

Makale Geliş Tarihi: 24.09.2019

Kabul Tarihi: 04.10.2019

## ÇOK DEĞİŞKENLİ KONTROL GRAFİKLERİNDEN HOTELLİNG $T^2$ GRAFIGİ VE YAĞ SANAYİNDE BİR UYGULAMA

**Dr. Öğrt. Üyesi Orhan ŞAHİN**  
Balıkesir Üniversitesi,  
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi,  
Uluslararası Ticaret ve Lojistik Bölümü.,  
osahin@balikesir.edu.tr  
Orcid No: 0000-0001-7416- 1673

### Öz

Kalite kontrol, üretim aşamasında spesifikasyonlara uymayan ürünlerin ayrılması anlamına gelmektedir. Kalite kontrol grafiklerinin kullanım amacı, bir süreçteki kalite değişkenlerinin normal dışı davranışlarını belirlemektir. Bir tek kalite karakteristiğinin kontrolü için tek değişkenli kalite kontrol grafikleri, birden fazla kalite karakteristiğinin kontrolü için çok değişkenli kalite kontrol grafikleri kullanılmaktadır. Çok değişkenli kalite kontrol çizelgelerinden olan Hotelling  $T^2$  grafikleri, birden fazla kalite değişkeni eşzamanlı gözlemek için kullanılır. Bu çalışmada Hotelling  $T^2$  çizelgeleri, bir zeytinyağı fabrikasında yağ elde etme sürecine uygulanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Çok Değişkenli Kontrol Grafiği, Hotelling  $T^2$  istatistiği, Yağ Sanayii

### APPLICATION OF MULTIVARIATE STATISTICAL PROCESS CONTROL IN AN OLİVE OIL FACTORY

#### Abstract

Quality control means the separation of products that do not meet the specifications at the production stage. The purpose of the using quality control charts is to determine the abnormal behaviour of quality variables in a process. Univariate quality control graphs are used for the control of a single quality characteristic and multivariate quality control graphs are used for the control of multiple quality characteristics. One of the multivariable quality control charts, the Hotelling  $T^2$  charts are used to monitor multiple quality variables.

simultaneously. In this study, Hotelling  $T^2$  charts were applied to the process of obtaining oil in an olive oil factory.

**Keywords:** Univariate quality control graphs, Hotelling  $T^2$  statistic. Oil Sector

## 1. Giriş

Bazı süreçler tarafından oluşturulan ürünler bir veya daha çok kalite karakteristiği bakımından sürekli olarak izlenmekte ve kalite kontrolü sağlanmaya çalışılmaktadır. Çoğu zaman bu ürüne ait kalite karakteristikleri birbirinden bağımsız olarak tek tek ele alınmakta ve her birinin kalite kontrolü ayrı olarak sağlanmaktadır. Ancak kalite karakteristiklerinin tek tek ele alınması oldukça hatalı sonuçlara varılmasına yol açabilir (Kotz ve Lovelace, 1998).

İstatistiksel süreç kontrolü, normal bir süreçten alınan veriler temel alınarak “normal süreç” kavramının tanımlanması ve ardından var olan süreçten alınan örnek verilerin tanımlanan normal süreç parametreleriyle karşılaştırılarak mevcut sürecin durumunun belirlenmesidir (Yang ve Trewin, 2004, s. 243). Tek değişkenli durumlarda görüntülenecek ve kontrol edilecek sadece bir değişken mevcuttur. Bu durum, literatürde çok yaygın olarak işlenen bir konu olmakla birlikte, gerçek hayatta kontrol edilecek süreç değişkeni bir taneyle sınırlı kalmamaktadır (Montgomery, 2005, s. 486). Çoğu veri yapısal olarak çok değişkenlidir, üretim işletmelerinde parçaların fiziksel boyutlarının birkaç farklı noktadan ölçülmesi gerekebilmekte veya bir sistemin çeşitli parametreleri eşzamanlı olarak elde edilebilmektedir (Fuchs ve Kenett, 1998, s.11). Eşzamanlı görüntülemenin ya da iki veya daha fazla kalite karakteristiğinin kontrolünün gerekli olduğu durumlarda, kalite karakteristiklerini birbirinden bağımsız olarak incelemek yanıltıcı sonuçlara neden olabilmektedir. Birbirleriyle ilişkileri bulunan kalite karakteristikleri, farklı kontrol grafikleri kullanılarak ayrı ayrı incelendiğinde süreç kontrol altında görünürken, değişkenler eşzamanlı olarak incelendiğinde, kalite karakteristiklerinin normal olmayan davranış gösterdiği görülebilmektedir (Montgomery, 2005, s. 510). Gerçek hayatta süreçler, birden fazla kalite karakteristik içermekte ve bu durum, farklı ölçümlerin tek bir değerle ifade

