

MAMUL PAKETLERİNİN DÖNÜŞLERİNE MARKOV ZİNCİRİ YAKLAŞIMI

Öğ. Gr. Dr. İmdat KARA

Pazarlamada tüketim malları için kullanılan paketlerin (koyacak-ambalaj) önemi gün geçtikçe artmaktadır. Bazı tüketim malları için kullanılan kutu ve benzeri ambalajların maliyeti, taşıdığı malın maliyetine oranla oldukça yüksek olabilmektedir. Bu tür malların pazarlanmasında, maliyet artışından kaçınmak için, malın satışında paket (ambalaj) karşılığı deposit yöntemine gidilmektedir.

Ancak bu yöntem, işletmede ek yatırım ve/veya işletme sermayesi benzeri kaynak ayırımına neden olurken, geri dönüşlerdeki düzensizlikler ve paketlerin benzer mal üreten diğer firmalara kayışları, yönetime yeni sorunlar getirmektedir. Şöyle ki; karar organı, paketlerin dönüşleri, bunların stoklanması ve/veya yeni paket yapısıyla yakından ilgili üretim planlamasına ilişkin kararlarda, belirsizlik ortamındadır. Bunlara ek olarak paketler dönüşlerinde, kullanım durumlarına göre ek-masraf gerektirdiğinden, pazarlarda rakip paketlerine karşı izlenecek işletme politikasında da belirsizlik altında karar sözkonusu olmaktadır.

Bu makalede, özel bir firmada karşılaşılan benzer sorunlar için geliştirilen bir Markov Zinciri modelinin geliştirilmiş şekli sunulmaktadır. Geliştirilen modelle, karar organının gereksindiği bazı bilgiler belirsizlik ortamından olası bir ortama indirgenmektedir. Diğer taraftan modelin çıktıları, sistemle ilgili eniyileme modellerinin girdileri (parametreleri) olarak kullanılabilir özelliktedir.

(*) Bu makale, Yöneylem Araştırma 2. Ulusal Kongresinde tebliğ olarak sunulmuştur (ODTÜ, 16—18 Haziran 1976, Ankara).

I. DURUMUN KOŞULLARI VE SORUNLAR

Durumun Koşulları: Firma ve rakipleri, nitelik ve nicelik yönünden benzer paketler içinde malları pazarlamakta ve paket karşılığı eş deposit almaktadır. Diğer firmalar gibi ele alınan firma da, müşteri kaymasını önlemek ve/veya yeni müşteri kazanmak için, başka firmalara ait paketleri de müşterilerden geri almaktadır.

İşletme içi ve dışında; üretim, dağıtım, pazarlama ve paketleme süreçlerinin sürekli olduğu ve bunların kısa devrede büyük değişimlere uğramayacağı öngörülmektedir.

Karar Organının Sorunları : Tüm pazarın tüketici eğilimleri, dağıtım olanakları ve benzeri nedenlere bağlı olarak I bölgeye ayrıldığını varsayarak, bölgeler için;

$$I = \{ i \mid = 1, 2, \dots \}$$

dizin cümlesini tanımlayalım, Tanımlanan bölgelere göre karar organın çözüm istediği sorunlar aşağıda sıralanmıştır.

i) Bölgelerden dönen paketlerin marka ve kullanım durumlarına göre dağılımı nasıldır?

ii) Belirli bir zamanda belirli bir bölgeye gönderilen bir paketin eninde sonunda gere dönme olasılığı nedir?

iii) Bir zaman aralığında belirli bir bölgeden dönmesi beklenen boş paketlerin sayısı nedir, bunların ne kadarı doğrudan kullanılabilir durumdadır?

iv) Üretim bölümünün istemini karşılayacak şekilde, plânlama devresinde ne kadar yeni paket yaptırılmalıdır?

v) Bölgelerden dönen paketlerin beklenen maliyeti nedir?

