

Atf için: Yurttaş S Ö, Atay A, 2021. Pseudo-Anosov Örgülerin Topolojik Entropisi ve Çekici Matrisler. Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 11(3): 2278-2289.

To Cite: Yurttaş S Ö, Atay A, 2021. Topological Entropy of Pseudo-Anosov Braids and Attracting Matrices. Journal of the Institute of Science and Technology, 11(3): 2278-2289.

Pseudo-Anosov Örgülerin Topolojik Entropisi ve Çekici Matrisler

Saadet Öykü YURTTAŞ¹, Arife ATAY^{1*}

ÖZET: Bu makalede, sonlu noktası çıkarılmış disk yüzeyinde tanımlı pseudo-Anosov tipinden örgülerin sonsuz bir ailesinin her bir üyesinin topolojik entropisi π_1 - train track grafikleri yardımıyla hesaplanmıştır. Kullanılan yöntem Thurston'ın yüzey homeomorfizmaları kuramına dayanmakta ve ilgili pseudo-Anosov örgünün topolojik entropisini veren Dynnikov matrislere alternatif pozitif matrisler sunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Topolojik entropi, π_1 - train track grafikleri, pseudo-Anosov örgüler.

Topological Entropy of Pseudo-Anosov Braids and Attracting Matrices

ABSTRACT: In this paper, we introduce an alternative method to calculate the topological entropy of each member of an infinite family of pseudo—Anosov braids on the finitely punctured disk making use of π_1 - train tracks The method is based on Thurston's theory of surface homeomorphisms and presents positive matrices alternative to Dynnikov matrices which compute the topological entropy of a given pseudo-Anosov braid.

Keywords: Topological entropy, π_1 - train tracks, pseudo-Anosov braids.

¹ Saadet Öykü YURTTAŞ ([Orcid ID: 0000-0002-0262-1914](https://orcid.org/0000-0002-0262-1914)), Arife ATAY ([Orcid ID: 0000-0002-3373-8699](https://orcid.org/0000-0002-3373-8699)), Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Diyarbakır, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Arife ATAY, e-mail: arifea@dicle.edu.tr

GİRİŞ

D_n , n noktası işaretlenmiş disk olsun. Nielsen-Thurston Sınıflandırma Teoremine göre, her yüzey homeomorfizması ya sonlu mertebeden ya pseudo-Anosov ya da indirgenebilir tipten bir homeomorfizmaya izotoptur (Fathi ve ark. 1979; Thurston, 1988). Bu makalede, pseudo-Anosov tipinden izotopi sınıfları belli tipten train track grafikleri yardımıyla çalışılmıştır. D_n ' nin gönderim sınıfları grubu (D_n ' nin yön koruyan homeomorfizmalarının izotopi sınıflarının grubu) $GSG(D_n)$ Artin'in n -örgü grubuna izomorf olduğundan (Artin, 1925; Artin, 1947) izotopi sınıfları Artin örgü üreteçlerinin bir dizisi ile temsil edilmiştir. Daha açık olarak, makalede D_n ' de tanımlı pseudo-Anosov tipinden örgülerin sonsuz bir ailesinin her bir üyesinin topolojik entropisi, π_1 - train track grafikleri yardımıyla hesaplanmıştır.

Bu örgü ailesi daha önce Bestvina-Handel train-track geçiş matrisleriyle (Bestvina ve Handel, 1995) ve train-track geçiş matrislerine göre hesaplanması çok daha hızlı olan Dynnikov matrisleriyle (Yurttaş, 2016) çalışılmıştır. Daha sonra bir pseudo-Anosov örgünün invaryant ölçülü yapraklanmalarına ilişkin tekil noktalarının belirlediği bazı koşullar altında train-track geçiş matrisleri ve Dynnikov matrislerinin 1 in kökleri ve sıfırlar dışında özdeğer kümelerinin aynı olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuç, pseudo-Anosov örgülerin dinamiksel özelliklerini train-track geçiş matrisleri dışında çalışan ilk yaklaşım olmasının yanında çok daha hızlı çalışan bir algoritma sunmuştur. Ancak, train-track ve Dynnikov matrislerinin boyutlarının farklı olması durumunda ilgili sonuç açık problem olarak bırakılmıştır.

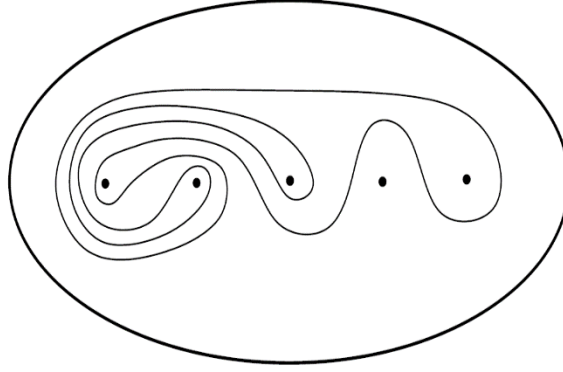
Bu makalede, yukarıda bahsedilen sonsuz örgü ailesinin topolojik entropisini hesaplamak için, Dynnikov matrisler kadar hızlı hesaplanabilen ve train-track geçiş matrisleri ile aynı boyutta olan pozitif matrisler tanıtılmıştır. Böylece, sonsuz örgü ailelerinin her bir üyesinin topolojik entropisini hesaplayan alternatif bir metot vermenin yani sıra yukarıda bahsedilen açık problemin çözümüne katkıda bulunabilecek matrisler sunulmuştur.

Makalede kullanılan metot, Thurston'ın yüzey homeomorfizmaları kuramına dayanmaktadır (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988). Bulgularımızın ispatı için kullanacağımız Thurston'ın ilgili teoremleri, Dynnikov koordinat sistemi ve train track grafikleri diğer temel tanım ve gösterimler ile birlikte ikinci bölümde verilmiştir. Üçüncü bölüm bulgularımızı içermektedir. Daha açık olarak, çalışılan sonsuz örgü ailesinin her bir üyesinin dilatasyonu (dolayısıyla topolojik entropisi), çekici lineer bölgelerde etki eden matrisler aracılığı ile hesaplanmış; elde ettiğimiz bulguların gelecekte ilgili problemlere nasıl ışık tutabileceği açıklanmıştır.