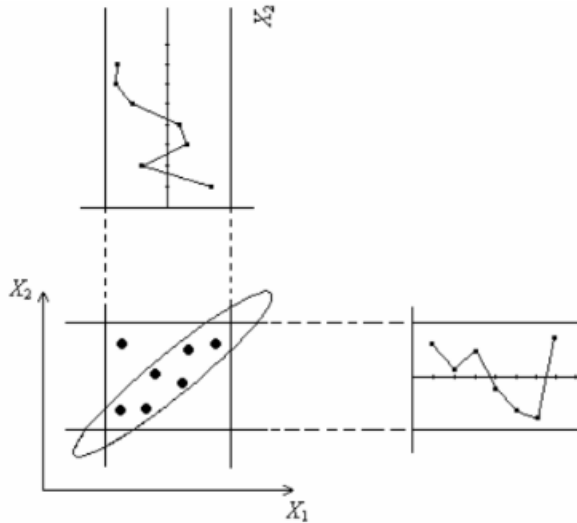
edilmesini gerektirmektedir. Bu tür süreçlere bir kalite karakteristiğine göre süreç kontrol yöntemlerinin uygulanması  $\alpha$  ve  $\beta$  olasılıklarının değişmesine sebep olmaktadır (Baray, 2008, s. 204). Bununla birlikte özelliklerin ayrı ayrı incelenmesi 1. tip hata olan  $\alpha$  hatasında yanlış hesaplamalara neden olabilmektedir. Süreç görüntüleme yöntemindeki bu yanlış, kalite karakteristiği sayısı arttıkça daha da artmaktadır. Genellikle, belirli bir üretim için p adet istatistiksel olarak bağımsız kalite karakteristiği bulunduğunda ve her birinin 1. tip hata olasılığı  $\alpha$ 'ya eşit olan  $\bar{X}$  kontrol grafikleri oluşturulduğunda, ortak kontrol yönteminin süreç kontrol altındayken kontrol dışında olarak görünme olasılığı olan gerçek 1. tip hata,

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p \quad (1)$$

denklemleri ile hesaplanmaktadır. Süreç kontrol altında iken tüm p ortalamalarının eşzamanlı kontrol grafiklerinin kontrol limitleri içinde olma olasılığı ise, 2' de verilmiştir.

$$P = (1 - \alpha)^p \quad (2)$$

Şekil 1'de bir süreçteki iki değişken için uygulanan tek değişkenli kontrol ve çok değişkenli kontrol arasındaki ayrım görülmektedir



Şekil 1 : İki Değişken İçin Uygulanan Tek Değişkenli Kontrol ve Çok Değişkenli Kontrol Arasındaki Ayrım (Montgomery, 2005)

Değişkenler arasındaki ilişki dikkate alınmazsa, Şekil 1'in üst ve sağında iki farklı değişkene ait Shewhart çizelgelerinde, noktalar alt ve üst kontrol sınırları arasındaysa süreç kontrol altında kabul edilecektir. Aynı ürüne ait değer çiftleri ayrı ayrı bu çizelgelerde gösterilmek yerine iki boyutlu uzayda işaretlenirse, çizelgelerdeki kontrol sınırları bu uzayda dikdörtgen bir alan oluşturur ve bu alan içindeki noktalar sürecin kontrol altında olduğunu gösterir. Ancak çok değişkenli kalite kontrol çizelgelerinde değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkisi de göz önüne alınmaktadır. Wierda'nın belirttiği gibi (Wierda, S.J,1994;174), Shewhart çizelgelerinin yakalayamadığı kontrol dışı noktaları Hotelling  $T^2$  çizelgesinin yakalamasının nedeni, değişkenler arasındaki korelasyon yapısını hesaba katan,  $T^2$  istatistiğine dayalı eliptik bir kontrol bölgesi kullanmasıdır. Şekil 1'deki elips iki değişken arasında kuvvetli pozitif korelasyon olduğunu göstermektedir ve dikdörtgen alandan çok farklıdır. Kontrol elipsini çizerek çok değişkenli gözlem değerlerini Şekil 1'de olduğu gibi elips üzerinde işaretlemek mümkündür, ancak bu durumda çizilen noktaların zaman ardışıklığı kaybolacaktır. Ayrıca kalite değişkeni sayısının ikiden fazla olması durumunda elipsleri (elipsoidleri) çizmek zorlaşacaktır. Bu zorlukları gidermek için her ürüne ait çok değişkenli gözlem değerlerinden bir  $T^2$  istatistik değeri üretilir; bu değerler zaman sırasıyla Hotelling  $T^2$  çizelgelerinde işaretlenir. Korelasyon yapısını dikkate alan bu çizelgeler, kontrol dışı durumları doğru şekilde saptamaktadır, çok değişkenli gözlem değerlerinin tek bir  $T^2$  değerine indirgenmesi, Hotelling  $T^2$  grafiklerinin yorumunu zorlaştırmaktadır (Montgomery, D.C.,2001)

## 2. Çok Değişkenli İstatistiksel Süreç Kontrolü ve Hotelling'in $T^2$ İstatistiği

Geometrik olarak  $T^2$ , hedef değeri çevreleyen elipsten eşit uzaklıktaki noktalar ile çok değişkenli gözlem arasındaki uzaklığın karesidir. Yüksek  $T^2$  değeri gözlemin hedeften uzak olduğunu göstermektedir. Hedef değerler referans örnekten belirlenebileceği gibi dışardan, referans örneklerle bağlantısı olmadan da belirlenebilir (Fuchs ve Kenett, 1998, s. 6).

Tek değişkenli t testinin gücü çok değişkenli testten daha azdır. Çok sayıdaki tek değişkenli testin karşılaştırılmasında ise anlamlılık düzeyleri belirlendiğinde birleşim problemi yaşanmaktadır. Bu nedenle bu yöntemlerdense tek değişkenli Shewhart  $\bar{x}$  kontrol grafiğinin çok değişkenliliğe uyarlanmış hali olan Hotelling  $T^2$  kontrol grafiği tercih edilmektedir (Fuchs ve Kenett, 1998, s. 22).

