SIÇRAMALI DİFÜZYON MODELİNİN SÜREKLİ ZAMAN PORTFÖY SEÇİMİNE ETKİSİ: BORSA İSTANBUL ÜZERİNE BİR UYGULAMA*

Yrd.Doç.Dr. Özge Sezgin ALP**

Muhasebe Bilim
Dünyası Dergisi
Haziran 2015; 17 (2): 331-346

ÖZ

Finansal piyasalar anlık değişimlerin değişimlere bağlı olarak fiyat değişimlerinin yaşandığı piyasalardır. Bu nedenle son yıllarda yapılan çalışmalar, hisse senedi fiyatlarının modellenmesinde sürekli zamanlı stokastik modeller üzerine yoğunlaşmaktadır. Bu çalışmada, Sıçramalı Difüzyon ve Geometrik Brownian Hareketi Difüzyon modellerinin BIST-100 endeksi için kullanılabilirliği değerlendirilmiştir. Buna ek olarak, Markowitz'in ortalama-varyans-portföy seçim yönteminin sürekli zaman geliştirilmiş çözümleri Türkiye portföy örneği üzerinde uygulanmış ve sıçramalı modelinin portföy performansına etkisi incelenmiştir. Çalışmanın sonunda elde edilen bulgular, piyasada oluşan ani iniş ve çıkışlar nedeni ile Sıçramalı Difüzyon modelinin BIST-100 endeksi için daha uygun olacağını ortaya koymuştur.

Anahtar Kelimeler: Portföy Optimizayon, Stokastik, Geometrik Brownian Hareketi, Sıçramalı Difüzyon

JEL Sınıflandırması: C1,C6, G11, G17

EFFECT OF JUMP DIFUSION MODEL ON CONTINUOUS TIME PORTFOLIO SELECTION: BORSA İSTANBUL APPLICATION

ABSTRACT

In financial markets in stant price changes occurs therefore, the price changes may assumed to be continuous variables. This is why recent stock price modelling studies are using continuous time stochastic models. In this study, the Geometric Brownian Motion and Jump Diffusion models are evaluated to model BIST-100 index. In addition, Markowitz's mean-variance portfolio

* Makale gönderim tarihi: 26.01.2015; kabul tarihi: 03.04.2015

** Başkent Üniversitesi, Ticari Bilimler Fakültesi, Muhasebe ve Finansal Yönetim Bölümü, osezgin@hotmail.com

selection problem's continuous time solutions are applied and Jump Diffusion model performance is evaluated. As a result, it is concluded that the Jump Diffusion model is more suitable for BIST-100 index because of the sudden ups and downs in the market.

Keywords: Portfolio Optimization, Stochastic, Geometric Brownian Motion, Jump Diffusion

JEL Classification: C1,C6, G11, G17

1. GİRİŞ

Modern portföy teorisi için bir ilk olan ve portföy literatüründe en çok bilinen portföy seçim yöntemi Hary Markowitz (1952) tarafından ortaya atılan ortalama-varyans portföy optimizasyon yöntemidir. Bu yöntemde amaç belirli bir beklenen getiri seviyesinde varyansı yani riski minimize etmek veya belirli bir risk düzeyinde getiriyi maksimize etmektir. Markowitz'in çalışması uygulamada sağladığı kolaylık ve Sermaye Fiyatlandırma Modeline (CAPM) temel oluşturması sebebiyle özellikle uygulamacılar tarafından sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Markowitz'in çalışmasının tek periyotlu ve durağan bir yapıya sahip olması,finansal piyasaların sürekli değişimlerin yaşandığı piyasalar olması nedeni ile literatürdeki bir çok çalışmada eleştirilmiştir.Literatürde ortalama-varyans portföy optimizasyon problemini çok periyotlu ve sürekli zamanlı çözen bir çok çalışma bulunmaktadır. Live Ng (2000), Leippold, Trojani ve Vanini (2004), Costa ve Nabholz (2007), Costa ve Araujoa (2008) çalışmaları ortalama-varyans problemini çok periyotlu olarak çözen çalışmalardan bazılarıdır. Aynı zamanda finansal piyasaların sürekli değiştiğini göz önünde farklı çalışmalarda bulunmaktadır. Bunlardan en çok bilinenleri; Schweizer (1994), Kornve Trautmann (1998), Zhou veLi (2000), Guo ve Xu (2004), Lindberg (2009), Basak veChabakauri (2010), Sezgin-Alp ve Korn (2011)'nın çalışmalarıdır.