Yukarıda sıralanan soruları çözümlemek amacıyla aşağıdaki yaklaşım yapılmıştır.

II. DÖNEN PAKETLERİN SINIFLANDIRILMASI

Dönen paketler markalar ve kullanım durumuna göre ayrıcalık göstermektedir. Markalarına göre; firmanın kendi markasını taşıyanlarla diğer firmalarını markaların taşıyanlar olarak ikili bir ayırım yapmak mümkündür. Kullanım durumuna göre ise; kul-

lanışlı, tamir isteyen ve kullanışsız olmak üzere üçlü bir ayırma gidilmektedir.

Her bölge için, dönen paketler içinden uygun yöntemlere göre alınan örnekler incelenerek, dönen paketlerin kullanım ve marka yönüyle dağılımını bulmak mümkündür. Bu dağılımlardan aşağıdaki olasılıklar kolaylıkla elde edilir.

- \bar{P}_i : i'inci bölgeden dönen bir paketin firma markasını taşıma olasılığı,
- $\bar{\bar{P}}_i$: i'inci bölgeden dönen bir paketin yabancı marka taşıma olasılığı,
- P_i^1 : i'inci bölgeden dönen yerli bir paketin kullanışlı çıkma olasılığı,
- P_i^2 : i'inci bölgeden dönen yerli bir paketin tamir isteme olasılığı,
- P_i^3 : i'inci bölgeden dönen yerli bir paketin kullanışsız çıkma olasılığı,
- P_i^4 : i'inci bölgeden dönen yabancı bir paketin kullanışlı çıkma olasılığı,
- P_i^5 : i'inci bölgeden dönen yabancı bir paketin tamir isteme olasılığı,
- P_i^6 : i'inci bölgeden dönen yabancı bir paketin kullanışsız çıkma olasılığı.

III. DÖNEN YERLİ PAKETLERİN OLASILIK DAĞILIM FONKSİYONU

Firma etiketini taşıyan paketlere, işyerinde paketleme tarihi damgalanmaktadır. Her paket için paketleme sonrası işlemlerde ortalama aynı zamanın kullanıldığı varsayımı yapıldığında, bir paketin dönüş tarihi ile dolduruluş tarihi arasındaki fark, pazardan dönüş süresi olarak tanımlanabilir. Bu tesadüfi süreyi ξ olarak tanımlayıp: ξ 'ın olasılık dağılım fonksiyonunu araştıralım.

Bölgesel farklılaşmalar olabileceği düşüncesiyle, her bölgeden dönen yerli paketlerden örnekler alınarak,

$$S_i(\xi) \quad \text{Her } i \in I \text{ için}$$

bölgelere göre gözlemsel olasılık fonksiyonları bulunur.

Tesadüfi değişkenin dağılımı, bazı bölgelerde aynı olabilirse de, yeni bir dizin cümlesi tanımlamadan bölgelere göre farklı dağıldığı varsayılmıştır. Her bölge için elde edilen $S_i(\xi)$ gözlemsel olasılık fonksiyonu üzerinde yapılan uygunluk sınamaları sonucunda bölge için kuramsal olasılık dağılım fonksiyonu bulunur. Bulunan kuramsal olasılık dağılım fonksiyonları,

$$f_i(\xi) \quad \text{Her } i \in I \text{ için}$$

olsun. Böylece, i 'nci bölgeden gelen bir paketin « t » zamanından önce dönme olasılığı,

$$\text{Ola. } \{ \xi < t/i \text{ 'inci bölgeden dönen} \} = \int_0^t f_i(x) dx$$

olur.