Hotelling  $T^2$  kontrol istatistiğini kullanmak için bazı varsayımlar yapılması ve gerekli koşullar sağlanması gerektiğini ileri sürmüşlerdir. ( Young ve Mason 2002, s. 33)

1. Rassal gözlem örnekleri seçmek
2. Sinyal tespitinde kullanmak için bir üst kontrol limiti belirlemek
3. Yeterli örnek büyüklüğü kullanmak
4. Değişkenler için tutarlı bir kovaryans matris tahminleyicisi elde etmek

### 3. Hotelling $T^2$ İstatistiği

Hotelling  $T^2$  istatistiğinin dağılım özelliklerini ele almadan önce çok değişkenli gözlemlerin  $\mu$  ortalama vektörlü,  $\Sigma$  kovaryans matrisli p değişkenli normal dağılıma sahip kitleden rasgele örnekleme ile alındığını varsayalım. Bağımsız gözlemlerin davranışı bilinen veya bilinmeyen parametrelili bir olasılık fonksiyonu tarafından açıklanır. Eğer parametreler bilinmiyorsa proses kontrolde iken toplanan önceki veri kümesinden tahmin edilir. Bu p değişkenli örneklem gözlemlerini Hotelling  $T^2$  istatistiğine dönüştürülür.

Genel bir fikir vermesi amacıyla, kovaryans matrisinin örneklem tahminine dayalı  $T^2$  istatistiğinin aslında tek değişkenli student-t istatistiğini çok değişkenli duruma genişletilmesi olduğunu gösterelim (Özdamar, K, 1999: 97-98)

**Tek değişkenli student- t istatistiği**

$$t = \frac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}}$$

olup karesi alınırsa

$$t^2 = \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{S^2/n} = n(\bar{X} - \mu)(S^2)^{-1}(\bar{X} - \mu)$$

elde edilir.

$X_i' = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$   $i = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $\mu$  ortalamalı ve  $\Sigma$  kovaryans matrisli  $p$  değişkenli normal dağılımdan alınan  $n$  birimlik örneklem olsun.  $\bar{X}$ ,  $\mu$  nün ve  $S$  de  $\Sigma$  nın örneklem tahmin edicileri olmak üzere  $t$  istatistiğinin çok değişkenli genelleştirilmesi

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu)' S^{-1} (\bar{X} - \mu)$$

şeklinde dir.

Hotelling  $T^2$  istatistiği  $X$  ile  $\mu$  arasındaki istatistiksel uzaklığı gösterir ve bu ifade  $p$  - boyutlu gözlemlerin pek çok farklı bileşenleri arasındaki istatistiksel uzaklığı gösterecek şekilde genişletilebilir. Örneğin, bir tek gözlem vektörü  $X$  ile kitle ortalaması  $\mu$  veya  $\mu$  nün tahmini  $\bar{X}$  arasında ya da  $i$  -inci gözlem ortalaması  $\bar{X}_i$  ile tüm örneklem ortalaması  $\bar{X}$  arasında istatistiksel uzaklık tanımlanabilir.

Her biri  $m$  büyüklükte  $p$  değişken (kalite karakteristiği) içeren  $n$  tane gözlemin olduğunu ve gözlemlerin  $\mu$  ortalama vektörlü ve  $\Sigma$  kovaryans matrisli normal dağılımdan alındığını varsayalım. Hesaplamalarda aksi belirtilmedikçe  $p$  bileşen üzerinde tek bir gözlem olduğunu,  $m = 1$ , varsayacağız.

$T^2$  istatistiğinin açıklanmasında farklı olasılık fonksiyonları kullanılabilir. Burada üç farklı yaklaşım ele alınır.

### 3.1. Çok değişkenli normal dağılım için $\mu$ ve $\Sigma$ nın bilindiğini varsayalım.

Her bir gözlem vektörü  $X$ , için  $T^2$  istatistiği

$$T^2 = (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim \chi^2_{(p)}$$

olup  $p$  serbestlik dereceli ki-kare dağılımı,  $\chi^2_{(p)}$  gösterir.  $T^2$  dağılımı sadece  $X$  gözlem vektöründeki değişken sayısı  $p$  ye bağlıdır.

3.2. Çok değişkenli normal dağılım için  $\mu$  ve  $\Sigma$  parametrelerinin bilinmeyip  $\bar{X}$  ve  $S$  ve tahmin edicileri kullanılarak tahmin edildiğini varsayalım.  $\bar{X}$  ve  $S$  değerleri  $n$  gözlemi içeren önceki veri kümesinin (HDS)'den elde edilir.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$$

$\bar{X}$  ve  $S$  den bağımsız gözlem vektörü  $X$  için  $T^2$  istatistiği

$$T^2 = (X - \bar{X})S^{-1}(X - \bar{X}) \sim \left[ \frac{p(n+1)(n-1)}{n(n-p)} \right] F_{(p, n-p)}$$

olup  $p$  ve  $(n-p)$  serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir.

3.3.  $\mu$  ve  $\Sigma$  nin bilinmeyip  $X$  ve  $S$  ile tahmin edildiğini,  $X$  gözlem vektörünün  $X$  ve  $S$  den bağımsız olmadığını varsayalım.

Bu durumda  $T^2$  istatistiğinin yapısı ve dağılımı

$$T^2 = (X - \bar{X})S^{-1}(X - \bar{X}) \sim \left[ \frac{(n-1)^2}{n} \right] B_{(p/2, (n-p-1)/2)}$$

şeklinde dir. Dağılım değişken sayısı  $p$  ve örneklem büyüklüğü  $n$  ye bağlıdır.

$T^2$  istatistiğinin grafiklendirilmesi iki aşamada ele alınır. I. aşamada kontrol durumunda gözlemlerin bir veri kümesi oluşturulur, II. aşamada ise  $T^2$  istatistiği grafiklendirilir.

Tek değişkenli durumda olduğu gibi çok değişkenli durumda da ön kontrol prosedürü yardımıyla kontrol dışı gözlemler belirlenerek gözlem grubundan atılır ve  $T^2$  istatistiğine uyan ÜKS belirlenir.  $T^2$  istatistiğinin farklı olasılık fonksiyonları olduğundan ÜKS'nin hesaplamaları farklı olacaktır. I. aşama işlemlerinde beta ve ki-kare dağılımları, II. aşama işlemlerinde F ve ki-kare dağılımları kullanılır.