MATERYAL VE METOT

Dynnikov Koordinat Sistemi ve π_1 – Train Track Grafikleri

D_n ($n \geq 3$), düzlemde n -noktası çıkarılmış (n adet işaretlenmiş noktalı) bir disk olsun. D_n de birbirleriyle kesişmeyen sonlu sayıda basit kapalı *esas eğrinin* (büzülemeyen, bir tek işaretlenmiş nokta veya diskin sınırına paralel olmayan eğri) homotopi sınıflarının oluşturduğu aileye D_n 'de bir *çoklu eğri* denir (Şekil 1).

Şekil 1. D_5 ' de bir çoklu eğri

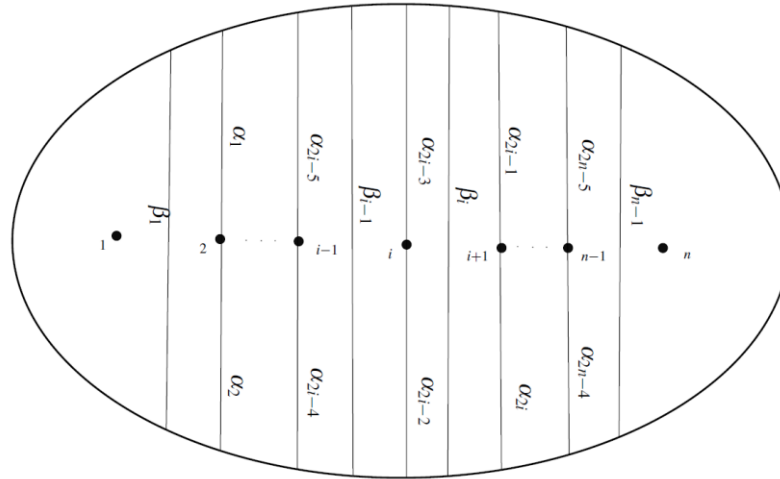
D_n ' nin Şekil 1'de gösterilen standart bir modelini alalım (n adet işaretlenmiş noktanın diskin yatay ekseninde yer aldığı). D_n ' de tanımlı çoklu eğrileri koordinatlandırmanın kullanışlı bir yolu Dynnikov koordinat sistemini kullanmaktır (Dynnikov, 2002; Dynnikov, 2007; Hall, 2009; Yurttaş, 2016). \mathcal{L}_n , D_n 'de tanımlı çoklu eğrilerin kümesini gösterebilir. Şimdi, her $n \geq 3$ için, \mathcal{L}_n ile $\mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon veren Dynnikov Koordinat Sistemi'ni tanımlayalım: Uç noktaları işaretlenmiş noktalar ve diskin sınırında olan α_i ($1 \leq i \leq 2n - 4$) yayları ve her iki uç noktası diskin sınırında olan β_i ($1 \leq i \leq n - 1$) yaylarını düşünelim (Şekil 2). $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ çoklu eğrisinin α_i ve β_i yaylarını minimum sayıda kesen bir *minimal* temsilcisi olsun. Kolaylık olması açısından, α_i ve β_i aynı zamanda, L nin sırasıyla α_i ve β_i yayları ile olan kesişim sayılarına karşılık gelsin.

Dynnikov koordinat fonksiyonu $\rho: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$, $1 \leq i \leq n - 2$ olmak üzere

$$a_i = \frac{\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1}}{2} \quad \text{ve} \quad b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2} \dots \dots \dots (1)$$

$$\rho(\mathcal{L}) = (a, b) = (a_1, \dots, a_{n-2}; b_1, \dots, b_{n-2}) \quad (2)$$

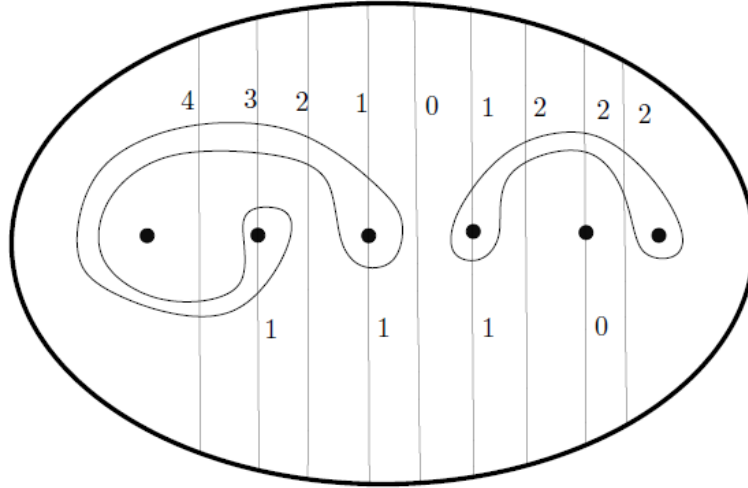
olarak tanımlanır.

Şekil 2. α_i ve β_i yayları

Örnek: Şekil 3' de verilen \mathcal{L} çoklu eğrisini düşünelim. $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = 1, \alpha_7 = 2, \alpha_8 = 0$ ve $\beta_1 = 4, \beta_2 = 2, \beta_3 = 0, \beta_4 = 2, \beta_5 = 2$ olduğundan (1) denkleminde

$$a_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = -1 \quad \text{ve} \quad b_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = 1 \quad (3)$$

olarak bulunur. Geri kalan a_i ve b_i koordinatları benzer şekilde hesaplanır. Sonuç olarak, \mathcal{L} 'nin Dynnikov koordinatları $\rho(\mathcal{L}) = (-1, 0, 0, -1; 1, 1, -1, 0)$ dır.



Şekil 3. $\rho(\mathcal{L}) = (-1, 0, 0, -1; 1, 1, -1, 0)$

Aşağıdaki Yardımcı Teorem, $\rho: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$, Dynnikov koordinat fonksiyonunun tersini vermektedir (Hall, 2009; Yurttaş, 2016). Yani, $(a, b) \in \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$ Dynnikov koordinatlarından α_i ve β_i yayları üzerindeki kesişim sayılarını (dolayısıyla ilgili çoklu eğriyi) bulan formüller vermektedir.