IV. ENİNDE SONUNDA DÖNME OLASILIĞI - MARKOV ZİNCİRİ YAKLAŞIMI

Açıklıkla görüleceği gibi $f_i(\xi)$ 'lardan koşullu olasılıklar bulunabilir. Oysa karar verici, i 'nci pazarda bırakılan bir paketin akışını, başka bir deyişle, i 'nci bölgeye bırakılan bir paketin belirli sürelerde dönüş olasılığını, bilmek istemektedir. Bunun için aşağıdaki Markov Zinciri geliştirilmiştir.

$$\{S_{it} \mid t = 1, 2, \dots, T_i\}$$

i 'nci bölgeye t devrelerinde gönderilen toplam paketler sayısı ve;

$$\{R_{it} \mid t = 1, 2, \dots, T_i\}$$

i 'nci bölgeden t devrelerinde dönen yerli paket sayılarını gösteren cümleler olsun. T dizin cümlesi, plânlama devresinden başlayarak, geriye doğru tam değerler alan anlamlı zaman aralıklarından oluşan bir cümle olsun.

t devrelerine göre bölgelere gönderilen paket sayıları, S_{it} 'ler kayıtlandığı halde, dönen paketlere ilişkin markalar yönüyle bir kayıt tutulmamıştır. Bu nedenle II.'de bulunan \bar{P}_i , dönen paketlerin yerli marka etiket taşıma olasılığının kullanımıyla, devrelere göre dönen toplam paketlerin \bar{P}_i kısmı R_{it} cümlesini verir.

Anlamalı bir devre süresini otuz gün (bir ay) alıp, III.'de bulunan $f_i(\xi)$ olasılık dağılım fonksiyonlarını kullanarak aşağıdaki olasılıkları tanımlayalım.

$$P_{i1} = \int_0^{30} f_i(x) dx$$

$$P_{i2} = \int_{30}^{60} f_i(x) dx$$

⋮
⋮

genel olarak,

$$P_{it} = \int_{30(t-1)}^{30t} f_i(x) dx$$

olsun. Bu olasılıkların kullanımıyla bölgelere göre durum uzayı,

$$S^{(i)} = \{0, 1, 2, \dots, K_i - 1, K_i\}$$

olan bir Markov Zinciri geliştirelim. Burada,

«O» : Geri dönme durumu

ile

«K» : Geri dönmeme durumu

ve

«1, 2, $K_i - 1$ » kutuların pazardaki yaşlarını gösteren zincirin durumları olsun. Böylece i'nci bölge için Markov Zinciri,

$$P^{(i)} = \begin{pmatrix} P_{sn}^{(i)} \end{pmatrix}$$

olur.

Zincirin geçiş olasılıkları $s, n \in S^{(i)}$ için,

$$P_{sn}^{(i)} = \begin{cases} 1 & s=n=0 \quad \text{ve} \quad s=n=K_i \quad \text{ise} \\ P_{so}^{(i)} & \text{her } s \quad \text{için} \\ 1-P_{so}^{(i)} & \text{her } s \quad \text{ve} \quad \text{her } n=s+1 \quad \text{için} \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklindedir.

i'inci pazarda s - yaşına giren bir paket için iki seçenek söz-konusudur. Ya o devre içinde $P_{so}^{(1)}$ olasılığı ile firmaya dönecek, veya $1 - P_{so}^{(1)}$ olasılığıyla izleyen devreye kalacak, başka bir deyişle s+1 yaşına girecektir.

Geliştirilen durum uzayı belirli Markov zincirinde [1, 2, $K_i - 1$] durumları geçişli (O) ve (K) ise emen durumlarını verir.

(O) ve (K) emen durumları olduğuna göre, s - geçici durumdaki bir paketin emilme (yutulma) olasılıkları toplama «1» olacağından, $\Pi_s^x(O)$ «O» durumuna emilme ve $\Pi_s^x(K)$ «K» durumuna emilme olasılıkları ise,

$$\pi_s^x(O) + \pi_s^x(K) = 1 \quad \text{Her } s \text{ için}$$

olur.

$T = [1, 2, 3, \dots, K - 1]$ geçici durumlar cümlesi iken «O» durumuna emilme olasılıkları,

$$\pi_s^x(O) = P_{so} + \sum_{n \in T} P_{sn} \pi_n^x(O) \quad \text{Her } s \text{ ve Her } n \text{ için}$$

eş-zamanlı (simultaneous) doğrusal denklem sistemlerinin çözümüyle bulunur.