#### 4-Tek Gözlemler için Üst Kontrol Sınırının Hesaplanması

Bazı sanayi kollarında sürecin analizi için toplanan veri seti genellikle  $n=1$  büyüklüğünde olmaktadır. Bazı endüstriyel işlemlerde alt örnek büyüklüğü ( $n$ ) işlemin doğası gereği her zaman 1'dir. Bu durum genellikle kimya endüstrilerinde ortaya çıkmakla birlikte, çok değişkenli veri sürekli görüntülenmekte ve kaydedilmekte ise de bu, belirli bir zamanda 1 adet gözleme

karşılık gelmekte, başka bir deyişle alt grup örnek büyüklüğü 1'e eşit olmaktadır (Yang ve Trewin, 2004, s. 259).  $T^2$  istatistiği çok değişkenli normal dağılıma sahip bir ortalama vektörünün bir sabit değere eşit olup olmadığının test edildiği hipotez testlerinde kullanılır. Bu istatistiğin çizelgelere uyarlanması ile geliştirilen Hotelling  $T^2$  çizelgeleri ortalama vektöründeki kaymanın belirlenmesinde kullanılır. Çizelge, süreç kontrol altındayken toplanan çok değişkenli verilerle oluşturulur. Süreç ortalama vektörü ve varyans-kovaryans matrisi tahmin edildikten sonra çizelgenin üst kontrol sınırı hesaplanır. Bu işleme birinci aşama adı verilir. Ardından gelen ikinci aşamada süreçten alınan gözlemlerden elde edilen  $T^2$  istatistik değerleri gözlem sırasıyla çizelgeye yerleştirilerek üst kontrol sınırının üstünde bir değer bulunup bulunmadığı takip edilir. Böyle bir değer kontrol dışı durum sinyali olarak değerlendirilir ve olası hata kaynakları araştırılır (Çetin ve Birgören, 2007).

Örnek büyüklüğü 1 olan  $m$  adet örnek ve her örneğin  $p$  adet kalite karakteristiğinin olduğu bir durumda  $\bar{X}$  ve  $S$  sırasıyla örnek ortalama vektörü ve kovaryans matrisi iken Hotelling  $T^2$  istatistiği aşağıdaki gibidir. edilecektir.

$$T^2 = (x - \bar{x})' S^{-1} (x - \bar{x})$$

Tracy, Mason ve Young (1992) örnek büyüklüğü bir olduğunda birinci faz limitlerinin beta dağılım göstermesi gerektiğini vurgulamışlardır. Buna göre limitler ekteki gibidir. Bu aşamada normal süreçten veri alınarak  $T^2$  kontrol grafiği oluşturulacak ve kontrol dışı durumlar silinerek temiz bir referans örnek veri elde edilecektir.

$$\text{ÜKL} = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2}$$

$$\text{AKL} = 0$$

İkinci fazda referans örnek veri grubundaki değerlerle yeni bir  $T^2$  kontrol grafiği



oluşturulur ve mevcut üretim incelenir. İkinci faz limitleri F dağılım göstermektedir.

$$\text{ÜKL} = \frac{p(m+1)(m-1)}{m^2 - mp} F_{\alpha, p, m-p}$$

$$\text{AKL} = 0$$

### 5- Referans Veri Kümesinin Oluşturulması

Ana kütle parametrelerinin bilinmediği, hedef değerlerinin belirlenmediği bir durumda, anakütle parametrelerinin; gerekli olan varsayımları sağlayan aykırı gözlem içermeyen bir veri kümesinden tahmin edilmesi gerekmektedir. Bunun amacı, ilk kontrol limitlerini kurmak için bir temel oluşturmak ve herhangi bilinmeyen parametreleri tahmin etmektir. Bu veri setinin oluşturulması uygulamada prosesin doğru incelenebilmesini sağlayan en önemli basamak olarak kabul edilmektedir. Uygulamalarda bilinmeyen  $\mu$  ve  $\Sigma$  parametrelerini,  $x$  ve  $S$  değerlerini kullanarak tahmin ederiz. Bu değerler Referans veri kümesi kullanılarak elde edilir. (Mason ve Chou,2003) Tek değişkenli kalite kontrolde olduğu gibi çok değişkenli kalite kontrol de iki aşamadan oluşmaktadır. Referans Veri Kümesi'nin geliştirilmesi I.Aşama olarak bilinmektedir. Seçilen yeni gözlem vektörlerinin I.Aşamadaki bulgulara uygunluğunun araştırılması ise II.Aşamadır.(Tracy ve Young 1992). Birinci aşamanın amacı ikinci aşamada kullanılacak kontrol sınırlarını belirlemektir. Birinci aşamada belirli sayıda gözlemden oluşan bir alt örnek grubu oluşturulur. Parametreler tahmin edilerek çizelge oluşturulur. Kontrol dışı durumlar belirlenerek ilk veri setinden çıkarılır ve bu işlemler tüm veriler kontrol sınırının altında olana dek homojen bir veri kümesi elde edilene kadar tekrar edilir. Bu noktada birinci aşama sona ermektedir ve tüm aykırı gözlemler veri kümesinden çıkarıldıktan sonra kalan veri kümesinin "Referans(Geçmiş) Veri Kümesi" olduğu kabul edilmektedir ve Referans veri kümesi, kontrol altındaki prosesin tanımlanmasında temel alınmaktadır. İleriye dönük bir yaklaşım olan ikinci aşamanın amacı ise sürecin birinci

aşamada elde edilen dağılım yapısına uygunluğunu kontrol etmek ve sürecin kontrol altında olmasının devamlılığını sağlamaktır. Bunun için alınan gözlemlerde kontrol dışı durumlar saptanmaya çalışılır.

