Ekonomi, Politika & Finans Araştırmaları Dergisi, 2020, 5(3): 822-844
Journal of Research in Economics, Politics & Finance, 2020, 5(3): 822-844
Araştırma Makalesi / Research Article, DOI: 10.30784/epfad.790658

ORTALAMA-AŞAĞI YÖNLÜ VARYANS TABANLI RİSK ÖLÇÜTLERİ VE STOKASTİK GETİRİLİ PORTFÖY OPTİMİZASYONU

Portfolio Optimization with Mean-Downside Variance Based Risk Measures and Stochastic Return

Elif ACAR*

Özet

Post Modern Portföy teorisi çerçevesinde aşağı yönlü risk ölçüt yöntemlerinin popülerliği artmıştır. Pek çok çalışma aşağı yönlü risk ölçütleri ile birlikte farklı koyarıvaryans formülü önermiştir. Bu çalışmanın amacı varyans, yarı varyans ve alt kısmi moment (LPM) gibi farklı risk ölçütlerini, farklı koyarıvaryans formülleri ile birlikte uygulayan portföy optimizasyon modellerinin performansını karşılaştırmaktır. Çalışmada yarı varyans risk ölçütlerinde kullanılan farklı koyarıvaryans istatistikleri arasındaki farklılıkları göstermek için Estrada (2007) ve Nawrocki (1991) yaklaşımları seçilmiştir. Modellerin sonuçları ortalama varyans sonuçları ile de karşılaştırılmaktadır. Karşılaştırma ölçütü olarak Sharpe ve Sortino oranları kullanılmaktadır. Çalışmada, LPM yaklaşımı ile farklı risk tutumları olan yatırımcılar için etkin portföyler oluşturulur. Ek olarak, portföy getirisinin belirsizliğinden korunmak için stokastik modelleme ile birlikte LPM yaklaşımı kullanılarak portföy optimizasyonu gerçekleştirilir. Aşağı yönlü riski kontrol etmek için Nawrocki modelinin yararlı olduğu, varlıklar arasındaki korelasyonu hesaplamalara dahil ettiğinden daha iyi bir seçim olduğu ve stokastik getirili modelin deterministik modele göre daha muhafazakar sonuçlar ürettiği sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Aşağı Yönlü Risk, Koyarıvaryans, Stokastik

JEL Kodları: C44, C61, G11

Abstract

The downside risk measure methods have gained in popularity within the frame of the Post-Modern Portfolio theory. Many studies have suggested different cosemivariance formulas with the downside risk measures. The purpose of this study is to compare the performances of the portfolio optimization models that apply different risk measures such as variance, semi-variance, and lower partial moment (LPM) with the different cosemivariance formulas. In the study, the Estrada (2007) and Nawrocki (1991) approaches were chosen to demonstrate the differences between different cosemivariance statistics used in the semi-variance risk measures. The results of the models are also compared with the mean-variance results. Sharpe and Sortino ratios are used as a comparison measure. In the study, efficient portfolios are created for investors having different risk attitudes with the LPM approach. Additionally, portfolio optimization is conducted by using the LPM approach with the stochastic modeling to avoid the uncertainty of portfolio returns. It was concluded that the Nawrocki model is beneficial to control the downside risk and it is a better choice as it includes the calculation of correlations between the assets and that the stochastic return model produces more conservative results compared to the deterministic model.

Keywords: Downside Risk, Cosemivariance, Stochastic

JEL Codes: C44, C61, G11

* Dr. Öğr. Üyesi, Yozgat Bozok Üniversitesi, İİBF, İşletme Bölümü, elif.acar@yobu.edu.tr, ORCID: 0000-0001-6974-4866

Makale Geliş Tarihi (Received Date): 4.09.2020 Makale Kabul Tarihi (Accepted Date): 27.12.2020

1. Giriş

Finansal piyasaların küreselleşmesi ve entegrasyonu, finansal ürünlerin çeşitliliğini artırmaktadır. Çok çeşitli yatırım araçlarının artan oranda varlığı yatırım yöneticileri arasındaki rekabeti arttırmaktadır ve dolayısıyla yöneticiler risk yönetimi için daha etkili yöntemler aramaktadır. Bilim insanları ise risk ölçümü için çeşitli teknikler sunmakta ve geliştirmektedir. Bu kapsamda en etkili sayısal risk ölçüt yöntemlerinin araştırılması gerekmektedir.

