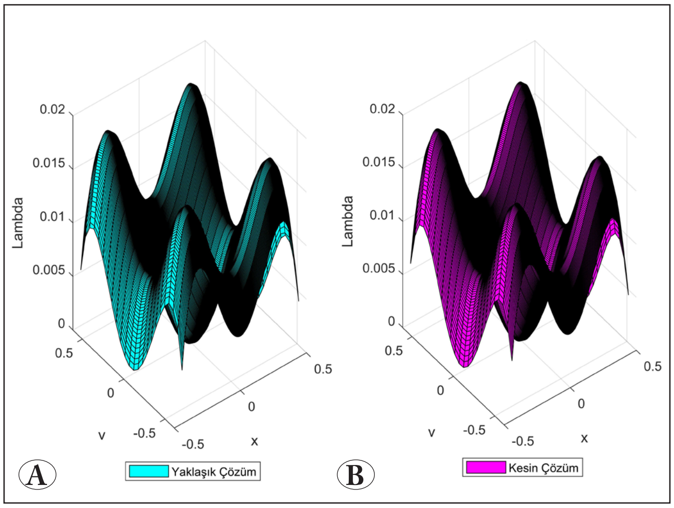
Şekil 2. Örnek 1'de elde edilen u nun çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

Şekil 1'de verilen grafiklerin (A) i=3 ve (B) j=2 de karşılaştırmalı kesitsel gösterimleri aşağıda verilmiştir:



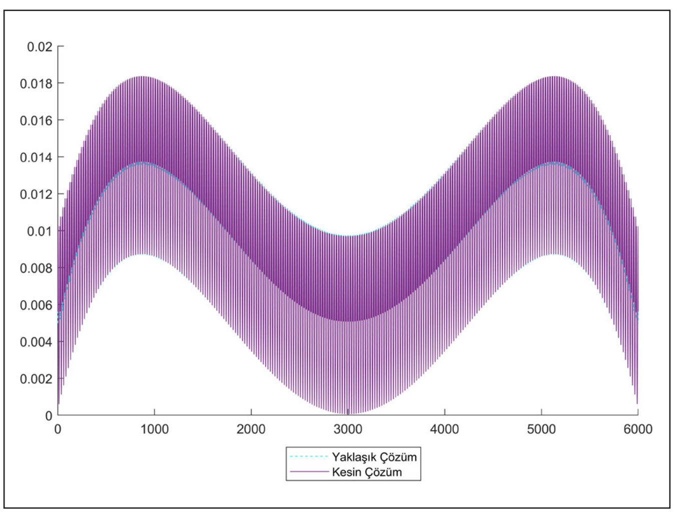
Şekil 3. Örnek 1'deki u için **(A)** i=5 ve **(B)** j=3 alınarak elde edilen kesitsel görünüm.

Şekil 4'te λ için yaklaşık ve kesin çözümler sunulmuştur.



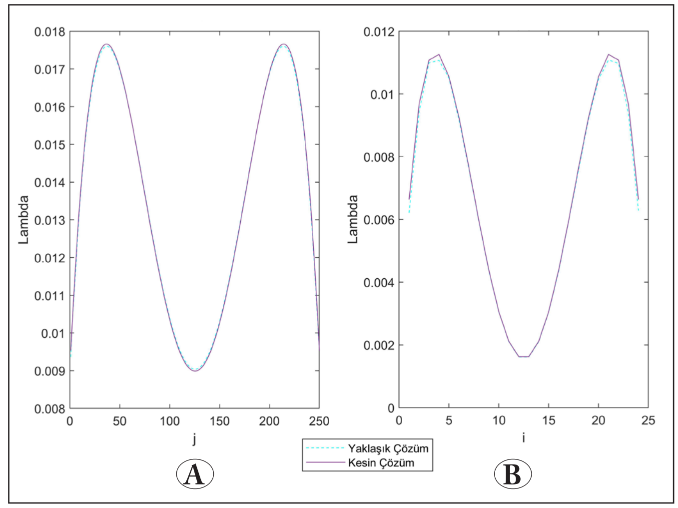
Şekil 4. Örnek 1'de elde edilen λ için **(A)** yaklaşık çözüm ve **(B)** kesin çözüm.

Şekil 5'te λ için elde edilen sayısal sonuçlar 6000 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.



Şekil 5. Örnek 1'de elde edilen λ'nın çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

Şekil 4'te verilen grafiklerin (A) i=5 ve (B) j=3 için karşılaştırmalı kesitsel gösterimleri aşağıdadır:



Şekil 6. Örnek 1'de λ için **(A)** i=5 ve **(B)** j=3 alınarak elde edilen kesitsel görünüm.