### 6-Sanayi Uygulaması

Bu çalışmada Hotelling  $T^2$  çizelgeleri bir yağ üretim fabrikasında yağ üretim sürecine uygulanmıştır. Süreçte üretilen yağlardan düzenli şekilde numune alınarak yağ içerisindeki yağ kalitesini etkileyen faktörlerin oranları ölçülmüştür. Zeytinyağında kalite tespit yöntemleri, üretimde yağın duyuşal, fiziksel ve kimyasal özelliklerini en üst düzeyde koruyacak şekilde üretimi sağlamaktadır. Fiziksel Analiz; Zeytinler işletmeye geldiği anda çeşit, yaprak, çöp, vb. yabancı maddelerden temizlenmesiyle ön işleminden geçmektedir. Kimyasal Analiz; Zeytinyağının akredite laboratuvarlar tespit edilen ve genellikle kullanılan değerler şunlardır; Serbest yağ asitliği, zeytinyağları için önemli bir kalite ölçütüdür. Çünkü yağın serbest yağ asitliği içeriği bir taraftan zeytinyağlarının sınıflandırılmasında, diğer bir deyişle, ticari değerlerinin belirlenmesinde kullanılırken, diğer taraftan da zeytinyağının yemeklik veya rafinajlık olması hakkında bilgi vermektedir. Bu nedenle, meyve hasadından başlayarak, yağ halinde sofraya gelene kadar geçen süreçte, gerek zeytin meyvesinde, gerekse içerdiği yağında serbest asitlik artışına neden olabilecek etkenlerin en az düzeye indirilmesi veya mümkünse bertaraf edilmesi çok büyük önem taşımaktadır (Bıyıklı, 2009). Serbest yağ asitleri zeytin meyvesinin olgunlaşması ile artmaktadır. Zeytinyağının yağ asidi kompozisyonunu; çeşit, meyve olgunlaşması, verim, ekolojik koşullar, kültürel işlemler gibi çok sayıda agronomik faktör etkilemektedir. Zeytinyağının yağ asidi sağlık açısından büyük önem taşımaktadır (Kutlu ve Şen, 2011). Peroksit değeri; yağların oksidasyonunda oluşan hidroperoksitlerin doğrudan ölçümüne dayanmaktadır. Natürel zeytinyağları için kabul edilen yasal üst limit, diğer zeytin ve prina yağları için verilen limitlerden oldukça yüksektir. Çünkü rafinasyon işlemi sırasında ve özellikle deodorizasyon aşamalarında, daha önce oluşan hidroperoksitler parçalanmakta veya yüksek vakumda yağdan

uzaklaştırılmaktadır (Bıyıklı, 2009). Ultraviyole ışıkta özgül soğurma; zeytinyağlarının kalitelerinin belirlenmesinde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu ölçümün yapılmasında yararlanılan metot, diyen konjuge bileşiklerin 232 nm, triyen konjuge ürünlerinin ise, 270 nm dalga boyundaki ışığı absorbe etmesi prensibine dayanmaktadır. Söz konusu ürünler ya oksidasyon veya rafinasyon işlemleri sırasında ve özellikle ağartma ve deodorizasyon aşamasında oluşabilmektedir. Bu nedenle analiz sonuçlarının yorumlanmasında, sadece bu analiz esas alınır,sa, güçlük çekilmektedir (Bıyıklı, 2009). Bu çalışmada natürel zeytinyağı olarak ifade edilen zeytinyağlarından örnekler alınarak çok değişkenli grafikler yardımıyla süreç analiz edilmiştir. Yapılan çalışmada, serbest yağ asitliği ve ultraviyole ışıkta özgül soğurma değerleri ölçülmüştür. Zeytinyağlarındaki serbest yağ asidi miktarı önemli bir kalite unsurudur ve değişik zeytinyağlarını karakterize etmek için geleneksel olarak kullanılmaktadır. Serbest yağ asitliği zamanla lipaz enzimi, ısı ve ışık gibi etkenlerden etkilenecek artar. Bu artış ransidite ya da acılaşıma adı verilen kalite kusurunun oluşmasına yol açar. Yağ çeşitleri için % en çok asitlik yüzdesi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Zeytinyağı çeşidi	Serbest Asitlik (% en çok, oleik asit cinsinden)
Ham zeytinyağı	>2.0
Naturel sızma zeytinyağı	<0.8
Naturel Birinci Zeytinyağı	<2.0
Rafine Zeytinyağı	<0.3
Riviera Zeytinyağı	<1.0
Ham Pirina Yağı	
Rafine Pirina Yağ	<0.3
Pirina Yağı	<1.0

**UV ışıkta özgül soğurma** Çok kullanılan bir kalite belirleme yöntemidir. Dien konjuge bileşiklerinin 232 nm ve trien konjuge bileşikleri ise 270 nm'de ışığı absorbe etmektedirler. Söz konusu ürünler, ya oksidasyon ya da rafinasyonda (ağartma ve deodorizasyonda) oluşabilmektedir. Zeytinyağlarının 232 ve

270 nm'de ölçülen özgül absorpsan değerleri, oksidasyona dayanıklılıklarının bir ölçütü olarak değerlendirilen önemli bir kalite kriteridir. 232 nm'de ölçülen özgül absorpsan değeri, oksidasyonun birinci basamağı olan hidroperoksitlerin ve konjuge dienlerin; 270 nm'de ölçülen özgül absorpsan değeri de oksidasyonun ikinci basamağı olan karbonilik bileşikler ile konjuge trienlerin göstergesidir.