Yatırım riskini niceliksel olarak tanımlayan Henry Markowitz, portföy yönetimine matematiksel bir yaklaşım kazandırmıştır. Portföy yönetimi konusunun teorik ve pratik yönleri yaklaşık 70 yıldır Markowitz (1952) tarafından önerilen Modern Portföy Teorisi (MPT) çerçevesinde şekillenmiştir. Bu konuda sayısız araştırma yapılmıştır ve MPT hala finans alanındaki en popüler yöntem olmaktadır. MPT’nin en büyük katkısı, yatırım kararları için MV (ortalama varyans-Mean Variance) yaklaşımı sayesinde bir risk / getiri çerçevesi oluşturmasıdır (Rom ve Ferguson, 1994, s. 349).

Ancak geleneksel Markowitz (1952) MV yaklaşımının, Markowitz’in (1959) ve MPT’nin diğer öcüleri ve William Sharpe'nin de kabul ettiği gibi, önemli sınırlamaları vardır (Kroencke ve Schindler, 2010; Rom ve Ferguson, 1994). MPT, varlık getirilerinin varyansının yatırım riskinin doğru ölçüsü olup olmadığı konusunda eleştirilmiştir. Teorinin önemli varsayımları olan varlık getirilerinin normal dağılımda olması ve yatırımcının 2. dereceden amaç fonksiyonuna sahip olması varsayımları gerçek hayat verileri için geçerli değildir. Birçok araştırmacı gerçek hayatta varlık getirilerinin dağılımının asimetrik olduğunu ve çarpıklık sergilediğini göstermiştir (Jaaman, Hoe ve Zaidi, 2011, s. 78).

Portföy teorisindeki son gelişmeler, günümüzün artan bilgi işlem gücü ile birleştiğinde, bu sınırlamaların üstesinden gelinmiştir. Zaman içinde çeşitli aşağı yönlü risk (downside risk) ölçütleri önerilmiş ve geliştirilmiştir. Ortaya çıkan genişletilmiş risk/getiri paradigması Post-Modern Portföy Teorisi (PMPT) olarak bilinmektedir (Rom ve Ferguson, 1994, s. 349). PMPT, aşağı yönlü risk kavramı başlığı altında; SV (yarı varyans-Semi Variance), LPM (alt kısmi moment -Lower Partial Moment), VaR (riske maruz değer-Value at Risk), çarpıklık ve basıklık kavramlarının portföy yönetim sürecine dahil edilmesi olarak tanımlanabilir. Markowitz (1959) varyans ve standart sapma yerine yarı varyans, yarı sapma veya diğer risk ölçütlerine dayanan bir çerçevenin yatırımcıların risk algısını yansıtmak ve getiri dağılımlarındaki asimetriden korunmak için daha uygun olduğunu belirtmiştir.