Bu noktada sorun, geliştirilen Markov Zincirinin geçiş olasılıklarının nasıl bulunacağıdır. Tanımlanan P_{it} olasılıkları, S_{it} ve R_{it} cümlelerini hatırlayarak, bunların kullanımıyla $P_{sn}^{(1)}$ 'ların bulunmasını araştıralım. Kolaylık için «i» bölge göstergesini kaldırıp P_t , S_t ve R_t kullanılacaktır.

Bir devre içinde gönderilen toplam S_t kadar pakete karşılık R_t kadar yerli paket döndüğü ve P_1 bir paketin aynı devir içinde gönderilenlerin koşullu dönme olasılığı olarak tanımlanmıştır. Bunlara bağlı olarak, t'inci devrede dönen R_t kadar yerli paketin $P_t R_1$ kısmı, aynı devre içinde gönderilen paketlerden geri dönmesi beklenen miktarı verir. Burdan da, $P_1 R_t / S_t$ oranıyla t-devresinde gönderilen paketlerin aynı devre içinde geri dönme olasılığı bulunur. Bu oranı daha gerçekçi bir değerde tutmak için, uygun t-devreleri üzerinde aynı işlem yapılarak ortalaması alınırsa,

$$P_{10} = \sum_t \frac{P_1 R_t}{S_t} / \sum t$$

bir paketin aynı devre, bir yaşında iken, dönüş olasılığı elde edilir.

t-devresinde gönderilen S_t kadar toplam paket sayısı 1 - devre sonra $P_1 R_t$ kadar azalmıştır. Başka bir değişle pazarda beklenen iki-yaşındaki paket sayısı, $S_t - P_1 R_t$ kadardır. Diğer taraftan, ikinci devre içinde, iki yaşında iken dönen yerli paket sayısı $P_2 R_{t-1}$ kadardır. Böylece, $P_2 R_{t-1} / S_t - P_1 R_t$, t-devresinde gönderilen paketlerin ikinci devre içinde dönüş olasılığını verir. Uygun t-devreleri üzerinde aynı işlem yapıp ortalaması alınır,

$$P_{20} = \sum_t \frac{P_2 R_{t-1}}{S_t - P_1 R_t} / \sum t$$

bir paketin pazardan ikinci devre içinde, iki yaşında iken, dönüş olasılığı bulunur.

Üçüncü devre başında olması beklenen yerli paket sayısı, $S_t - P_1 R_t - P_2 R_{t-1}$ kadardır. Diğer taraftan t-2 devresinde, üçüncü devre, $P_3 R_{t-2}$ kadar üç-yaşında yerli paket dönmüştür. Böylece,

$$\frac{P_3 R_{t-2}}{S_t - P_1 R_t - P_2 R_{t-1}}$$

t-devresinde gönderilen paketlerin üçüncü devre içinde dönme olasılığını verir. P_{10} ve P_{20} 'de olduğu gibi uygun t-devreleri üzerinde aynı işlem yapıp ortalama alınır,

$$P_{30} = \sum_t \frac{P_3 R_{t-2}}{S_t - P_1 R_t - P_2 R_{t-1}} / \sum t$$

bir paketin pazardan üçüncü devre içinde, üç yaşında, dönüş olasılığı bulunur.

Aynı düşünce altında, zincirin bütün geçici durumlarından «O» durumuna geçme olasılıkları,

$$P_{s0} = \sum_t \frac{P_s R_{t-s+1}}{S_t - \sum_{m=1}^{s-1} P_m R_{t-m+1}} / \sum_t$$

Her s ve m = 1, 2, 3, s - 1 formülü ile bulunur.