Sürekli zaman portföy problemleri genellikle beklenen fayda maksimizasyonu problemleri şeklinde çözülmektedir. Sürekli zaman ortalama-varyans probleminde, portföy problemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılan stokastik kontrol yöntemi amaç fonksiyonu varyans kısmında beklenen değerini karesini içermesi sebebi ile doğrudan kullanılamamaktadır. ZhouveLi (2000) çalışmalarında iki kriterli sürekli zaman ortalama-varyans problemini ağırlıklar ile birleştirerek problemi tek amaç fonksiyonlu probleme dönüştürmüşlerdir. Bu problem varyansı içermesi nedeni ile standart formda değildir. Çalışmalarında, standart olmayan bu problemin Geometrik Brownian Hareketi piyasa modeli için standart çözümü olan doğrusal karesel (LQ) yardımcı problemler sınıfının içinde olabileceğini göstermişlerdir. Böylece problemin çözümünün yardımcı problemin çözümü ile bulunmasının mümkün olabileceğini söylemişlerdir. Guo ve Xu (2004), ZhouveLi (2000)'nin yaklaşımını kullanarak problemi Sıçramalı Difüzyon modeli kullanarak çözmüşlerdir.

Bu çalışmanın amacı, Türkiye hisse senedi piyasası için sürekli zaman ortalama-varyans portföy yönetimi stratejilerinin uygulanabilirliğini göstermektir. Bu amaçla, uygulamanın basitliği ve anlaşılabilirliği açısından Zhou ve Li (2000) ileGuo ve Xu (2004)'nın sonuçları doğrudan bir riskli finansal varlık için kullanılmıştır. Riskli finansal varlık, sürekli zaman stokastik difüzyon modelleri ile modellenmiştir. Bu durumda kullanılan stokastik diferansiyel denklemin dinamikleri önem arz etmektedir. Geometrik Brownian Hareketi modeli logaritmik getirilerin normal dağılıma sahip olması sebebiyle çalışmalarda riskli finansal varlıkların modellenmelerinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu modelde parametrelerin tahminleri en çok olabilirlik yöntemi ile kolaylıkla elde edilmektedir. Sıçramalı Difüzyon modeli için sürekli ve kesikli dağılımı içinde bulundurması nedeni ile aynı durum söz konusu değildir. Sıçramalı Difüzyon modeli fiyatlandırma, riskli getiri simülasyonu gibi birçok çalışmada kullanılırken model parametrelerini belirlenmesi ile ilgili çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Sıçramalı Difüzyon modeli için parametre tahmininde bulunan çalışmalardan en çok bilinenleri; Beckers (1981) ve Ball ve Torous (1983)'un çalışmalarıdır. Bu çalışmada, Ball ve Torous (1983)'un Bernoulli dağılımının Poisson dağılıma yakınsamasını kullandığı yaklaşım kullanılarak BİST-100 endeksi için Sıçramalı Difüzyon modelinin dinamikleri belirlenmiştir.

Çalışmanın devamında öncelikle riskli ve risksiz finansal varlıklar için kullanılan modeller verilmekte ve kullanılan portföy optimizasyon yöntemleri sonuçları ile birlikte açıklanmaktadır. Bölüm 3'de Türkiye verisi için gerçekleştirilmiş olan portföy stratejisi sonuçları verilmiştir. Sonuç kısmında ise modellerin Türkiye hisse senedi piyasasına uygulanabilirliği ve stratejilerin üstünlükleri tartışılmıştır.

2. YÖNTEM

2.1. Piyasa Modeli

Bu çalışmada, portföy optimizasyon yöntemlerinin anlaşılabilmesi ve uygulamanın basitleştirilmesi amacı ile piyasanın iki farklı finansal varlıktan oluştuğu varsayılmıştır. Bunlardan birinci finansal varlık Eşitlik 1'de verilen piyasa fiyatı sürecine sahip olduğu varsayılan risksiz finansal varlıktır.

$dS_0(t) = S_0(t)rdt, \qquad S_0(0) = 1$ (1)

Burada, r risksiz sürekli bileşik faiz oranıdır.

İkinci finansal varlık ise riskli hisse senedidir. Bu çalışmada, Türkiye finans piyasasında Sıçramalı Difüzyon modeli ile Geometrik Brownian Hareketi modellerinin karşılaştırılması olduğu için riskli finansal model için iki farklı model kullanılmıştır. Bunlardan ilki sabit parametreli Geometrik Brownian Hareketi sürecidir. Burada kullanılan model Eşitlik 2'de verilen stokastik diferansiyel denkleme sahiptir.

$dS(t) = S(t)(a\ dt + s\ dB_t)$ (2)

Bu denklemde, B_t Brownian Hareketi, a α beklenen getiri parametresi ve σ sabit volatilite parametresini göstermektedir.

İkinci varsayılan model ise Eşitlik 3'de verilen stokastik diferansiyel denklemine sahip sabit parametreli Sıçramalı Difüzyon modelidir.

$dS(t) = S(t-)(\alpha\ dt + \sigma dB_t + JdN_t)$ (3)

Bu denklemde, ilk fiyat denklemine ek olarak J, -1'den büyük sıçrama boyu parametresini ve N_t ise λ_t yoğunluk parametresi ile Poisson sürecini göstermektedir.