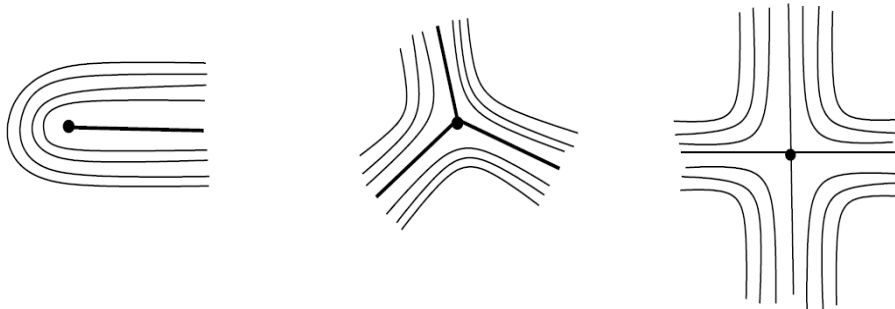
Yardımcı Teorem (Hall, 2009; Yurttaş, 2016): $(a, b) \in \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$ vektörü verilsin. $\lceil x \rceil$, x den küçük olmayan en küçük tamsayıyı göstermek üzere $(a, b) \in \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$, kesişim sayıları aşağıda verilen bir ve yalnız bir $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ çoklu eğrisine karşılık gelir.

$$\beta_i = 2 \max_{1 \leq k \leq n-2} [|a_k| + b_k^+ + \sum_{j=1}^{k-1} b_j] - 2 \sum_{j=1}^{i-1} b_j \quad (4)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} (-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + \frac{\beta_{\lceil i/2 \rceil}}{2} : & b_{\lceil i/2 \rceil} \geq 0 \\ (-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + \frac{\beta_{1+\lceil i/2 \rceil}}{2} : & b_{\lceil i/2 \rceil} \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

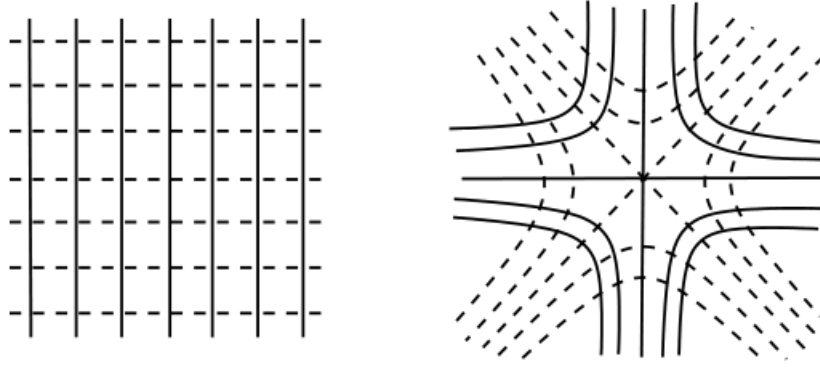
Tanım 1: D_n ' de bir \mathcal{F} tekil yapraklanması, D_n ' nin yaprak adı verilen birbirinden ayrık yol bağlantılı alt kümelerine bir ayrışımıdır öyle ki, $l \in \mathcal{F}$ de bir yaprak olmak üzere, tekil nokta olmayan her $x \in D_n$ noktası $U \cap l$ kümesini \mathbb{R}^2 'de yatay doğrulara taşıyan bir $\theta: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ haritası tarafından kapsanır.

Başlangıçlı tekil nokta olan yaprak parçalarına *çatal* adı verilir ve tekil noktalar çatal sayılarına göre sınıflandırılır. p –çatalı tekil nokta civarında yapraklar lokal olarak Şekil 4' te gösterildiği gibi davranır ve 1 –çatalı tekil noktalar sadece işaretlenmiş noktalarda olabilir (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988; Yurttaş, 2016).



Şekil 4. 1-çatal, 3-çatal, 4-çatalı tekil noktalar civarında yapraklanmalar

Tanım 2: D_n ' de tüm p –çatalı tekil noktaları ortak olan ve tekil noktalar civarında yapraklanmaların Şekil 5'te gösterildiği gibi olduğu iki tekil yapraklanmaya *çaprazdır* denir.



Şekil 5. Çapraz yapraklanmalar

Ayrıca, D_n 'de bir α yayı verilen bir \mathcal{F} yapraklanmasını çapraz olarak kesiyor ve p tekil noktasına farklı bölgelerden girip çıkıyorsa α , \mathcal{F} 'ye çaprazdır denir (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988; Yurttaş, 2016).

Tanım 3: D_n 'de çapraz ölçüm adı verilen aşağıdaki koşulları sağlayan μ fonksiyonu ile donatılmış \mathcal{F} tekil yapraklanmasına ölçülü yapraklanma denir ve (\mathcal{F}, μ) ile gösterilir (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988; Yurttaş, 2016).

- μ , her çapraz α yayına bir $\mu(\alpha) \in \mathbb{R}^+$ pozitif sayısı atar.
- α_1 ve α_2 çapraz yayları, uç noktaları aynı yapraklar üzerinde olan diğer çapraz yaylar aracılığı ile birbirine izotop ise $\mu(\alpha_1) = \mu(\alpha_2)$ 'dir.
- $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ ve $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \partial\alpha_1 \cap \partial\alpha_2$ ise $\mu(\alpha) = \mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2)$ 'dir.

Tanım 4: (\mathcal{F}, μ) , D_n 'de ölçülü bir yapraklanma olsun. α yayının ölçüsü α 'nın tüm sonlu sayıda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ çapraz alt yayları için $\mu(\alpha) = \sup \sum_{i=1}^k \mu(\alpha_i)$ olarak tanımlanır. $[\alpha]$, α yayının izotopi sınıfı ve infimum α 'ya izotop olan tüm β yayları üzerinden alınmak üzere $\mu[\alpha] = \inf \mu(\beta)$ olarak verilir.