Tanım olarak, aşağı yönlü risk ölçütü sadece belirli bir eşiğin altındaki getirileri ölçmektedir. Aşağı yönlü risk kavramının temel anlayışı şöyle ifade edilebilir; örneğin bir yatırımcının %10 getirinin üzerinde bir getiri beklentisi olduğunu varsayılsın, portföye girecek fonların belirli bir dönemdeki getirisi eğer %10’un altında ise bu fona yatırım yapılırsa yatırımcı için risk teşkil edecektir, herhangi bir dönemdeki %10’un üzerindeki getirisi ise yatırımcı için risk teşkil etmeyecektir çünkü yatırımcının isteği bu yöndedir, olumlu sapmalar risk olarak düşünülmez çünkü eşiğin üzerindeki tüm getiriler risksiz bir fırsattan başka bir şey değildir. Eşik getiri düzeyinden olumsuz sapmalar risk olarak algılanır ve hesaplamalara dahil edilir. Oysa ki Markowitz’in MV çerçevesindeki risk ölçütü, ortalama getiriden aşağı ve yukarı yönlü hareketleri yani sapmaları toplayarak birlikte ele alan bir ölçüttür. Olumlu sapmaların gerçekten de risk olarak hesaplamalara dahil edilmesi doğru bir yaklaşım değildir. Bu yönüyle aşağı yönlü risk ölçütü, yatırımcının belirlenen eşik ya da kıyas getirinin altındaki getirilere odaklandığından riske karşı algı ile tutarlıdır. Portföy modellerinde eşik getiri düzeyi için, varlığın ortalama getirisi, risksiz faiz oranı, belirli bir alternatifin getirisi, ya da sadece 0 değeri kıyas düzey olarak seçilebilmektedir.

Bazı araştırmacılar, özellikle varlıkların aşağı yönlü birlikte hareketlerini ölçen matematiksel formüllerin karmaşası sebebiyle, önerilen yarı varyans gibi aşağı yönlü risk ölçütlerine de eleştiriler getirmiştir. Literatürde varlıkların aşağı yönlü birlikte değişkenlikleri yani birlikte yarı varyansları için "koyarıvaryans" (cosemivariance) ifadesi ve birlikte aşağı yönlü kısmi momentleri için "co-LPM" ifadeleri kullanılmaktadır. Literatürde koyarıvaryans için yeterli araştırma ve teorik gerekçe bulunmamaktadır, çok farklı sonuçlar bulunmaktadır. Bu istatistik oldukça tartışmalıdır. Nicel aşağı yönlü risk ölçüt yöntemlerinin ampirik çalışmalarla ek değerlendirilmesine ihtiyaç vardır. Bu çalışmanın ana hedefi ilk aşamada farklı koyarıvaryans formüllerinin kullanışlılığını değerlendirmektedir. Çalışmada farklı araştırmacıların önerdiği çeşitli matematiksel yaklaşımlara göre hazırlanan koyarıvaryanslar arasındaki farklıkları göstermek için, aşağı yönlü model sonuçları ortalama varyans yaklaşımı sonuçları ile karşılaştırılacaktır. Diğer bir ifadeyle farklı koyarıvaryans formülleri tartışmalı bir ölçüt olduğu için güvenilir bir istatistik olup olmadığını araştırılacaktır. Çalışmanın literatüre katkısı; uluslararası alanda Nawrocki (1991) ve Estrada (2007) koyarıvaryans formülleri ilk defa karşılaştırılmaktadır, ulusal literatürde koyarıvaryans formülleri ile ilgili henüz bir karşılaştırma hiç yapılmamıştır ve aşağı yönlü risk ölçütlerinin kullanıldığı çalışmalar çok az sayıdadır.

Porföy optimizasyonunda etkin ve güvenilir aşağı yönlü risk ölçüt yöntemine karar verildikten sonra, çalışmanın ilerleyen aşamalarında aşağı yönlü risk ölçüt yöntemleri ile farklı risk algıları için optimizasyon gerçekleştirilecektir ve deterministik yapıda olan standart bir model yerine varlık getirilerindeki belirsizliğin etkisini hesaba katan stokastik portföy optimizasyon modeli uygulanacaktır. Çalışmada belirsizlikle başa çıkma yaklaşımı olarak Şans Kısıtlı Stokastik Programlama modeli araştırma konusundan fazla uzaklaşmadan yöntemin kolay uygulanabilirliği sebebiyle seçilmiştir. Çalışma, portföy yönetimi konusunda farklı risk algıları için hem aşağı yönlü risk ölçütünün hem getiri Şans Kısıtlı Stokastik Programlamanın birlikte ele alınması yöneylem araştırmasında kullanılan matematiksel modellerin finans alanına gerçek hayat çalışması ile uygulanması ile de literatüre katkı sağlayacaktır.