Zeytinyağı çeşidi	E (232nm)	E (270 nm)
Natürel sızma zeytinyağı	<2,5	< 0.22
Natürel Birinci Zeytinyağı	<2,6	< 0.25
Rafine Zeytinyağı	-	< 1,10 <sup>&lt;4&gt;</sup>
Riviera Zeytinyağı	-	< 0.90 <sup>(4)</sup>
Rafine Pirina Zeytinyağı	-	< 2,0
Pirina Yağı	-	< 1.70

## 7-Çok değişkenli Grafikler

### Aşama 1

Birinci aşamada üst kontrol sınırı

$$\text{ÜKS} = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \quad 1$$

alınır. Burada  $\beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2}$ ,  $p/2$  ve  $(m-p-1)/2$

parametrelili Beta dağılım yüzdeliğidir.  $\mu$  ve  $\Sigma'$ 'nin tahmincileri  $\bar{X}$  ve  $S$  ile çizelgeye işaretlenecek  $T^2$  değerleri şöyle hesaplanır:

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \quad 2$$

$$S = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})' \quad 3$$

$$T_i^2 = (X_i - \bar{X})' (S)^{-1} (X_i - \bar{X}) \quad 4$$

Eşitlik 4'e göre hesaplanan m adet değerden Eşitlik 1'de verilen kontrol sınırını aşanlar, ilk veri kümesinden atılır, yeni (azalan) m değerine göre Eşitlik 1-4 kullanılarak yeni kontrol sınırı ve  $T^2$  değerleri hesaplanıp çizelgelenir. Bu veri atma işlemi kontrol sınırları dışında nokta kalmayana kadar tekrar edilir. Yağ işleme sürecinden n=1 büyüklüğünde p=3 değişkenli model için alınan 40 örnek üzerinde alınan ölçüm değerleri şöyledir.(Ek Tablo 1)

Üst kontrol limit (ÜKL) değeri beta dağılımına göre;

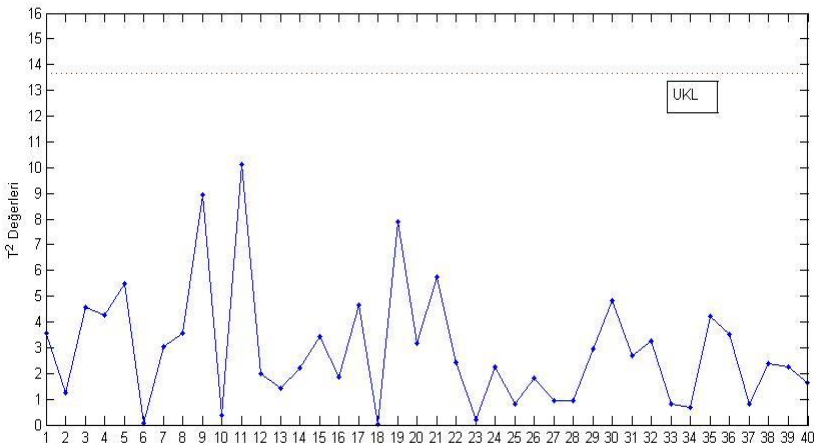
$$\text{ÜKL} = \frac{(m-1)^2}{m} \times \frac{(p/(m-p-1))F(\alpha; p, m-p-1)}{1 + (p/(m-p-1))F(\alpha; p, m-p-1)}$$

förmülü yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\text{ÜKL} = \frac{(40-1)^2}{40} \times \frac{(3/(40-3-1))F(0,001; 3,40-3-1)}{1 + (3/(40-3-1))F(0,001; 3,40-3-1)} = 13,68$$

Hesaplama sonucuna göre ÜKL değerinin 13,68 olduğu belirlenmiştir.

Hesaplanan 40 adet Hotelling  $T^2$  değeri ve bu değere ait Üst Kontrol Limiti grafiğe aktarılarak kontrol dışında gözlem olup olmadığı araştırılmıştır.



**Şekil 2:** 40 Gözlem değeri için Hotelling  $T^2$  Grafiği(Aşama1)  
Grafik incelendiğinde Üst Kontrol Limiti dışında kalan  $T^2$  değerleri yoktur. Böylece ikinci aşamaya geçilebilir. Eğer ÜKL dışında gözlem değeri bulunsaydı bu değerler çıkartılarak

kalan gözlem değerleri için yukarıdaki 1-4 adımlar kontrol dışında değer kalmayınca kadar sürdürülecekti.

### Aşama 2:

Aşama 1’de proses kontrol altına alınarak referans veri kümesi elde edilmiştir. Referans veri kümesindeki değişken ve örnek sayıları kullanılarak, prosesin kontrol limitleri aşama 2 için hesaplanır. İkinci aşama için alınan örnek gözlem değerleri ek tablo 1’de verilmiştir. Bu durumda ikinci aşamada kullanılacak üst kontrol sınırı ve işaretlenecek  $T^2$  değerleri şöyle olacaktır:

$$\bar{UKS} = \frac{p(m_s + 1)(m_s - 1)}{(m_s)^2 - m_s p} F_{\alpha, p, m_s - p} \quad (5)$$

$$T_i^2 = (X_i - \bar{X})' (S)^{-1} (X_i - \bar{X}) \quad (6)$$

Burada  $F_{\alpha, p, m_s - p}$ ,  $p$  ve  $m_s - p$  serbestlik dereceli  $F$  dağılım yüzdeliğidir. Ayrıca, Eşitlik 6’daki  $\bar{X}$  ve  $S$ ’nin referans veri kümesinden tahmin edildiğine dikkat edilmelidir; burada Eşitlik 4 ve 5,  $m$  yerine  $m_s$  kullanılarak referans veri kümesine uygulanmalıdır. Üst Kontrol Limiti,  $F$  dağılımına göre aşağıdaki formülle hesaplanmaktadır.