\mathcal{MF}_n , D_n 'de tanımlı ölçülü yapraklanmalar uzayı olsun (izotopi ve Whitehead eşitliği altında). $k > 0$ olmak üzere $(\mathcal{F}, k\mu)$ yapraklanması (\mathcal{F}, μ) ile aynı yaprakları paylaşan ve her çapraz α yayına $k\mu(\alpha)$ ölçüsü atayan bir ölçülü yapraklanmadır. Projektif ölçülü yapraklanmalar uzayı \mathcal{PMF}_n , her $k > 0$ için $(\mathcal{F}, k\mu)$ ile (\mathcal{F}, μ) yapraklanmalarının aynı denklik sınıfında olduğu bölüm uzayıdır (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988; Yurttaş, 2016).

Uyarı: Dynnikov koordinat fonksiyonu doğal bir şekilde ölçülü yapraklanmalar uzayına genelleştirilebilir: Ölçülü yapraklanmalar, Tanım 4'de verildiği gibi her α_i ve β_i yayına $\mu(\alpha_i), \mu(\beta_i) \in \mathbb{R}^+$ sayıları tayin eder ve buradan, $\rho: \mathcal{MF}_n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4} \setminus \{0\}$ birebir ve örten fonksiyonu elde edilir.

Çoklu eğrileri ve ölçülü yapraklanmaları koordinatlandırmanın alternatif bir yolu ölçülü train track grafiklerini kullanmaktır (Bestvina ve Handel, 1995).

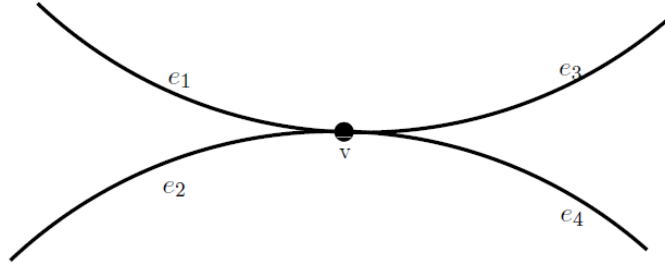
Tanım 5: D_n 'de τ ölçülü train track grafiği, köşeler ve kenarlardan oluşan, her bir köşesinde bir ve yalnız bir teğet vektörü olan ve aşağıdaki koşulları sağlayan 1-boyutlu CW komplekstir.

$D_n - \tau$ tümleyeninde her bir bileşen ya kenar sayısı bir veya birden daha büyük olan 1 işaretlenmiş noktalı bir çokgen ya da işaretlenmiş nokta içermeyen bir çokgendir (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988; Yurttaş, 2016).



Şekil 4. Bir işaretlenmiş noktalı 1-gen, işaretlenmiş nokta içermeyen üçgen ve dörtgen

τ ' nun her bir v köşesindeki teğet vektörünün yönü sabitlenerek v 'ye bitişik bir kenarın yönü ilgili teğet vektörünün yönüyle aynı ise o köşe için *gelenkenar*, aksi takdirde *gidenkenar* olarak adlandırılır. Buna göre, τ ' nun her bir e kenarına negatif olmayan $\mu(e)$ sayısı (e 'nin ölçüsü) tayin eden ve her bir köşede gelen kenarlar üzerindeki ölçülerin toplamının, gidenkenarlar üzerindeki ölçülerin toplamına eşit olduğu μ *çapraz ölçü fonksiyonu* tanımlıdır (Şekil 5).

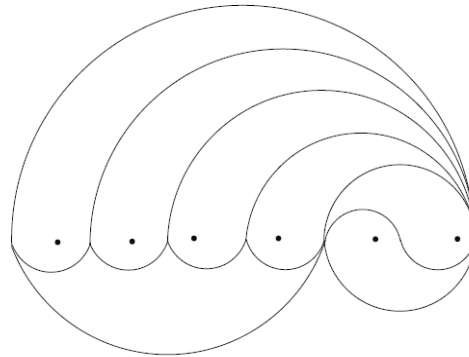


Şekil 5. $\mu(e_1) + \mu(e_2) = \mu(e_3) + \mu(e_4)$

Bu makalede π_1 -train track grafikleri kullanılmıştır (Şekil 6).

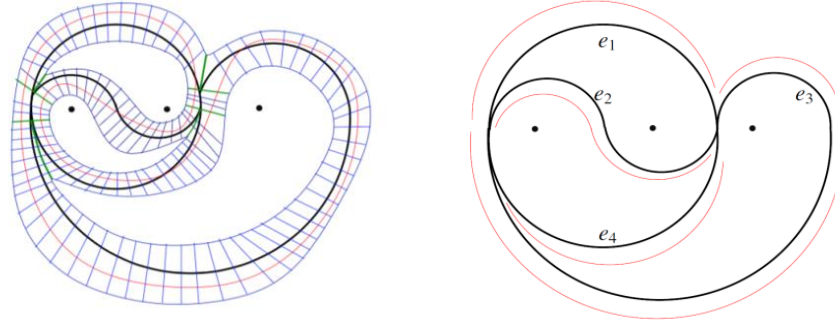
Tanım 6: (π_1 -Train Track Grafiği)

x_i ($0 \leq i \leq n$), D_n ' nin i -inci işaretlenmiş noktası ile $i + 1$ -inci işaretlenmiş noktası arasındaki aralık olsun. τ , π_1 -train track grafiği Şekil 6' da gösterildiği gibi her x_i aralığında en fazla bir köşesi bulunan ve x_i ile x_j aralıklarındaki köşeleri birleştiren bir ve yalnız bir kenarı olan bir train track grafiğidir. Ayrıca, x_i aralığında biri diskin üst yarısından diğeri altından gelen toplamda iki adet yay varsa burada köşe yoktur (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988; Yurttaş, 2016).



Şekil 6. D_6 ' da bir π_1 -train track grafiği

Tanım 7: D_n ' de \mathcal{L} çoklu eğrisi ve τ train track grafiği verilsin. τ ' nun Şekil 7'de gösterildiği gibi N lifli komşuluğunu düşünelim. \mathcal{L} ' nin homotopi sınıfında N deki her bir life çapraz olan bir temsilcisi varsa \mathcal{L} , τ tarafından taşınıyor denir ve $\mathcal{L} < \tau$ olarak gösterilir. $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ çoklu eğrisinin τ train track koordinatları, her bir girişinin τ nun ilgili kenarına paralel eğri parçalarının sayısına eşit olduğu bir vektördür. Örneğin, Şekil 7'de resmedilen kırmızı eğrinin train track koordinatları $(\mu(e_1), \mu(e_2), \mu(e_3), \mu(e_4)) = (1, 1, 1, 1)$ ' dir (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988; Yurttaş, 2016).