Bu çalışmanın amacı varyans, SV ve LPM gibi farklı risk ölçütlerini farklı koyarıvaryans formülleri ile uygulayan portföy optimizasyon modellerinin performansını karşılaştırmaktır. Ayrıca, LPM yaklaşımı ile farklı risk tutumları olan yatırımcılar için etkin portföyler oluşturmaktır. Ek olarak, portföy getirisinin belirsizliğinden korunmak için stokastik modelleme ile birlikte LPM yaklaşımı kullanarak portföy optimizasyonu gerçekleştirmektir.

Bir sonraki bölümdeki literatür taraması, alternatif risk ölçütlerine gelen eleştiriler doğrultusunda yapılmaktadır ve benzer çalışmaların sunumu takip etmektedir. Daha sonra yöntem bölümü, beş ayrı kısım olarak hazırlanmaktadır. Sırasıyla, MV, aşağı yönlü risk ölçütlerinden SV ve LPM ölçütleri, koyarıvaryans matrislerinin matematiksel sunumu ile birlikte açıklanmaktadır ve araştırmada kullanılacak modeller sunulmaktadır. İlerleyen kısımda farklı yöntemlere göre hazırlanan modellerin karşılaştırılması için çeşitli performans ölçütleri açıklanmaktadır. Son kısımda Şans Kısıtlı Programlama problemi modeli sunulacaktır. Dördüncü bölümde çalışmanın verileri ve genel model çözümlemesi özetlendikten sonra beşinci bölümde, modeller karşılaştırılmaktadır, farklı risk tutumları için etkin sınırlar ve varlık tahsisi yapılmaktadır ve stokastik model sonuçları sunulmaktadır, kısaca çalışmanın ampirik sonuçları raporlanmaktadır.

2. Literatür

Post Modern Portföy Teorisi çerçevesinde MV modeline alternatif pek çok aşağı yönlü risk ölçüt yöntemleri önerilmiştir. Bunlardan en önemli olanları; SV, LPM, VaR olarak sıralanabilir. Bu bölümde bu yaklaşımlara getirilen eleştiriler çerçevesinde literatür taranmıştır. Daha sonra, benzer çalışmalar sunulmuştur.

2.1. Alternatif Risk Ölçütleri ve Eleştiriler

Markowitz (1952) MV yaklaşımının önemli varsayımı; varlık getirilerinin hepsi eliptik olarak dağılır, yani simetrik bir çan şekilli dağılım olan normal dağılımdır. Ancak, temel alınan getiri verileri normal olarak dağılmazsa, varyansın yanıltıcı sonuçlar vermesi muhtemeldir ve getiriler çarpık dağılıma sahipse varyans riski ölçmek için verimsiz bir ölçü olmaktadır ve gerçek hayat getiri verileri asimetrik yaklaşık olarak lognormal dağılma eğilimindedir. Getiri verilerindeki basıklık ve çarpıklık değerleri sebebiyle varyansın gerçek riski yansıtamaması muhtemeldir (Boasson, Boasson ve Zhou, 2011). Uygun olmayan bir risk ölçütü ile portföy optimizasyonu yanlış varlık tahsisi kararlarına yol açacaktır ve etkin sınır oluşturmak yanlış sonuçlara neden olacaktır (Boasson vd., 2011, s. 58).

PMPT formülleri ile Modern Portföy Teorisinin sakıncaları önemli ölçüde azaltılabilmektedir. PMPT, bir varlığın gerçek şeklinin daha doğru bir temsilini sağladığı için, PMPT optimizasyon çalışmaları genellikle daha doğru sonuçlar sağlayacaktır yani, aşağı yönlü risk yaklaşımı, MV yaklaşımının beklenen getirisini korurken veya iyileştirirken riskini azaltabilmektedir (Rom ve Ferguson, 1994).