Bu riskli ve risksiz varlıklar ile oluşturulacak portföy için, riskli varlığa yatırılacak miktarı temsil etmek için θ_t kullanılırsa elde edilen portföy varlık süreçleri her iki model için sırası ile Eşitlik 4'de ve Eşitlik 5'de verilmiştir.

$$dW_t = [(rW_t + \theta_t(\alpha - r))d_t + \theta_t \sigma dB_t] \quad (4)$$

$$dW_t = [(rW_t + \theta_t(\alpha - r))d_t + \theta_t \sigma dB_t + \theta_t JdN_t] \quad (5)$$

2.2. Portföy Optimizasyonu İçin Stokastik Karesel Doğrusal (LQ) Optimizasyon Yöntemi

Markowitz'in ortalama-varyans portföy modeli iki kriterli bir optimizasyon problemidir. Markowitz'in tek dönemlik kesikli portföy probleminin sürekli zamanda çözülmesi stokastik optimizasyon yöntemlerinin kullanılmasını zorunlu kılmaktadır. Ortalama-varyans portföy probleminde risk göstergesi olan varyansın minimize edilirken aynı zamanda beklenen getirinin de maksimize edilmesi hedeflenmektedir. Bu iki kriterin ağırlıklandırılması ile problemin tek amaç fonksiyonlu stokastik kontrol problemine dönüştürülmesi mümkündür. Ancak, daha öncede bahsedildiği üzere varyans içerisinde bulunan beklenen varlık değerinin karesi sürekli zaman ortalama-varyans yöntemini standart stokastik kontrol problemi olarak düzenlenmesine engel olmaktadır. Dolayısıyla problemin stokastik kontrol yöntemi ile doğrudan çözülmesi mümkün değildir. Bu amaçla, 2000 yılında, Zhou ve Li'nin çalışmasında sürekli zaman ortalama-varyans portföy problemi için yardımcı Stokastik Doğrusal Karesel (LQ) problemi oluşturulmuş ve temelde çözülmeye çalışılan asıl problem ile yardımcı problem arasındaki ilişkiyi Teorem1'de verildiği gibi ortaya koyulmuştur. LQ problemlerini stokastik kontrol yöntemi ile çözmek mümkün olduğu için bu ilişkiden faydalanarak ortalama-varyans problemi çözülmüştür. Bu yaklaşımda öncelikle ortalama-varyans problemi tek bir amaç fonksiyonunda birleştirilerek Eşitlik 6'da verildiği şekilde ifade edilmiştir.

$$\min_{\theta_t \in A(w)} J_1(\theta(.)) + \mu J_2(\theta(.)) \equiv -E(W_T) + \mu \operatorname{var}(W_T) \quad (6)$$

Burada, W_t Eşitlik 4 ve Eşitlik 5'de verilen portföy varlık stratejilerinin vade sonundaki değerlerini, θ_t riskli finansal varlığa yatırılan miktarı, A(w) kabul edilebilir portföy stratejiler kümesini, w portföye yatırılan başlangıç değerini ve μ ise ağırlık parametresini göstermektedir.

Yukarıda tanımlanan problem için Zhou ve Li (2000) tarafından tanımlanan yardımcı problem aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\min_{\theta_t \in A(w)} J(\theta(.); \mu, \lambda) \equiv E(\mu W_T^{\,2} - \xi W_T) \quad (7)$$

Burada, $\mu > 0$ ve $-\infty < \xi < \infty$ ağırlık parametreleridir. Yukarıda ifade edilen asıl ve yardımcı problem arasındaki ilişki Zhou ve Li (2000) tarafından geliştirilip ispatlanmış olan Teorem 1 ile ifade edilmektedir.

Teorem 1: Herhangi bir μ>0 ağırlığı için Eşitlik 6'da verilen temel problem Eşitlik 8'de görüldüğü gibi T(μ) şeklinde tanımlanmış olsun, aynı zamanda Eşitlik 7'de verilen yardımcı problem Eşitlik 9'da görüldüğü gibi Y(μ,ξ) şeklinde tanımlanmış olsun.

$$\prod_{T(\mu)} = \{\theta(.) \mid \theta(.)\ \mathrm{T}(\mu)\ \text{probleminin optimal kontrolü}\} \quad (8)$$

$$\prod_{Y(\mu,\xi)} = \{\theta(.) \mid \theta(.)\ Y(\mu,\xi)\ \text{probleminin optimal kontrolü}\} \quad (9)$$

Bu durumda, $\prod_{T(\mu)} \subseteq \bigcup_{-\infty<\xi<\infty} \prod_{Y(\mu,\xi)}$ dır. Buna ek olarak, $\tilde{\xi} = 1 + 2\mu E(\tilde{W}(T))$ ve $\tilde{W}(T)$ varlık süreci ise eğer $\tilde{\theta}(.) \in \prod_{T(\mu)}$ ise $\tilde{\theta}(.) \in \prod_{Y(\mu,\xi)}$ 'dır. .

Bu teoreme göre asıl problemin çözüm kümesi yardımcı problemin çözüm kümelerinin birleşiminin içerisinde yer alıyor. Bu durumda, ana problemin herhangi bir uygun çözümü var ise bu çözüm yardımcı problemin çözümü ile bulunabilir.