Şekil 7. τ 'nun lifli komşuluğu ve τ tarafından taşınan bir eğrinin train track koordinatları

$$(\mu(e_1), \mu(e_2), \mu(e_3), \mu(e_4)) = (1, 1, 1, 1).$$

Uyarı: (\mathcal{F}, μ) ölçülü yapraklanmasının τ train track grafiği tarafından taşınması benzer şekilde tanımlanır ve (\mathcal{F}, μ) 'nun τ train track koordinatları (\mathcal{F}, μ) tarafından e_i train track kenarlarına atanan $\mu(e_i) \in \mathbb{R}^+$ ölçülerinden oluşan vektördür.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Pseudo-Anosov Örgüler İçin Topolojik Entropi

Bu bölümde, pseudo-Anosov örgülerin topolojik entropilerini hesaplamak için çekici matris olarak adlandıracağımız pozitif matrisler tanıtılacaktır. Bu matrislerin mutlak değerce en büyük olan özdeğeri ilgili örgünün dilatasyonunu dolayısıyla topolojik entropisini vermektedir. Aşağıda, pseudo-Anosov homeomorfizmaların daha detaylı bir tanımı ve Thurston'ın pseudo-Anosov homeomorfizmaları ile ilgili ihtiyaç duyacağımız bazı önemli teoremleri verilmiştir (Fathi ve ark.1979; Thurston, 1988).

Teorem 1 (Nielsen-Thurston): $f: D_n \rightarrow D_n$ homeomorfizması ya sonlu mertebeye, ya pseudo – Anosov ya da indirgenebilir tipten bir homeomorfizmaya izotoptur.

Teorem 1, f pseudo-Anosov tipinden bir homeomorfizmaya izotop ise sonlu mertebeden veya indirgenebilir tipten bir homeomorfizmaya izotop olamayacağını belirtmektedir.

İndirgenebilir, sonlu mertebeden veya pseudo-Anosov tipinden bir homeomorfizmanın kuvvetleri de sırasıyla indirgenebilir, sonlu mertebeden veya pseudo-Anosov tipindedir.

$f: D_n \rightarrow D_n$ homeomorfizması verilsin. Eğer bir $n > 0$ tamsayısı için $f^n = Id$ (birim fonksiyon) oluyorsa f 'ye *sonlu mertebededir* denir. Eğer verilen bir $A = \{L_1, L_2, \dots, l_k\}$ çoklu eğri ailesi için $f(L_i) = L_j$ oluyorsa g 'ye *indirgenebilir* denir. Bu makalede, aşağıda detaylı tanımı verilen pseudo-Anosov tipinden homeomorfizmalar çalışılmıştır.

Tanım 8: $f: D_n \rightarrow D_n$ homeomorfizması için $f(F_s, \mu_s) = (F_s, (1/\lambda)\mu_s)$ ve $f(F_u, \mu_u) = (F_u, \lambda\mu_u)$ olacak şekilde (F_s, μ_s) ve (F_u, μ_u) çapraz ölçülü yapraklanmaları ve $\lambda > 1$ sayısı var ise f pseudo –Anosov tipindedir denir. (F_s, μ_s) ve (F_u, μ_u) ikilileri sırasıyla f 'nin durağan ve durağan olmayan ölçülü yapraklanmaları, $\lambda > 1$ sayısı ise f 'nin dilatasyonu olarak adlandırılır (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988; Yurttaş, 2016).

Her f pseudo-Anosov homeomorfizması için lokal olarak $\mu = \mu_s \otimes \mu_u$ olarak verilen bir f - invariant ölçüsü vardır. μ , pozitif sabitlerle çarpıma göre belirlendiğinden $\mu_s \otimes \mu_u(M) = 1$ alabiliriz. Bu durumda detaylı ispatı (Fathi ve ark.1979)'da verilen Teorem 2'yi elde ederiz.

Tanım 9: $[\alpha]$ ve $[\beta]$ herhangi iki eğrinin izotopi sınıfı olmak üzere $i([\alpha], [\beta])$ geometrik kesişim sayısı $[\alpha]$ ve $[\beta]$ 'nin izotopi sınıflarından alınan iki eğrinin minimum kesişim sayısıdır (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988; Yurttaş, 2016).

Teorem 2: $f: D_n \rightarrow D_n$ pseudo-Anosov homeomorfizması verilsin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i(f^n([\alpha]), [\beta])}{\lambda^n} = \mu_u[\alpha]\mu_s[\beta] \text{ dir.} \quad (6)$$

İspat. (Fathi ve ark.1979)'ye bakınız.

Dolayısıyla, α 'nın verilen bir β eğrisi ile olan geometrik kesişim sayısı f homeomorfizması altında λ^n olarak büyür.

Teorem 3, Teorem 2'nin doğrudan bir sonucudur ve herhangi bir α esas eğrisinin pseudo-Anosov tipinden bir homeomorfizma ötelemesi altında durağan olmayan çapraz yapraklanmaya yakınsadığını söylemektedir (Fathi ve ark.1979).

Teorem 3 (Thurston, 1988): $f: D_n \rightarrow D_n$ pseudo-Anosov homeomorfizması verilsin. $[F_s, \mu_s]$ ve $[F_u, \mu_u]$ durağan ve durağan olmayan ölçülü yapraklanmaların projektif sınıflarını gösterebilir. Keyfi bir α esas eğrisi için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n[\alpha] = [F_u, \mu_u] \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}[\alpha] = [F_s, \mu_s] \quad (7)$$

sağlanır.

İspat. (Fathi ve ark.1979)'ye bakınız.