Roy (1952), yatırım literatüründeki aşağı yönlü risk ölçüsünü tartışan ilk kişidir. Önce güvenlik ilkesini benimseyerek, yatırım riskini, yatırım değerinin belirli hedef veya afet seviyesinin altına düşme olasılığı ile ölçmüştür. Roy, Markowitz’in (1952) etkin sınırına, belirli bir hedef değerin altına düşme olasılığı en düşük portföyü seçen bir kriter eklemiştir (Boasson vd., 2011, s. 60). Özellikle, beklenen getiri "r" ve standart sapma "s" dikkate alındığında, yatırımcılar "d" afet seviyesinin altına düşme olasılığı en düşük olan portföyü seçme eğilimindedir. Yani yatırımcılar, (r-d) / s oranını maksimize etmeye çalışacaktır. Roy’un ana katkısı (yatırımcıların belirsizlikle karşılaştıklarında ilk önce güvenlik ilkesini tercih edecekleri kavramı) aşağı yönlü risk ölçüt araştırmasının daha sonraki evrimi için öğretici olmuştur (Boasson vd., 2011).

Literatürdeki aşağı yönlü risk ölçütlerinden en önemlisi SV yaklaşımıdır. Markowitz, (1959) getiri dağılımları normal olduğunda hem SV hem de MV ölçütünün aynı doğru sonuçları verebileceğini göstermiştir. Ancak, getiri dağılımlarının normal olmadığı durumlarda, SV risk ölçütünün daha iyi bir çözüm üretme olasılığının daha yüksek olduğunu belirtmiştir.

Literatürde karşılaşılan aşağı yönlü risk ölçütlerinden bir diğeri alt kısmi moment risk ölçütleridir. Bu ölçütler, Markowitz’in (1959) önerdiği SV ölçütünün özel bir türüdür. LPM risk ölçütleri belirli bir kıyas getiri düzeyinin altındaki getirilerin varyansını hesapladığından aşağı yönlü risk ölçütleri sınıfında yer alır. Moment kavramını ifade etmek gerekirse; ortalama ve varyans, getiri ve riski ölçen ortalamaya göre alınan ilk iki momenttir. Üçüncü ve dördüncü dereceden momentler ise dağılımın çarpıklığını ve basıklığını bulmaya yardımcı olur. Ayrıca bir dağılımın normal dağılım sağlayıp sağlamadığı basıklık ve çarpıklık değerleri ile kontrol edilebilmektedir. Alt kısmi moment ise belirli eşik değerin altındaki momentleri ifade etmektedir.

Hogan ve Warren (1974) farklı bir ortalama yarı-varyans modeli geliştirmiştir ve bu risk ölçütünü, MV yaklaşımı ile karşılaştırmıştır. Ortalama SV risk ölçütünün MV'den daha başarılı bir risk ölçütü olduğunu belirtmiştir. Hogan ve Waren "ortak-alt kısmi varyans" kavramını tanıtan ilk araştırmacılardır. Bawa ve Lindenberg (1977), ortak-alt kısmi varyans ölçütünü asimetrik co-LPM (birlikte, eş, ortak-kısmi moment) olarak adlandırılan n dereceli bir çerçeveye geliştirmiştir (Boasson vd., 2011). Fishburn (1977) ve Harlow ve Rao (1989) daha düşük kısmi momentlerin genelleştirilmiş bir formunu tanıtmıştır (Boasson vd., 2011). Nawrocki ise (1991) simetrik bir co-LPM yaklaşımının asimetrik co-LPM'den daha üstün olduğunu ileri sürmüştür.

1990'lardan bu yana araştırmacılar aşağı yönlü risk ölçütlerini ampirik araştırmalarına uygulamaya başlamıştır. Sortino ve Meer (1991), aşağı yönlü riskin kullanılması ile portföy performansını değerlendirmek için Sortino oranını ortaya koymuştur.