2.2.1. Yardımcı Problemin Geometrik Brownian Hareketi Modeli İçin Çözümü

Sürekli zaman ortalama-varyans problemini optimal kontrol yöntemi ile çözülebilmesi için Teorem 1'in sonucunun kullanılması ve Eşitlik 7'de görülen yardımcı problemin çözülmesi uygun olacaktır. Zhou ve Li (2000)' nin çalışmalarında kullanıldığı gibi yardımcı problem $\tau = \frac{\xi}{2\lambda}$ ve $y_t = W_t - \tau$ için yeniden düzenlenecek olursa Geometrik Brownian Hareketi modeli için yardımcı problem Eşitlik 10'da görülen standart LQ problemine dönüşecektir.

$$\min_{\theta_t \in A(y)} J(\theta(.);\mu) \equiv E(\frac{1}{2}\mu y^2{}_T) \qquad (10)$$

Kısıtlar: $dy_t = ((ry_t + (\alpha - r)\theta_t + \tau r)d_t + \sigma\theta_t dB_t),\ \ y = w - \tau$

Bu düzenleme ile birlikte problem klasik StokastikKaresel Doğrusal probleme dönüşmüştür. $V(t,y) = \min_{\theta_t \in A(y)} J(\theta(.);\mu)$ problemi için Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) denklemi Eşitlik 11'de verildiği gibi olacaktır.

$$\min_{\theta_t} \left\{ \frac{\partial V(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,y)}{\partial y}(ry + (\alpha - r)\theta_t + \tau r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y^2}\sigma^2\theta_t^2 \right\} = 0 \quad (11)$$

Bu HJB denkleminin çözümü için Eşitlik 12'de verilen bir formda olduğu varsayılırsa problemin optimal çözümü Eşitlik 13' de verildiği şekilde olacaktır.

$$V(t,y) = \frac{1}{2}P(t)y^2 + Q(t)y + R(t) \quad (12)$$

$$\theta_t^* = -\frac{1}{\sigma^2}(\alpha - r)\left(y + \frac{Q(t)}{P(t)} \right) \quad (13)$$

Bu durumda, bu problemin çözümü için gerekli Ricatti denklemleri Eşitlik 14'de verildiği şekilde olacaktır.

$$P'(t)=\left(\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}-2r\right)P(t),\quad P(T)=\mu,\quad P(t)\sigma^2>0$$

$$Q'(t)=\left(\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}-r\right)Q(t)-\tau rP(t),\quad Q(T)=0 \qquad (14)$$

$$R'(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}\right)\frac{Q(t)^2}{P(t)}-\tau rQ(t),\quad R(T)=0$$

Tüm $V(t,y)=\min\limits_{\theta_t\in A(y)} J(\theta(.);\mu)$'nin formunun belirlenmesi için tüm bu diferansiyel denklemlerin çözülmesi gereklidir. Ancak buradaki amaç optimal kontrol olan θ_t^*'nun çözümü olduğu için $h(t)=\frac{Q(t)}{P(t)}$'nin çözülmesi yeterlidir. Bu durumda, $h(t)$'nin diferansiyel denklemi Eşitlik 15'de verildiği şekilde olacaktır.

$$h'(t)=\frac{P'(t)Q(t)-P(t)Q'(t)}{P(t)^2}=rh(t)-\tau r \quad h(T)=0 \; (15)$$

Problemin çözümü için gerekli olan $h(t)$ 'nin diferansiyel denklemi çözümü Eşitlik 16'da verilmiştir.

$$h(t)=\tau(1-e^{-r(T-t)}) \; (16)$$

Eşitlik 16'da verilen h(t) çözümü ve $\tau=\frac{\xi}{2\lambda}$ ile $y=w-\tau$ Eşitlik 13'de verilen optimal çözüm denklemine yerleştirilirse Geometrik Brownian Hareketi hisse senedi modeli varsayımı altında yardımcı problemin optimal çözümü Eşitlik 17'de verildiği şekilde olacaktır.

$$\theta_t^*=-\frac{(\alpha-r)}{\sigma^2}\left(w-\frac{\xi}{2\mu}+\frac{\xi}{2\mu}(1-e^{-r(T-t)})\right) (17)$$

Burada bulunan yardımcı problemin çözümünü Teorem 1 kullanılarak ortalama-varyans portföy probleminin çözümü olarak kullanmak mümkündür.

2.2.2. Yardımcı Problemin Sıçramalı Difüzyon Modeli için Çözümü

2004 yılında Guo ve Xu daha önce Zhou ve Li(2000) tarafından geliştirilen ortalama-varyans probleminin yardımcı problem ile çözüm yaklaşımını Sıçramalı Difüzyon modeli için genişletmişlerdir. Bu çalışma kapsamında yardımcı problem $\beta = \frac{\xi}{2\mu}$, $y_t = \sqrt{\mu}\left(W_t - \beta\right)$ ve $u_t = \sqrt{\mu}\theta_t$ için yeniden düzenlenirse Sıçramalı Difüzyon modeli için yardımcı problem Eşitlik 18'da görülen standart LQ problemine dönüşecektir.