$T(D_n)$ Teichmüller uzayı açık bir topolojik toptur ve projektif ölçülü yapraklanmalar uzayı $PM\mathcal{F}_n$ foliasyonların uzayı $T(D_n)$ 'nin sınırını oluşturur $T(D_n)$ 'nin kapanışı $GSG(D_n)$ 'nin sürekli olarak etki ettiği bir kapalı toptur ve Brouwer Sabit Nokta Teoremi'ne göre her f homeomorfizmasının izotopi sınıfının $T(D_n)$ de bir sabit noktası vardır. f pseudo-Anosov tipinden ise tam olarak iki sabit noktası vardır ve bunlar $PM\mathcal{F}_n$ uzayında yer alırlar (Fathi ve ark.1979, Thurston 1988).

Teorem 4: $f: D_n \rightarrow D_n$ pseudo-Anosov homeomorfizmasının $PM\mathcal{F}_n$ uzayında tam olarak iki sabit noktası vardır ve bunlar $[F_s, \mu_s]$ ve $[F_u, \mu_u]$ sınıflarıdır.

İspat. f 'nin herhangi bir kuvveti bir çoklu eğriyi sabitleyemez. Öyle olsaydı, f indirgenabilir olurdu ki bu Teorem 1 gereği mümkün değildir. f 'nin Teichmüller Uzayı'nın kapanışında bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta $PM\mathcal{F}_n$ projektif uzayının bir $[F, \mu]$ elemanıdır. Diğer bir deyişle, $f(F, \mu) = (F, k\mu)$, olacak şekilde $k > 0$ vardır. Buradan, F kompakt yaprak içermeyen (yani iki singüleriteyi bağlayan yaprak) bir yapraklanmadır. Aksi takdirde, f nin aşık olmayan bir kuvveti bir çoklu eğriyi sabitleyebilir ki bu mümkün değildir (f indirgenebilir değildir). Üstelik $k \neq 1$ dir çünkü $k = 1$ olsaydı f sonlu mertebeden olurdu. $k > 1$ olduğunu varsayalım. $k < 1$ durumu benzer şekilde ispatlanabilir. O zaman, f homeomorfizmasını bir $[F, \mu]$ yapraklanmasını durağan olmayan ölçülü yapraklanması olarak kabul eden bir f' homeomorfizmasına izotop edebiliriz. Teorem 3'ü hem f hem de f' ne uygularsak.

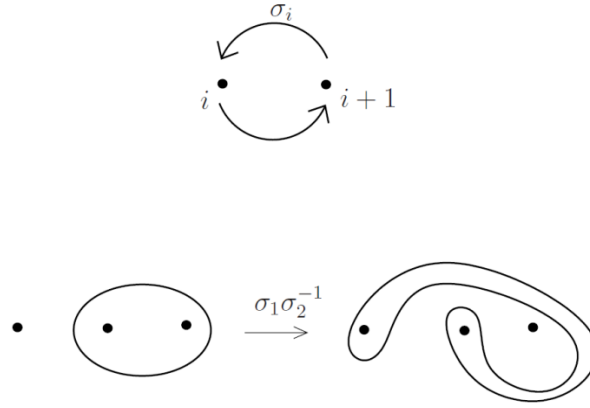
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n[\alpha] = [F_u, \mu_u] \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} (f')^n[\alpha] = [F, \mu] \quad (8)$$

elde ederiz. f ve f' izotop olduklarından $[F_u, \mu_u] = [F, \mu]$ bulunur. $k < 1$ durumu da $[F_s, \mu_s] = [F, \mu]$ olduğunu verir.

Teorem 5: Gönderim sınıfları grubu $GSG(D_n)$ 'nin $PM\mathcal{F}_n$ uzayındaki etkisi kısmi lineerdir ve her kısmi lineer bölgedeki etkisi tamsayı girişleri olan matrislerle temsil edilir.

İspat. (Penner ve Harer, 1992)'ye bakınız.

$GSG(D_n)$, Artin'in örgü grubuna izomorf olduğundan (Artin, 1925; Artin, 1947) izotopi sınıfları i -inci Artin örgü üreteçleri σ_i, σ_i^{-1} ($1 \leq i \leq n - 1$) cinsinden ifade edilir. Burada σ_i , i -inci işaretlenmiş nokta ile $i + 1$ -inci işaretlenmiş noktanın yerini saat yönünün tersinde değiştiren homeomorfizmanın izotopi sınıfına karşılık gelmektedir (Şekil 8).



Şekil 8. σ_i ve bir esas eğrinin $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ örgüsü altındaki görüntüsü

Bir izotopi sınıfının dolayısıyla D_n 'de bir örgünün topolojik entropisi, sınıfındaki homeomorfizmaların topolojik entropilerinin minimumuna eşittir. İzotopi sınıfı pseudo-Anosov tipinden olduğunda sınıftaki her pseudo-Anosov homeomorfizmanın entropisi minimum değerdedir ve $\log(\lambda)$ ya eşittir (Fathi ve ark.1979).

Pseudo-Anosov Örgü Aileleri İçin Topolojik Entropi

Bu bölümde pseudo-Anosov tipinden örgüleri içeren sonsuz örgü ailelerinin her bir üyesinin topolojik entropisini hesaplayan Dynnikov matrislere alternatif pozitif matrisler tanıtılacaktır. Uygulanacak yöntem daha önce (Yurttaş, 2016)'da Dynnikov koordinatlarıyla ve train-track geçiş matrisleri ile çalışılmış olan $\beta_n = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^{-1} \in \beta_n$; $n > 1$ ailesidir. Yöntem, Thurston'un bir önceki bölümde verilen üç temel teoremine dayanmaktadır ve kabaca şu şekilde açıklanabilir: β_n ailesinin her bir üyesi pseudo-Anosov tipinden olduğundan (Fathi ve ark., 1979; Thurston, 1988) Teorem 4 gereği ilgili örgünün $PM\mathcal{F}_n$ uzayındaki sabit noktaları örgünün çapraz invaryant ölçülü yapraklanmalarının projektif sınıfları $[F_s, \mu_s]$ ve $[F_u, \mu_u]$ dır ve $PM\mathcal{F}_n$ 'deki eğriler Teorem 3 gereği $[F_u, \mu_u]$ durağan olmayan ölçülü yapraklanmasına yakınsar. Teorem 5'te belirtildiği gibi $GSG(D_n)$ 'nin $PM\mathcal{F}_n$ uzayındaki etkisi kısmi lineerdir ve lokal olarak tamsayı girişli matrislerle temsil edilir. Dolayısıyla, $PM\mathcal{F}_n$ uzayında $[F_u, \mu_u]$ sınıfını içeren her bölgede etki eden matrisin $\lambda > 1$ özelliğinde bir özdeğeri olmalıdır ve bu özdeğere ilişkin özvektör $[F_u, \mu_u]$ noktasına karşılık gelir. Sonuç olarak, $PM\mathcal{F}_n$ uzayında $GSG(D_n)$ 'nin etkisi hesaplanır ve $\lambda > 1$ özelliğinde özdeğeri olan bir matrisin özvektörü ilgili lineer parçada kapsanır ise bulunan özvektör $[F_u, \mu_u]$ noktasına ve $\lambda > 1$ sayısı örgünün dilatasyonuna (dolayısıyla topolojik entropisine) karşılık gelir. Daha önce Dynnikov koordinatları ile gerçekleştirilmiş bu yöntemi, π_1 -train track grafiklerine uygulayarak $[F_u, \mu_u]$ noktasını içeren ve çekici lineer bölge olarak adlandırılan bölgelerde etki eden pozitif matrisler tanıtılmıştır.