Tüm olumlu görüşlere rağmen aşağı yönlü risk modellerine eleştiriler yok değildir. Risk ölçütü olarak LPM kullanılmasının en büyük zorluğu varlıkların birlikte hareketini veya korelasyonunu değerlendiren co-LPM matrislerinin oluşturulmasıdır. LPM, teorik ve sezgisel olarak sağlam olmasına rağmen, bazı limitleri vardır, çünkü hesaplanması varyans ölçütünün hesaplanmasından çok daha karmaşıktır. Fakat hesaplamadaki karmaşıklık, akademisyenlerin aşağı yönlü risk ölçütü üzerine araştırma yapmasını engellememiştir. Harlow ve Rao (1989) varlık getirilerinin korelasyonunu, yani hedef getirinin altına düşen varlık getirileri arasındaki kovaryansı göz önünde bulundurmamıştır (Boasson vd., 2011). Foo ve Eng (2000) kullandıkları aşağı yönlü risk optimizasyon modeli ile, Harlow ve Rao'nun (1989) eski çalışmasını, varlık getirilerinin aşağı yönlü kovaryansı ile birleştirerek genişletmiştir ancak çalışmaları hala karmaşık hesaplama yükü altındadır (Boasson vd., 2011). Ballestero (2005), Sharpe'nin beta regresyon denkleminden matematiksel bir türetme kullanarak koyarıvaryans matrisi geliştirmiştir. Bu yaklaşım, hesaplama karmaşıklığını büyük ölçüde hafifletmiş ve ortalama SV modelinin sonuçlarını geleneksel MV modelinden elde etmeyi sağlamıştır.

Cheremushkin (2011) çalışmasında, Estrada'nın (2007) çalışmasında kullandığı portföydeki varlıkların birlikte aşağı yönlü korelasyonlarını hesaplayan formülün yani koyarıvaryans formülünün uygulanabilir olmadığını ifade etmiştir; bir varlığın yukarı yönlü sapmalarının başka bir varlığın aşağı yönlü sapmaları ile telafi edilebileceğini fakat aşağı yönlü varyans hesaplamasında yukarı yönlü hareketler göz ardı edildiğinden yanlış sonuçlara sebep olacağını ileri sürmüştür. Özellikle aralarında negatif korelasyon bulunan varlıklar portföyde bulunuyorsa aşağı yönlü risk hesaplamasının önemli yanlışlık yaratacağı belirtilmiştir. Cheremushkin, koyarıvaryansın, varlıkların ağırlığına, bu varlıklar arasındaki korelasyona, dağılımlarının asimetrisine, dönem sayısının büyüklüğüne ve diğer faktörlere bağlı olduğunu ileri sürmüştür.

Risk yönetimi literatüründe tartışılan en yaygın risk ölçütlerinden bir diğeri de Riske Maruz Değer'dir. VaR değeri, varlığın belirli bir süre elde tutulması neticesinde belirli bir güven düzeyinde gerçekleşebilecek maksimum kaybı ifade eder. Bu açıdan aşağı yönlü risk ölçüt yöntemlerinden biri kabul edilmektedir. Koşullu Riske Maruz Değer (CVaR) ise, VaR seviyesini aşan koşullu kayıp beklentisidir. Boasson vd., (2011) çalışmasında geniş bir literatür araştırması sonucunda VaR ve CVaR yöntemlerine önemli eleştiriler sunmuştur. Bu dezavantajlar; yöntemlerin 1-10 gün arasında kısa vadeli yatırımlar için uygun olduğu, uzun vadeli yatırımlara ve varlık tahsisini gerektiren portföy optimizasyonu için uygun olmadığı, kıyas getiri düzeyinin altında büyük bir gözlem verisi gerektirdiği ve bu gözlem verisini elde etmek için simülasyon teknikleri ile birlikte kullanılması gerektiği, portföyün birleşik VaR değerinin varlıkların tekil VaR'larının toplamından daha yüksek bir VaR değeriyle sonuçlanabileceği, VaR limiti aşıldığında kayıpların büyüklüğü hakkında bilgi vermediği olarak özetlenebilir. Ek olarak, VaR kısıtlamaları olan optimal portföylerin seçilen güven seviyesine duyarlı olduğu ve sapmalı sonuçlara yol açabileceği, VaR ile risk ölçütünün olağan üstü olayları yok saydığı, ortalama-VaR optimizasyonun, bir ortalama varyans çerçevesindeki portföy optimizasyonu üzerinde mutlaka iyileşme göstermediği ifade edilmiştir.