$$\min_{u_t \in A(y)} J(u(.)) \equiv E(\frac{1}{2} {y^2}_T) \tag{18}$$
$$\text{Kısıtlar:} \quad dy_t = ((ry_t + (\alpha - r)u_t + \beta\sqrt{\mu r})d_t + \sigma u_t dB_t + u_t J dN_t), \; y = \sqrt{\mu}(w - \beta)$$

Bu düzenleme ile birlikte oluşturulan problem için Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) denklemi Eşitlik 19'de verildiği gibi olacaktır.

$$\min_{u_t} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,y)}{\partial y}(ry + (\alpha - r)u_t + \beta\sqrt{\mu r}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y^2}\sigma^2 {u_t}^2 \\ +\lambda[V(t, y + u_t J) - V(t,y)] \end{array} \right\} = 0 \tag{19}$$

Bu HJB denkleminin çözümü için Eşitlik 20'de verilen bir formda olduğu varsayılırsa problemin u_t optimal kontrolü için çözümü Eşitlik 21' de verildiği şekilde olacaktır.

$$V(t,y) = \frac{1}{2}P(t)y^2 + Q(t)y + R(t) \tag{20}$$

$$u_t^* = -\frac{(\alpha - r + \lambda J)}{\sigma^2 + \lambda J^2}\left(y + \frac{Q(t)}{P(t)} \right) \tag{21}$$

Bu durumda, $V\,(t,y)$ probleminin çözümü için Eşitlik 22'de verilen Ricatti denklemlerinin çözülmesi gerekmektedir. Ancak buradaki amaç optimal kontrol olan u_t^*' nin çözümü olduğu için $h(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}$ 'nin çözülmesi yeterlidir. Bu durumda, $h(t)$'nin diferansiyel denklemi Eşitlik 23'de verildiği şekilde olacaktır.

$$P'(t) = \left(\frac{(\alpha - r + \lambda J)^2}{\sigma^2 + \lambda J^2} - 2r \right) P(t), \quad P(T) = 1$$
$$Q'(t) = \left(\frac{(\alpha - r + \lambda J)^2}{\sigma^2 + \lambda J^2} \right) Q(t) - \left(\beta \sqrt{\mu} r + r \frac{Q(t)}{P(t)} \right), \quad Q(T) = 0 \quad (22)$$
$$R'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{(\alpha - r + \lambda J)^2}{\sigma^2 + \lambda J^2} \right) \frac{Q(t)^2}{P(t)} - \beta \sqrt{\mu} r Q(t), \quad R(T) = 0$$

Optimal kontrol için gerekli olan *h(t)*'nin diferansiyel denklemi çözümü Eşitlik 23'de verilmiştir.

$$h'(t) = \frac{P'(t)Q(t) - P(t)Q'(t)}{P(t)^2} = rh(t) - \beta \sqrt{\mu} r \quad h(T) = 0 \quad (23)$$

Eşitlik 23'de verilen h(t) çözümü ile $\beta = \frac{\xi}{2\mu}, \quad y_t = \sqrt{\mu}\left(W_t - \beta\right)$ ve $u_t = \sqrt{\mu}\theta_t$ Eşitlik 21'de verilen optimal çözüm denklemine yerleştirilirse Sıçramalı Difüzyon hisse senedi modeli varsayımı altında yardımcı problemin optimal çözümü Eşitlik 24'de verildiği şekilde olacaktır. Burada bulunan yardımcı problemin çözümünü Teorem 1 kullanılarak ortalama-varyansportföy probleminin çözümü olarak kullanmak mümkündür.

$$\theta_t^* = -\frac{\alpha - r + \lambda J}{\sigma^2 + \lambda J^2} \left(\frac{\xi}{2\mu} e^{-r(T-t)} - w \right) \quad (24)$$

2.3. Parametre Tahmini

Ortalama-varyans portföy optimizasyonu probleminde, optimal portföy stratejisi kullanılan piyasa modelinin parametrelerine göre değişkenlik göstermektedir. Bu nedenle, hisse senedi fiyat dinamikleri belirlenmesi çok önemlidir. Eğer riskli finansal varlığın fiyatının Geometrik Brownian Hareketi piyasa dinamiklerine sahip olduğu düşünülürse, logaritmik getiriler Eşitlik 25'de görüldüğü üzere normal dağılıma sahip olur. Logaritmik getiriler normal dağıldığı için olasılık dağılım fonksiyonu Eşitlik 26'da verildiği gibidir. Bu durumda bilinmeyen parametrelerin tahmininde en çok olabilirlik tahmin yönteminin direk olarak kullanılması mümkündür.

$$x = \log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right] (25)$$

$$P(x;\alpha,\sigma^2) = \phi\left(x;\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) (26)$$

Dinamik piyasa modellerinin ikinci tipi Sıçramalı Difüzyon modelidir. Burada, rassallığa sebep olan sürekli Geometrik Brownian Hareketi ve kesikli Poisson sıçramaları olmak üzere iki farklı kaynak söz konusudur. Bu dinamik modelde logaritmik getiriler Eşitlik 27'de verildiği gibi Normal ve Poisson dağılımlardan oluşan karma dağılıma sahiptir.

$$x = \log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t + \sum_{0<s\leq t} \log(1+J)dN_t\right] (27)$$

Stokastik süreçleri hisse senedi modellemesinde kullanan birçok çalışma vardır. Ancak logaritmik getiri serisinin Normal dağılıma uyduğu birinci tip model uygulama kolaylığı ve parametre tahminin direk yapılabilmesi sebebiyle daha çok tercih edilmektedir. Ancak, Sıçramalı Difüzyon modelin hisse senedi fiyatlarındaki anlık dalgalanmaları daha iyi ifade ettiği için dalgalanması yüksek olan piyasalar için daha uygundur.