$$\bar{UKL} = \frac{p(m_s + 1)(m_s - 1)}{m_s^2 - m_s p} F(\alpha, p, m_s - p)$$

$P=3$ ,  $m_s=40$  ve  $\alpha=0,001$  değerleri ile Hotelling  $T^2$  Kontrol grafiğinin Üst Kontrol limiti aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\bar{UKL} = \frac{3(40+1)(40-1)}{40^2 - 40 \times 3} F(0,001, 3, 40 - 3) = 21,8574$$

Prosele ait güvenilir kontrol limiti 21,8574 olarak hesaplanmıştır. Bu kontrol limitine bağlı olarak prosesin gelecek durumu analiz edilecektir.

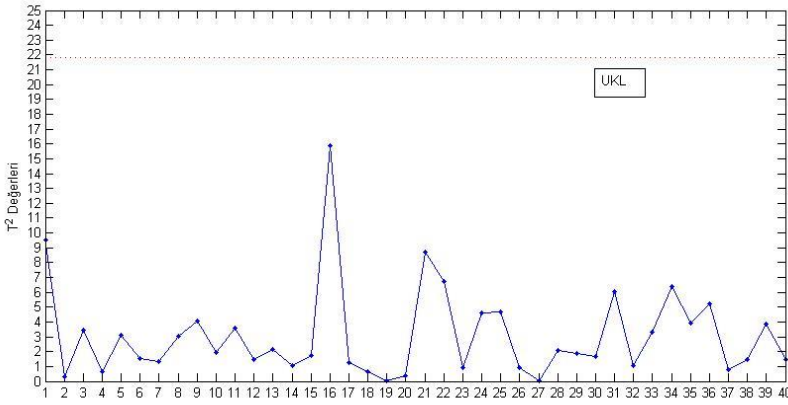
Referans veri kümesine ait değişken ortalama vektörü;

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0,0483 \\ 1,8625 \\ 0,1457 \end{pmatrix}$$

Referans veri kümesine ait kovaryans matrisi

$$S = \begin{pmatrix} 0,000379 & -0,00171 & 0,000362 \\ -0,00171 & 0,546306 & -0,00558 \\ 0,000362 & -0,00558 & 0,003128 \end{pmatrix}$$

Şeklinde elde edilir. Referans veri kümesinin değişken ortalamaları ve kovaryans matrisi kullanılarak aşama 2 için Hotelling  $T^2$  değerleri Matlab yazılımı kullanılarak hesaplanmıştır. Matlab yazılımından elde edilen kontrol limit değerleri ve Hotelling  $T^2$  değerleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.



**Şekil 3:** İkinci aşama için oluşturulan Hotelling  $T^2$  Grafiği  
Grafik incelendiğinde gözlemlerin kontrol dışında olmadığı görülmüştür.

## 8- Sonuç

Çok değişkenli istatistiksel proses kontrol metodlarının son yıllarda yabancı literatürde büyük önem arz ettiği ve özellikle endüstriyel alanda çok fazla kullanıldığı görülmektedir. Özellikle kontrol grafikleri, prosteki değişimin görsel olarak sürekli izlenebilmesini sağladığından ve kolay uygulanıp yorumlanabildiğinden çok sık kullanılmaktadır. Bu doğrultuda, çalışmanın teori bölümünde çok değişkenli istatistiksel proses kontrol yöntemlerinden Hotelling  $T^2$  kontrol grafiği incelenmiş, bu grafiklerin kullanımını göstermek amacıyla yağ sanayinde yağ kalitesini etkileyen değişkenler kullanılarak çok değişkenli istatistiksel proses kontrol (İPK) uygulaması yapılmıştır. İki aşama halinde Hotelling  $T^2$  kontrol grafikleri oluşturulmuştur. Birinci aşamada üst kontrol limitini aşmayan değer kalıncaya kadar  $T^2$  değerleri hesaplanmış. Hesaplanan bu aşamadaki ortalama

vektörü ve kovaryans matrisi yardımıyla ikinci aşamada elde edilen gözlem değerlerine ait  $T^2$  değerleri hesaplanmıştır. Bu yeni değerler ve üst kontrol limiti sınırı, Hotelling  $T^2$  kontrol grafiğine aktarılarak proses hakkında karar verilmiştir. Yapılan çalışmada kontrol limitleri dışına taşan bir gözlem değeri görülmemiştir.