Bu eleştiriler sebebiyle ve asıl araştırma konusundan uzaklaşmamak için bu çalışmada VaR yaklaşımıyla risk hesaplaması seçilmemiştir. Ek olarak portföy optimizasyonu alanında çarpıklığın en yüksek basıklığın en düşük olduğu portföyler daha iyi olarak belirlenmiştir. Fakat birlikte çarpıklık ve birlikte basıklık (co-skewness ve co-kurtosis) değerlerinin 3. 4. dereceden formülleri gerektirmesi ve çok karmaşık hesaplama yükleri olması sebebiyle çalışmanın ana konusu dışında tutulmuştur.

2.2. Benzer Çalışmalar

Son yıllardaki uluslararası çalışmalar alternatif risk ölçüt yöntemlerini karşılaştırmaya odaklanmıştır. Bu çalışmalardan bazıları izleyen paragraflarda sunulmuştur.

Hoe, Hafizah ve Zaidi (2010) çalışmasında, MV, ortalama mutlak sapma, minimax ve SV olmak üzere farklı risk ölçütü kullanarak dört farklı portföy optimizasyon modelini uygulamış ve performanslarını karşılaştırmıştır. Bu çalışmanın sonuçlarına göre minimax modeli diğer modellerden daha iyi performans göstermiştir. Hoe vd., aşağı yönlü riskten kaçınan yatırımcılar için Minimax modelinin uygun olduğunu öne sürmüştür.

Kroencke ve Schindler (2010) çalışmasında uluslararası menkulleştirilmiş gayrimenkul yatırımlarının optimizayonu için MV modeli ile aşağı yönlü risk çerçevesini karşılaştırmıştır. Aşağı yönlü risk ölçüsü olarak LPM ve co-LPM için Estrada (2008) tarafından önerilen co-LPM matrisi kullanmıştır. Estrada (2007) ve Estrada (2008) aynı çalışmanın farklı versiyonlarıdır.) Kroencke ve Schindler, karşılaştırma sonucu oluşturulan portföylerdeki varlıkların farklı ağırlıklara ve aşağı yönlü risk ile oluşturulan portföylerin daha yüksek Sharpe oranlarına sahip olduklarını pratik olarak kanıtlamıştır.

Boasson vd. (2011) MV ve SV modelini karşılaştırmıştır ve ortalama SV modelinin daha başarılı porföyler ürettiğini ve istenen faydayı sağladığını göstermiştir. Çalışmada, hesaplama zorluğu gerektiren simetrik koyarıvaryans matrisi, Sharpe'ın (1964) beta regresyon denkleminin ampirik geçerliliğinden türetilmiştir.

Jaaman vd. (2011), MV modelini aşağı yönlü risk ölçütleri olan yarı-varyans, belirli bir değerin altındaki varyans ve koşullu VaR ile karşılaştırmıştır. Sonuçlar tüm aşağı yönlü risk ölçütlerinin MV modelinden daha iyi performans gösterdiğini göstermiştir. CVaR modeli en optimal portföyü vermiştir.

Ulusal literatürde, Sayılgan ve Mut (2010) çalışmasında MV, LPM ve SV risk ölçütlerini kullanmıştır. Etkin sınır portföylerini çarpıklık katsayısı yönünden karşılaştırdığında ise, teorik olarak öngörüldüğü şekliyle aşağı yönlü risk kullanılan etkin sınırların çarpıklık katsayısı açısından çok daha üstün olduklarını, bu yönüyle portföy optimizasyonunda aşağı yönlü varyansın, varyanstan daha yüksek fayda sağladığını belirtmiştir. Fakat kullandıkları Hogan ve Warren (1974) co-LPM matrisi asimetrik olması sebebiyle literatürde eleştiri alan bir tekniktir.