Sıçramalı Difüzyon modelinin parametre tahmini ve uygulamalarına yönelik sınırlı sayıda çalışma vardır. Bunlardan en popüler olan çalışmalar: Beckers (1981) ve Ball ve Torous (1983)'un çalışmalarıdır.

1981 yılında, Beckers fiyat modelinin parametrelerini momentler yöntemi ile tahmin etmiştir. Çalışmada, en çok olabilirlik yönteminin sıçrama gerçekleşme durumunun tahmini zor olduğu için kullanılmasının zor olacağı tartışılmıştır.

1983 yılında, Ballve Torous Beurnoulli sıçramalı modeli ortaya koymuşlardır. Çalışmalarında, riskli finansal varlığı modellerken öncelikle Eşitlik 28'de dağılımı verilen Bernoulli sıçrama modelini kullanmış daha sonra Beurnoulli dağılımın Poisson dağılımına yakınsamasından yararlanarak Sıçramalı Difüzyon modelin parametrelerini momentler ve en çok olabilirlik tahmin yöntemleri ile tahmin ettirmişlerdir.

$$P(x;\alpha,\sigma^2,\lambda,J)=(1-\lambda t)\phi\left(x;\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t,\sigma^2 t\right)$$
$$+\lambda t\phi\left(x;\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\log(1+J),\sigma^2 t\right) \quad (28)$$

1998 yılında Honor'e Sıçramalı Difüzyon model için yazılan olabilirlik fonksiyonu sınırsız olduğunu söylemiş ve standart en çok olabilirlik yönteminin tutarsız sonuçlara neden olabileceğini tartışmıştır. Ancak, bu sorunun olabilirlik fonksiyonunu göreli varyanslara göre sürekli ve kesikli olarak ayrıştırarak çözülebileceğini söylemiştir.

Türkiye hisse senedi piyasası için yürütülen bu çalışmada, sabit parametreli model varsayımı yapılmış ve sıçrama boyları sabit olarak alınmıştır. Bu durumda, olabilirlik fonksiyonun sınırsızlığı yani parametre tahminin tutarsızlığı durumu ortadan kalkmıştır. Sonuç olarak çalışmada, Ball ve Trous tarafından önerilen Bernoulli şıçrama süreci yaklaşımı kullanılmış ve logaritmik getirilerin Eşitlik 28'deki gibi dağıldığı varsayılmış ve en çok olabilirlik yöntemi ile parametreler tahmin edilmeye çalışılmıştır. Bu problem için olabilirlik fonksiyonu Eşitlik 29'da verildiği gibidir.

$$L(x\,|\,\alpha,\sigma^2,\lambda,J)=\sum_{i=1}^{n}P(x_i;\alpha,\sigma^2,\lambda,J) \quad (29)$$

Burada x_i verilen getiri serisini göstermektedir. Uygulamada olabilirlik fonksiyonun yerine işlem kolaylığı sebebiyle Eşitlik 30'da verilen logaritmik olabilirlik fonksiyonu kullanılmaktadır.

$$\ln L(x\,|\,\alpha,\sigma^2,\lambda,J)=\sum_{i=1}^{n}\ln P(x_i;\alpha,\sigma^2,\lambda,J) \quad (30)$$

En çok olabilirlik tahmin edicilerinin Eşitlik 31'de verilen normal denklemlerinin çözümü ile elde edilmektedir.

$$\frac{\partial \ln L(x\,|\,\alpha,\sigma^2,\lambda,J)}{\partial\psi}=0,\ \ \psi=(\alpha,\sigma^2,\lambda,J) \quad (31)$$

3. UYGULAMA

Bu çalışmada, 2004-2013 yılları arası BIST-100 endeksi günlük getirileri ve bu dönem içerisinde Devlet İç Borçlanma Senetlerinin (DİBS) ortalama günlük getirisi kullanılmıştır. BIST-100 endeksi riskli finansal araç olarak alındığı için önceki bölümlerde açıklanan Geometrik Brownian Hareketi ve Sıçrama Difüzyon modelleri ile modellenmiştir.

Öncelikle veririn son 300 günlük kısmı ayrılarak geri kalan kısmı difüzyon modellerin parametre tahmininde kullanılmıştır. Daha sonra bu parametrelerle oluşturulan modellerin performansları son 300 günlük durum için ileriye yönelik değerlendirilmiştir. Tablo 1 oluşturulan modeller için gerçekleştirilen parametre tahminlerini göstermektedir. Görüldüğü üzere beklenen günlük getiriler ve varyanslar yaklaşık olarak her iki modelde aynı çıkarken Sıçramalı Difüzyon modelinde yeni iki parametre eklenmesi söz konusu olmuştur.