V. SONUÇLAR

Geçiş olasılıklarının bulunmasıyla geliştirilen durum-uzayı belirli Markov Zinciri tamamlanmış olmaktadır. Dönüşlerin koşullu olasılık dağılım fonksiyonları ayrıcalık gösteren her bölge için geliştirilecek Markov Zinciriyle, karar organının gereksindiği sorunlar yanıtlanmaya çalışılır. Şöyleki;

$\pi_i^x(0)$, i'inci bölgeye herhangi bir zamanda gönderilen bir paketin, eninde sonunda dönme olasılığını verir. Zincirin iki emen (absorption) durumu olduğuna göre, $\pi_i^x(K) = 1 - \pi_i^x(0)$, eşitliğinden i'inci bölgeye herhangi bir zamanda gönderilen bir paketin eninde sonunda diğer firmalara kayma olasılığı bulunur (*).

Planlama devresi içinde dönmesi beklenen paketler iki bileşenlidir. Bunlardan ilki aynı devre içinde gönderilen paketlerden dönmesi beklenenlerin sayısıdır. Tüm süreçlerin sürekli olduğu varsayımı altında, i'inci bölgeye planlama devresinde x_i kadar paket bırakıldıysa, bu paketlerden aynı devre içinde dönmesi beklenenlerin sayısı,

$$P^{(i)} \frac{x_i}{2} \dots \dots \dots (1)$$

olur.

İkinci bileşen ise, daha önce gönderilen paketlerden dönmesi beklenenlerdir. Bunun için öncelikle i'inci pazarda yaşlarına göre paket sayılarını bulmak gerekir. q_{is} i'inci pazarda bir paketin s'inci yaşına kadar dönüş olasılığı ise,

$$q_{is} = \pi_i^x(0) \int_0^{30s} f_i(x) dx$$

olur.

(*) Müşterilerin paketleri başka amaçlarla kullanmada marka gözetmedikleri varsayımı altında.

Planlama devresinde pazarda olması beklenen s-yaşındaki paket sayısı Q_{is} ,

$$Q_{is} = S_{is} (1 - q_{is})$$

olarak bulunur. Böylece de daha önce gönderilen paketlerden planlama devresi içinde geri dönmesi beklenenlerin sayısı,

$$\sum_s P_{so}^{(i)} Q_{is} \quad (2)$$

olur. a_{i1} planlama devresi içinde dönmesi beklenen yerli paket sayısı, (1) ve (2) nolu değerlerin toplamıdır. Başka bir deyişle,

$$a_{i1} = P_{10}^{(i)} \frac{x^i}{2} + \sum_s P_{so}^{(i)} Q_{is}$$

dir.

Diğer taraftan, i'inci bölgeden bir devre içinde dönen toplam paketlerin \bar{P}_i kısmı yabancı marka taşımaktadır. a_{i2} , i'inci bölgeden dönmesi beklenen yabancı paketlerin sayısı olarak tanımlanırsa,

$$a_{i2} = \frac{a_{i1}}{\bar{P}_i}$$

olur.

Planlama devresinde gereksinen toplam paket sayısı; o devre içinde dönen kullanışlı paketler, tamir isteyenler ve yeni yapılanların toplamıdır. X_i , i'inci bölge için gereksinen paket sayısı ve Z; o devre içinde yapılacak yenipaket sayısı ise,

$$\sum_i a_{i1} (1 - P_i^3) + \sum_i a_{i2} (1 - P_i^6) + Z = \sum_i X_i$$

eşitliği sağlanacaktır. Bu eşitlikten de yöneticinin yapımını sağlayacağı yeni paket sayısı bulunacaktır.