Örnek 2 (1) denkleminde $f(x,v)=-1, K(x,v,s)=xvs$ ve

$$
\begin{aligned}
F(x,v) &= \frac{144v^2}{x}+90v^2x^2-\frac{2304v^6}{x^3}-20v^3x^2 \\
&-\frac{48v^4}{x^2}+\frac{8v^5}{x^2}+147v^2e^x-30v^3e^x+5v^4e^x+\frac{9351vx}{10} \\
&-\frac{144v}{x}-\frac{8847vx^2}{20}-522v^2+\frac{243vx^3}{4}+26v^3x \\
&+60v^4x-10v^5x-\frac{85668v^2e^{2x}x}{25}-\frac{167904v^2e^{2x}x^2}{10x} \\
&-258v^2xe^x-\frac{81vx^3e^x}{2}+114v^3xe^x-19v^4e^x+\frac{96v^2e^x}{x} \\
&-\frac{72v^2e^x}{x^2}+60v^2x^2e^x-\frac{48v^3e^x}{x}+\frac{48v^3e^x}{x^2}-30v^3x^2e^x \\
&+\frac{8v^4e^x}{x}+\frac{8v^4e^x}{x^2}+5v^4x^2e^x
\end{aligned}
$$

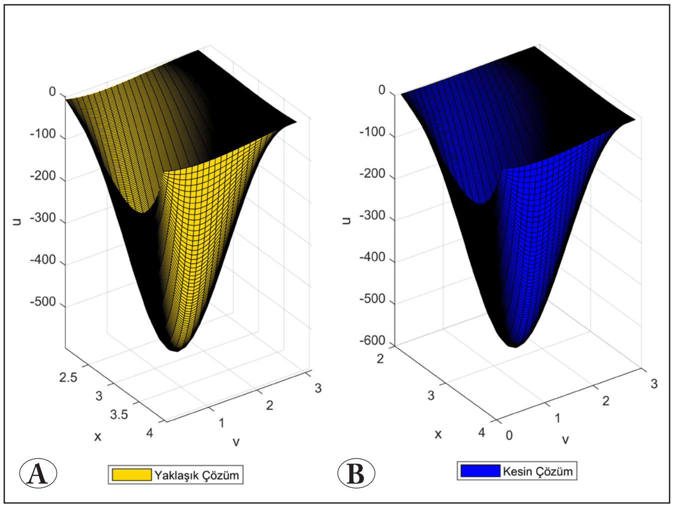
olmak üzere, $\Omega=(2,4)\times(0,3)$ bölgesinde tanımlı (u,λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemini ele alalım. Bu problemin kesin çözümünün,

$$
u(x,v)=(x^2-6x+8)\left(\frac{1}{x+5}\right)(e^x-v)(v-3)^2v,
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda(x,v) &= 29v^5-174v^4+125v^3+612v^2-\frac{2574v}{5} \\
&+\left(306+45x^2-261x+\frac{72}{x}\right)e^x
\end{aligned}
$$

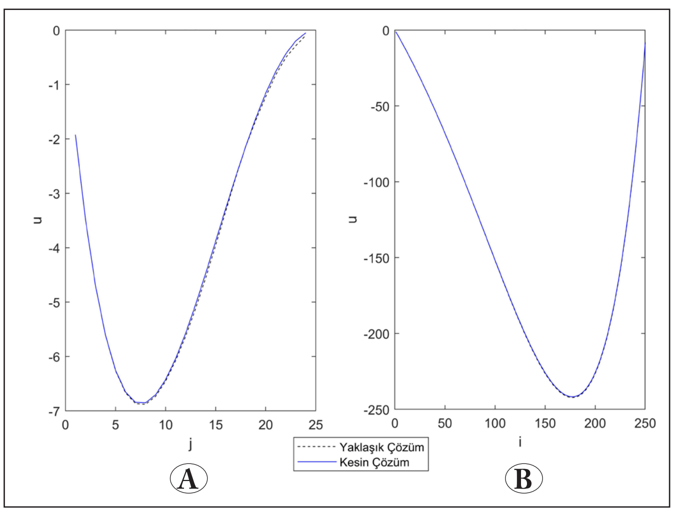
olduğu bilinmektedir.

Şekil 7'de u için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümler sunulmuştur.



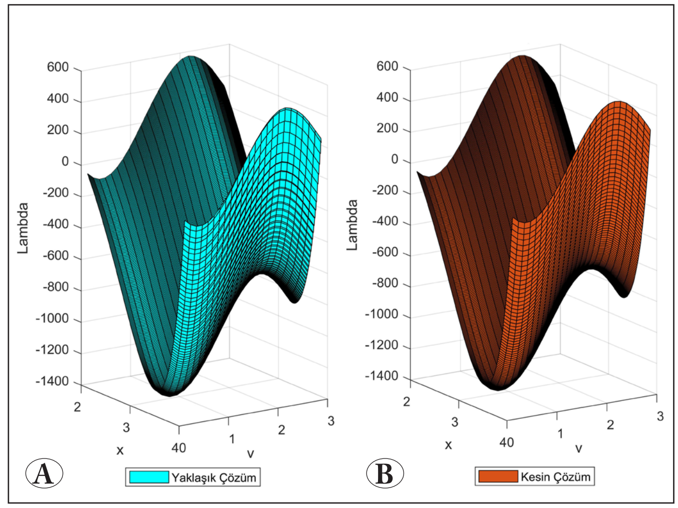
Şekil 7. Örnek 2'de elde edilen için **(A)** yaklaşık çözüm ve **(B)** kesin çözüm.