Tablo 1. Geometrik Brownian Hareketi ve Sıçrama Difüzyon Modelleri Parametre Tahminleri

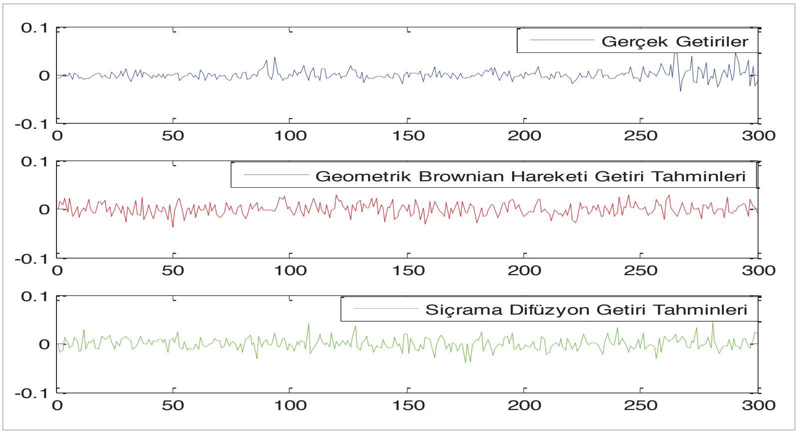
	μ	σ^2	λ	J
GBH	0,0005012	0,0003491	-	-
SD	0,0005	0,0003	0,0021	0,0039

Tablo 2'de her iki model için son 300 gün için yapılan tahminler ile gerçek getiriler arasındaki hataların kareleri ortalamaları görülmektedir. Yapılan hatalar göz önünde bulundurulduğunda hatanın daha küçük çıkması sebebiyle Sıçramalı Difüzyon modelinin BIST-100 endeksi için daha uygun olacağı sonucuna ulaşılmaktadır.

Tablo 2. Geometrik Brownian Hareketi ve Sıçramalı Difüzyon Modelleri Tahminlerinde Yapılan Hataların Kareleri Ortalaması

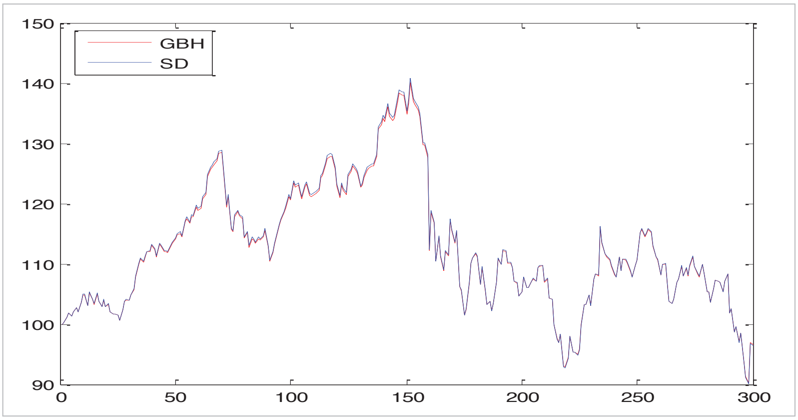
	HKO
GBH	0,000665
SD	0,000637

Grafik 1 BIST-100endeksi için gerçek getirileri, Geormetrik Brownian hareketi modeline göre getirileri ve Sıçramalı Difüzyon modeline göre simülasyonu yapılmış getirileri göstermektedir. Sıçramalı Difüzyon modelinde bazı ani iniş ve çıkışların daha iyi modellendiği görülmektedir.

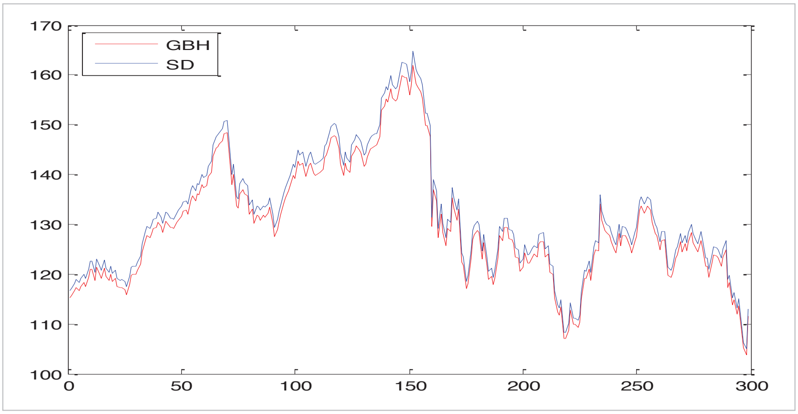


Grafik 1. Gerçek Getiriler ve Geometrik Brownian Hareketi ve Sıçramalı Difüzyon Modelleri için Getiri Simülasyonları

Karşılaştırma sırasında, portföy optimizasyon yöntemleri kullanılırken gün gün verilerin gözlemlenmesi ile dinamik olarak portföyün her gün yenilenmesi yaklaşımı kullanılmıştır. Grafik 2 her gün yenilenen optimal portföy varlık değerlerini göstermektedir. Genel olarak görülüyor ki yatırımcı eğer Sıçramalı Difüzyon modelini kullanarak portföy seçim yöntemine göre hergün portföyünü yenilerse Geometrik Brownian Hareketi modeli kullanarak oluşturduğu portföy seçim kriterinden bir miktar daha fazla varlık değerine sahip olmaktadır.