Tanım 10: $\gamma \in B_n$ pseudo-Anosov örgüsü verilsin. $PM\mathcal{F}_n$ uzayında (F_u, μ_u) durağan olmayan ölçülü yapraklanmasının $[F_u, \mu_u]$ projektif sınıfını içeren lineer bölgeye γ örgüsünün çekici lineer bölgesi, bu bölgede etki eden matrise γ 'nın *çekici matrisi*, (F_u, μ_u) 'yu taşıyan π_1 -train track grafiğine *çekici train track grafiği* denir. $[F_u, \mu_u]$ projektif sınıfı γ için *çekici sabit nokta* olarak adlandırılır.

Tanım 11: $PM\mathcal{F}_n$ uzayında $\gamma \in B_n$ pseudo-Anosov örgüsüne ilişkin *çekici train track grafiği* τ 'nin her bir e dalı için $\mu(e) \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan basit kapalı eğriye τ 'nin *taban eğrisi* denir. τ 'ya ilişkin taban eğrilerinin gerdiği uzay $SP(\tau)$ olarak gösterilir.

Teorem 6'da görüleceği gibi $\beta_n = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^{-1}$ örgü ailesinin her bir üyesi için çekici train track grafiğine ilişkin $SP(\tau)$ uzayı çekici lineer bölgeye eşittir. Dolayısıyla, taban eğrilerin görüntüleri

taban eğrilerinin belirli lineer bileşimleri olup, çekici matrislerin girişleri bu lineer bileşimlerdeki katsayılarla karşılık gelmektedir.

Bir örgü ailesinin her bir üyesinin topolojik entropisini hesaplamak için kullanılan yaklaşım ailede yeteri kadar örgünün train track grafiğini hesaplayarak genel bir örüntü elde etmek ve böylece iddia edilen örüntünün gerçekten de ailedeki her bir örgü için sağlandığını ispatlamaktır. Buradaki yaklaşım da benzerdir. Daha açık olarak, $[F_u, \mu_u]$, β_n ' nin PMF_n üzerindeki etkisine karşılık gelen çekici sabit nokta olduğundan nümerik olarak koordinatlarını bulmak kolaydır. Bunun için Dynn.exe programı (Hall, <http://www.maths.liv.ac.uk/~tobyhall/software/>) kullanılmıştır.

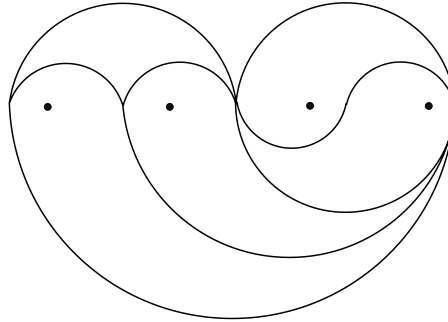
SONUÇ

Teorem 6: $n > 3$ olsun. $\beta_n = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^{-1}$ örgüsü pseudo-Anosov tipindedir ve dilatasyonu

$$f_n(x) = x^n - 2x^{n-1} - 2x + 1 \quad (9)$$

polinomunun $(1, \infty)$ aralığındaki bir ve yalnız bir köküne eşittir.

İspat. Öncelikle $f_n(1) = -2$ olduğundan f_n ' nin bir $\lambda > 1$ kökü vardır. Bu kökün $\beta_n = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^{-1}$ için dilatasyona karşılık geldiğini göstereceğiz. $\beta_n = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \in B_n$ örgüsü ile başlayalım. Dynn.exe programı (Hall, <http://www.maths.liv.ac.uk/~tobyhall/software/>) kullanılarak $[F_u, \mu_u]$ durağan olmayan ölçülü yapraklanmasını taşıyan π_1 -train track grafiği Şekil 9'da verilmiştir.



Şekil 9. $\beta_n = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}$ örgüsü için çekici train track grafiği

Tanım 10 gereği τ için doğal taban eğrileri

$$\rho(v_1) = (1, 1; 0, 1) \quad \rho(v_2) = (0, 1; 1, 1)$$

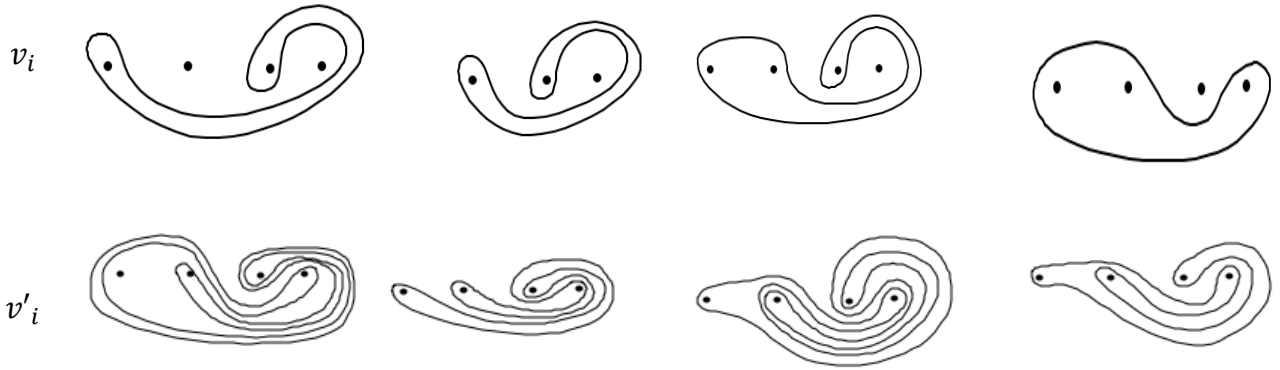
$$\rho(v_3) = (0, 1; 0, 1) \quad \rho(v_4) = (0, 1; 0, 0)$$