### Kaynakça

- 1-Baray, Alp: Üretimde Varyasyon: İstatiksel Yaklaşım, İstanbul, Çağlayan Kitapevi, 2008.
- 2- Bıyıklı, K. 2009. Türk Zeytinyağlarının Saflık Derecelerinin Belirlenmesi. Ankara Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü. Gıda Mühendisliği Anabilim Dalı. Yüksek Lisans Tezi. Ankara.
- 3- Çetin, Suna, Birgören, Burak: “Çok Değişkenli Kalite Kontrol Çizelgelerinin Döküm Sanayiinde Uygulanması”, Gazi Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi, C. XXII, No: 4, 2007, s. 809-818.
- 4- Fuchs, Camil, Kenett, Ron S.: Multivariate Quality Control: Theory and Applications 54, C.LIV, United States of America, Marcel Dekker, Inc., 1998.
- 5- Kotz, S; Lovelace, L, (1998), Process Capability Indices in Theory and Practice, Arnold, London
- 6- Kutlu, E. Şen, F. 2011.Farklı Hasat Zamanlarının Gemlik Zeytin (*Olea Europea L.*) Çeşidinde Meyve ve Zeytinyağı Kalitesine Etkileri. Ege Univ. Ziraat Fak. Derg., 2011, 48 (2): 85-93
- 7- Montgomery, D.C., Introduction to Statistical Quality Control, 4th. ed., Wiley&Sons, New York, 2001.
- 8- Montgomery, D. C, (2005), Introduction to Statistical Quality Control, John Wiley & Sons., New York.
- 9- Montgomery, Douglas C.: Introduction to Statistical Quality Control, 5. bsk, New York, John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- 10- Özdamar, Kazım; Paket Programlar İle İstatistiksel Veri Analizi (Çok Değişkenli Analizler), İkinci Baskı, Kaan Kitapevi, 1999. 97-98
- 11- Özkale, Mahmude Revan, Kaçıranlar, Selahattin, Hotelling  $T^2$  Kontrol Grafiği ve MYT Ayrışımı



- 12- Tracy, Nola D., Young, John C., Mason, Robert L.: "Multivariate Control Charts for Individual Observations", Journal of Quality Technology, C. XXIV, No: 2, 1992, s. 88-95.
- 13- Yang, Kai, Trewn, Jayant : Multivariate Statistical Methods in Quality Management, United States of America, McGrawHill Professional, 2004.
- 14-Wierda, S.J., "Multivariate Statistical Process Control- Recent Results and Directions for Future Research", Statistica Neerlandica, 48(2), 147-168, 1994.

Ek Tablo 1

Sıra	1. Aşama Gözlem Değerleri			2. Aşama Gözlem Değerleri			1inci Aşama $T^2$ değerleri	2nci aşama $T^2$ değerleri
	Serbest Asitlik	E(232nm)	E(270nm)	Serbest Asitlik	E(232nm)	E(270nm)		
1	0,04	0,00	0,80	0,95	0,09	0,16	3,560573123	9,51805669
2	0,05	0,04	1,11	1,83	0,13	0,12	1,226012451	0,31242092
3	0,05	0,03	3,28	2,91	0,09	0,17	4,577650442	3,477685507
4	0,08	0,04	2,31	1,39	0,12	0,14	4,268233444	0,665659785
5	0,04	0,02	3,04	1,74	0,04	0,17	5,499589764	3,119040042
6	0,05	0,06	1,87	2,59	0,16	0,16	0,067449355	1,520551895
7	0,06	0,03	2,67	2,15	0,21	0,16	3,018516629	1,363444976
8	0,02	0,08	1,25	1,29	0,09	0,17	3,554314021	3,024043781
9	0,01	0,02	1,03	0,96	0,21	0,13	8,923476351	4,090524889
10	0,05	0,07	1,66	1,80	0,12	0,21	0,378217999	1,943434761
11	0,08	0,07	1,53	1,51	0,32	0,09	10,10961116	3,587617418
12	0,03	0,06	2,14	2,57	0,18	0,15	1,981623471	1,435533832
13	0,03	0,05	2,44	1,13	0,14	0,21	1,424273793	2,178490729
14	0,06	0,06	1,25	2,17	0,22	0,12	2,208525692	1,027913152
15	0,04	0,04	3,11	1,51	0,09	0,20	3,450435615	1,744157274
16	0,03	0,02	2,57	0,23	0,15	0,28	1,860422729	15,8684956
17	0,03	0,06	2,44	2,51	0,22	0,15	4,64231663	1,273271177
18	0,05	0,05	1,81	1,43	0,15	0,12	0,013360908	0,679010094
19	0,09	0,05	0,43	1,68	0,16	0,15	7,897040039	0,065080283
20	0,08	0,05	1,20	2,28	0,17	0,14	3,187023849	0,349748705
21	0,03	0,02	0,35	0,47	0,12	0,21	5,753051058	8,740977304
22	0,07	0,09	1,01	1,31	0,19	0,26	2,418000822	6,709392174
23	0,04	0,03	1,97	2,02	0,13	0,14	0,210078769	0,949237595
24	0,04	0,05	2,47	1,53	0,07	0,26	2,254313422	4,621668755

25	0,05	0,08	2,01	1,08	0,10	0,24	0,827015516	4,690638009
26	0,05	0,04	2,83	1,64	0,15	0,18	1,808412308	0,897674187
27	0,06	0,05	1,34	1,82	0,14	0,15	0,920408451	0,012009255
28	0,04	0,04	1,43	1,76	0,11	0,21	0,94596567	2,058975861
29	0,03	0,04	1,58	1,00	0,06	0,12	2,957467029	1,901529546
30	0,09	0,04	1,35	1,17	0,20	0,18	4,837492636	1,665287016
31	0,02	0,09	1,45	0,89	0,13	0,22	2,675695065	6,030822451
32	0,04	0,06	1,69	2,41	0,23	0,16	3,25008937	1,051215181
33	0,04	0,02	2,21	2,30	0,10	0,17	0,818147972	3,333793306
34	0,05	0,03	2,45	2,62	0,14	0,01	0,668595311	6,390732898
35	0,08	0,04	1,79	0,79	0,11	0,21	4,216207281	3,961726019
36	0,04	0,01	3,17	1,27	0,16	0,14	3,537163631	5,191447309
37	0,04	0,05	1,72	1,38	0,10	0,12	0,797080057	0,770667279
38	0,06	0,07	2,46	1,74	0,21	0,14	2,363928674	1,500551146
39	0,03	0,06	1,16	0,90	0,11	0,09	2,237641563	3,860496618
40	0,06	0,03	2,12	1,37	0,21	0,13	1,654979681	1,500446296