Grafik 2. LQ ve Sıçramalı LQ Portföy Seçim Yöntemleri için Oluşturulan Portföy Servet Simulasyonları.



Grafik 3. LQ ve Sıçramalı LQ Portföy Seçim Yöntemleri için oluşturulan Portföy için Riskli Finansal Varlığa Yatırılan Miktarlar

Grafik 3 incelendiğinle Sıçramalı Difüzyon modeli ile çıkartılan portföy seçim yöntemi kullanılırsa riskli finansal varlığa yatırılan miktarın Geometrik Brownian hareketi modeli kullanılınca yatırdığı miktara göre daha fazla olduğu görülmektedir. Riskli finansal varlıkların volatilitesi yüksektir ve Sıçramalı Modeller volatilite riski yanında aynı zamanda anormal getiriler riskini de içermektedir. Dolayısı ile her iki risk değerlendirildiğinde riskin getiriye etkisi incelendiğinde riskli varlığa yapılan yatırımın biraz daha fazla olması mümkündür.

4. SONUÇ

Sürekli zaman portföy optimizasyonu problemleri çoğunlukla beklenen fayda maksimizasyonu problemleri şeklinde çözülmektedir. Ortalama-varyans portföy yöntemi çok sık kullanılan bir yöntem olmasına rağmen problemi sürekli zamanda çözen çok az çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmada, sürekli zamanda ortalama-varyans portföy problemini stokastik optimal kontrol yöntemi ile piyasa modeli olarak Geometrik Brownian Hareketi ve Sıçramalı Difüzyon modeli kullanan yaklaşımlar kullanılmış ve BİST-100 endeksi ve DİBS'ler arasında günlük yenilemedi portföy stratejileri oluşturulmuştur. Aynı zamanda Geometrik Brownian Hareketi ve Sıçrama Difüzyon modellerinin BİST-100 için kullanılabilirlikleri ve tahmin performansları değerlendirilmiştir. Sonuç olarak Sıçramalı Difüzyon modelinin hem tahmin amacı ile hem portföy seçim yöntemi amacı ile tercih edilmesinin daha uygun olacağına karar verilmiştir.

KAYNAKÇA

Ball A. ve W.N. Torous. 1983. "A Simplified Jump Processfor Common Stock Returns", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 18.

Basak S. ve G. Chabakauri. 2010. "Dynamic Mean-Variance Asset Allocation", Review Of Financial Studies, 23.

Beckers S. 1981. "A Note on Estimating The Parameters of The Diffusion-Jump Model Of Stock Returns", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 16.

Costa O.L.M. ve M.V. Araujoa. 2008. "A Generalized Multi-Period Mean-Variance Portfolio Optimization with Markov Switching Parameters", Automatica (Journal of IFAC), 44.

Costa O.L.M. ve R.B. Nabholz. 2007. "Multiperiod Mean-Variance Optimization with Intertemporal Restrictions", Journal of Optimization Theory and Applications, 134.

Guo W. ve C. Xu. 2004. "Optimal Portfolio Selection When Stock Prices Follow and Jump Diffusion Process", Mathematical Methods of Operations Research, 60.

Honor´e P. 1998. "Pitfalls in Estimating Jump Diffusion Models", Technical Report. University of Aarhus.

Korn R. ve S. Trautmann. 1998. "Continuous-Time Portfolio Optimization Under Terminal Wealth Constraints", ZOR - Mathematical Methods of Operational Research, 42.

Leippold M.,F. Trojani ve P. Vanini. 2004. "A Geometric Approach to Multiperiod Mean-Variance Optimization of Assets and Liabilities", Journal of Economic Dynamic and Control, 28.

Li D. ve W.M. Ng. 2000. "Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multi-Period Mean-Variance Formulation", Mathematical Finance, 10.

Lindberg C. 2009. "Portfolio Optimization When Expected Stock Returns Are Determined by Exposureto Risk", Bernoull, 15.

Markowitz H.M. 1952. "Portfolio Selection", Journal of Finance, 7.

Sezgin-Alp Ö. ve R. Korn. 2011. "Continuous-Time Mean-Variance Portfolio Optimization in A Jump-Diffusion Market", Decisions in Economics and Finance, 34 (1).

Schweizer M. 1994. "Approximating Random Variables By Stochastic Integrals", Annals of Probability, 22.

Zhou X.Y. ve D. Li. 2000. "Continuous-Time Mean-Variance Portfolio Selection: A Stochastic LQ Framework", Applied Mathematical Optimization, 42.