Aşağıdaki grafikte (A) i=3 ve (B) j=2 alınarak u için karşılaştırmalı kesitsel gösterimler verilmiştir.



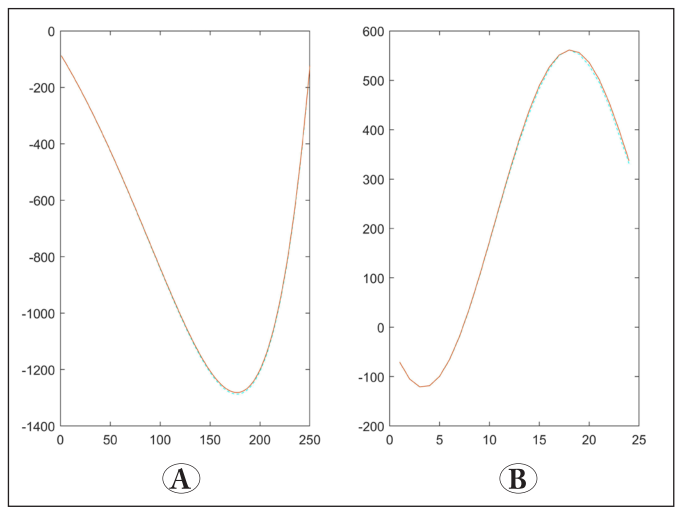
Şekil 8. Örnek 2'deki u için **(A)** i=3 ve **(B)** j=2 alınarak elde edilen kesitsel görünüm.

Şekil 9'da ele alınan problemin λ için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümleri verilmiştir.



Şekil 9. Örnek 2'deki λ için **(A)** yaklaşık çözüm ve **(B)** kesin çözüm.

Şekil 10'da λ için (A) i=3 ve (B) j=2 alınarak elde edilen kesitsel gösterimler verilmiştir.



Şekil 10. Örnek 2'deki λ için **(A)** i=3 ve **(B)** j=2 alınarak elde edilen kesitsel görünüm.

5. Sonuç

Bu makalede, saçılım terimi içeren durağan bir kinetik denklem için bir ters problem ele alınmıştır. Bu problemin sayısal çözümünü elde etmek amacıyla sonlu fark yaklaşımı ve Newton-Cotes formüllerine dayalı bir metot sunulmuştur. Ek olarak, önerilen yöntem bazı model ters problemler üzerinde test edilmiş ve etkili sonuçlar alındığı görülmüştür.

6. Kaynaklar

Adams, RA., Fournier, JJF. 2003. Sobolev Spaces, Elsevier, New York, 305 pp.

Amirov, A. 2001. Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations, VSP, Utrecht, The Netherlands, 201 pp.

Amirov, A., Gölgeleyen, F., Rahmanova, A. 2009. An Inverse Problem for the General Kinetic Equation and a Numerical Method. *Comp. Model. Eng. Sci., 43 (2): 131-147*, doi:10.3970/cmes.2009.043.131.

Amirov, A., Ustaoğlu, Z., Heydarov, B. 2011. Solvability of a Two Dimensional Coefficient Inverse Problem for Transport Equation and Numerical Method. *Transport Theory and Statistical Physics, 40 (1): 1-22,* https://doi.org/10.1080/00411450.2010.529980.

Anikonov, YuE. 2001. Inverse Problems for Kinetic and other Evolution Equations, VSP, Utrecht, The Netherlands, 270 pp.

Blagoveshchenskii, AS. 2001. Inverse Problems of Wave Processes, VSP, The Netherlands, 137 pp.

Burden, RL., Faires, DJ. 2011. Numerical Analysis, Ninth Edition, Brooks/Cole, 872 pp.

Gölgeleyen, F. 2010. On the Solvability of an Inverse Problem for the Kinetic Equation. *C.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi, 31 (1):78-89.*

Gölgeleyen, I., Heydarov, B., Yildiz, M. 2010. Approximate Solution of an Inverse Problem for a Non-Stationary General Kinetic Equation. *Comp. Model. Eng. Sci.,62 (3): 255-264*, doi:10.3970/cmes.2010.062.255.

Gölgeleyen, I. 2013. An Inverse Problem for a Generalized Transport Equation in Polar Coordinates and Numerical Applications. *Inverse problems, 29 (9): 095006*, https://doi.org/10.1088/0266-5611/29/9/095006.

Groetsch, CW. 1993. Inverse Problems in the Mathematical Sciences, Braunschweig, Vieweg, 152 pp.

Mikhailov, VP. 1978. Partial Differential Equations, Mir Publishers, Moscow, 396 pp.

Vladimirov, VS. 1971. Equations of Mathematical Physics, MIR, Moscow, 436 pp.