koordinatları ile verilir. Bu eğrilerin $\beta_n = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}$ altındaki görüntüleri

$$\rho(v'_1) = (0, 3; -1, -2) \quad \rho(v'_2) = (1, -2; -1, -2)$$

$$\rho(v'_3) = (0, -3; -2, -2) \quad \rho(v'_4) = (0, -2; -1, -1)$$

olarak bulunur. Şekil 10'da görüldüğü üzere v_1, v_2, v_3, v_4 eğrilerinin görüntüleri de τ tarafından taşındığından $\beta_n = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}$ için çekici lineer bölge $SP(\tau)$ uzayının kendisidir. Bu uzayda etki eden çekici matrisi hesaplamak için taban elemanları ve görüntüleri kıyaslanarak



Şekil 10. $\beta_n = \sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}$ örgüsü için doğal taban eğrileri

$$v'_1 = v_2 + v_3 + v_4$$

$$v'_2 = v_1 + v_2$$

$$v'_3 = 2v_2 + v_4$$

$$v'_4 = v_2 + v_4$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\beta_n = \sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}$ için çekici matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisin $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x + 1$ karakteristik polinomunun 1'den büyük bir kökü

$\lambda \approx 2,296$ olarak bulunur. Bu özdeğere karşılık gelen özvektör $v^u \approx (-0.59, 0.45; 0.55, 0.35)$ yine τ

tarafından taşındığından (F_u, μ_u) durağan olmayan ölçülü yapraklanmasının train track koordinatlarıdır. Yukarıdaki yaklaşım $n > 4$ için tekrarlanarak $[F_u, \mu_u]$ durağan olmayan ölçülü yapraklanmasının taşındığı train track grafiğinin taban eğrilerinin görüntülerinin yine aynı train track grafiği tarafından taşındığı elde edilmiştir. Daha açık olarak, $\beta_n = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^{-1}$ ailesinin yeteri kadar üyesi için yapılan testlerde çekici lineer bölgenin $SP(\tau)$ uzayı olduğu ve v_1, v_2, \dots, v_n taban eğrilerinin görüntülerinin

$$v'_{-j} = \begin{cases} v_n + v_{n-1} + v_{n-2}; & j = 1 \\ v_{j-1} + v_{n-2}; & 2 \leq j \leq n-2 \\ 2v_{n-2} + v_n; & j = n-1 \\ v_{n-2} + v_n; & j = n \end{cases}$$

kuralına uyduğu gözlemlenmiştir. Yukarıdaki kural ile belirlenen matrisin karakteristik polinomu $f_n(x) = x^n - 2x^{n-1} - 2x + 1$ biçimindedir. Gerçekten de, $k = n - 2$ için çekici matrisin karakteristik polinomunun $f_{n-1}(x) = x^{n-1} - 2x^{n-2} - 2x + 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman gerekli satır ve sütün elemanter işlemleri altında $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alt matrisinin karakteristik polinomu olmak üzere $f_n(x) = f_{n-1}(x) - x^{n-4}g(x)$ olarak elde edilir. Bu ise, $f_n(x) = x^n - 2x^{n-1} - 2x + 1$ demektir.

SONUÇ

Yukarıdaki yaklaşım, (F_u, μ_u) durağan olmayan ölçülü yapraklanmasını taşıyan çekici train track grafiği τ 'ya ilişkin $SP(\tau)$ uzayının çekici lineer bölgeye eşit olduğu tüm pseudo-Anosov örgüler için geçerlidir. Ayrıca, Perron-Frobenius Teoremi gereği elde edilen pozitif matrisler sadece topolojik entropi hesabı için değil, sembolik dinamik sistem oluşturarak ilgili örgünün sabit nokta sayısı, periyodik yörüngelerinin hesabı gibi diğer dinamiksel özelliklerinin elde edilmesi için de kullanılabilir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma DÜBAP (proje no FEN.17.021) tarafından desteklenmiştir

Çıkar Çatışması

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması yoktur.

Yazar Katkısı

Yazarlar bu çalışma için eşit oranda katkı sağlamıştır.

KAYNAKLAR

- Artin E, 1925 Theorie der Zöpfe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg (4): 47-72.
- Artin E, 1947 Theory of braids. Ann. of Math. (2), 48:101-126.
- Bestvina M and Handel M, 1995. Train-tracks for surface homeomorphisms. Topology, 34(1):109-140.
- Dynnikov I and Wiest B, 2007. On the complexity of braids. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 9(4):801-840.
- Dynnikov I, 2002. On a Yang-Baxter mapping and the Dehornoy ordering. Us-pekhi Mat. Nauk, 57(3(345)):151-152.
- Fathi A, Laudenbach F and Poenaru V, 1979. Travaux de Thurston sur les surfaces, volume 66 of Astérisque. Société Mathématique de France, Paris, Séminaire Orsay.
- Hall T and Yurttaş S.Ö, 2009. On the topological entropy of families of braids. Topology Appl., 156(8):1554-1564.
- Hall T. Software available for download from <http://www.maths.liv.ac.uk/~tobyhall/software/>.
- Penner R. C. and Harer J. L, 1992. Combinatorics of train tracks. Annals of Mathematics Studies, volume 125. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Thurston WP, 1988. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 19(2):417-431.
- Yurttaş SÖ, 2016. Dynnikov and train track transition matrices of pseudo-Anosov braids, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A, 36(1):109-140.