Geri dönen bir paket için üç maliyet unsuru sözkonusudur. Bunlar;

D : Depositin geri ödenmesi,

C₁ : Yıpranmış bir paketin tamir maliyeti,

C₃ : Kullanışsız bir paketin atılması maliyeti olsun.

i'inci bölge için bulunan P_i^2 , P_i^3 ve $\Pi^x(O)$ hatırlanırsa, ilgili

bölgeye gönderilen bir paketin beklenen maliyeti, Y_{i1}

$$Y_{i1} = \pi_i^x(O) D + C_1 P_i^2 + C_2 P_i^3$$

olur. Aynı şekilde, Y_{i2} , i'inci bölgeden dönen yabancı bir paketin beklenen maliyeti,

$$Y_{i2} = D + C_1 P_i^5 + C_2 P_i^6$$

olarak bulunur.

Yukarıda açıklanan yaklaşımla, belirtilen koşullar altında, karar süreci belirsizlik ortamından olasılı ortama dönüştürülmüştür. Daha ucuz daha dayanıklı paket yapımı bir teknolojik sorun olduğundan çalışmada bu duruma değinilmemiştir.

Sistemin tümü için geliştirilecek eniyileme modellerinde, paket dönüşlerine ilişkin bulunan bu parametreler doğrudan kullanılabilir özelliktedir. Pazarlama, üretim ve benzeri süreçlerde sözkonusu olabilecek değişimler için sistemin tümü birlikte düşünülecektir.

VI. UYGULAMA

Yukarıda genel olarak açıklanan model, Eskişehir Eti Bisküi Fabrikasında karşılaşılan sorunların çözümü için geliştirilmiştir. Aşağıda sözkonusu firmanın bir satış bölgesindeki kutu akışlarına ilişkin bulunan değerler verilmiştir.

Ele alınan bölgeden geri dönen kutuların marka ve kullanım durumlarına göre ayrımlarından;

$$\begin{array}{lll}
P^1 = 0,8006 & P^2 = 0,1226 & P^3 = 0,0768 \\
P^4 = 0,7068 & P^5 = 0,2016 & P^6 = 0,0916 \\
\bar{P} = 0,7106 & \bar{\bar{P}} = 0,2894 &
\end{array}$$

olasılıkları bulunmuştur.

Yapılan uygunluk sınamalarına göre, 0.05 anlam seviyesinde, incelenen bölgeden dönen kutuların koşullu olasılık dağılım fonksiyonu, $0 < x < 420$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{\Gamma(3,499) \cdot 1,285 \cdot 0,214}{(420)^{2,499} \cdot \Gamma(2,285) \cdot \Gamma(1,214)} X^{(420-X)}$$

olarak bulunmuştur.

İşletme aylık planlama yaptığından her t devresi 30 gün (1 ay) olarak alınmıştır. Bir ay pazardaki kutu için bir yaş olarak tanımlandığında, Markov Zincirinin durum uzayı,

$$S = \{0, 1, 2, 3, \dots, 14, K\}$$

olarak belirlenmiştir.

Dönen kutuların marka ve kullanım durumlarına ilişkin oranlar, bölgeye gönderilen dolu kutular ve dönen boş kutu sayıları üzerinde yapılan işlemlerle tanımlanan geçiş olasılıkları bulunmuştur. Elde edilen Markov Zinciri aşağıdaki gibidir.

Ele alınan bölgeye bırakılan bir kutunun eninde sonunda geri dönme olasılığı, yukarıdaki Markov Zincirinden,

$$\pi^x(0) = 0,7363026$$

ve diğer firmalara kayma olasılığı,

$$\pi^x(K) = 0,2635974$$

olarak bulunmuştur.

Geliştirilen Markov Zinciri, koşullu olasılık dağılım fonksiyonu, dönen kutuların ayrışım oranları ve diğer verilerin kullanımıyla, yukarıda «Sonuçlar» başlığında ilgilenilen değerler elde edilmiştir.

Modelin ayrıntılarıyla uygulaması ve çıktılarının eniyileme modellerinde kullanımı kaynak «1» de görülebilir.

KAYNAK

- 1) KARA, İmdat : «Optimal Product Mix and Distribution Policies For Packaged Bakery Products» Master Thesis, M.E.T.U., April - 1974.