Tuna ve Tuna (2013), İMKB'de gerçekleştirdikleri aşağı yönlü Finansal Varlık Fiyatlama Modeli için aşağı yönlü risk ölçütünü kullanmıştır fakat Estrada (2007) çalışmasının oldukça eleştiri alan koyarıvaryans formülünü seçmiştir.

Pala ve Aksaraylı (2016, 2019) çalışmasında aşağı yönlü risk ölçütlerini kullanmamıştır fakat çalışma Postmodern Portföy Teorisi alanında birlikte çarpıklık ve birlikte basıklık değerlerinin portföy yönetim sürecine dahil edilmesi konusunda ulusal literatüre katkı sağlamıştır.

Kahraman (2019), MV ve ortalama SV modellerini BİST 100 şirket verileri üzerinden portföy optimizasyonunda karşılaştırmıştır ve düşük riskli portföyler için SV modelinin daha başarılı olduğu sonucuna ulaşmıştır. Çalışmasında Markowitz'in SV modelini kullandığını ifade etmiştir. Tekil olarak bir varlığın yarıvaryansının hesaplama adımlarını sunmuştur fakat portföyün koyarıvaryansının nasıl hesaplandığını sunmamıştır. Ulusal literatür alanında bu konuların hala yeterli düzeyde incelenmemiş olması sebebiyle bu çalışmaya gereksinim duyulmaktadır.

3. Yöntem

3.1. Ortalama Varyans (MV-Mean Variance)

Markowitz (1952) MV modelinde beklenen getiri olarak ortalama getiri değeri kullanılmaktadır ve risk ölçüsü olarak varyans kullanılmaktadır. MV modelinin amacı, portföy varyansını istenen getiri oranı düzeyinde en aza indirecek varlıkların ağırlığını bulmaktır. Bu model, ikinci dereceden bir programlama problemidir. Portföy getirisi, varyansı ve varlıkların kovaryansı için kullanılan matematiksel ifadeler Denklem (1), (2) ve (3)'teki gibidir:

$$Portf\text{ö}y\ varyans\text{ı} = \sigma_p^2 = \sum_i^n \sum_j^n w_i w_j \sigma_{i,j} \tag{1}$$

$$Portf\text{ö}y\ getirisi = E(R_P) = \sum_i^n w_i E(R_i) \tag{2}$$

$$Kovaryans\ a)\ \sigma_{i,j} = \sigma_i x \sigma_j x \rho_{i,j} \tag{3}$$

$$b)\ \sigma_{i,j} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\left(R_{it} - E(R_i)\right)\left(R_{jt} - E(R_j)\right)\right]$$

Burada $\sigma_{i,j}$, i ve j varlıkları arasındaki kovaryans, w_i, i varlığın tahsis oranı, $E(R_i)$, i'inci varlığının beklenen getirisi yani ortalama getirisidir ve n, toplam varlık sayısıdır. T, toplam dönem sayısıdır. $\rho_{i,j}$, i ve j varlıkları arasındaki korelasyon katsayısıdır. σ_i, standart sapmadır.

3.2. Yarı Varyans (SV- Semi Variance)

Özel bir aşağı yönlü risk ölçütü olan ortalama yarı varyans, belirli bir i'inci varlığın ortalama getirisi altındaki getiri değerlerini dikkate alarak hesaplamaya katmaktadır, ortalamanın üstündeki getiri değerlerine 0 değeri atamaktadır. Yarı varyans formülü, ortalama getirinin altındaki getiri farklarını her dönem için hesaplar. Farkların karelerinin toplamının dönem sayısına bölünmesi ile i'inci varlığın yarı varyansı hesaplanmış olur. Tam normal dağılım sağlayan verilerde yarı varyans varyansın yarısına eşit olacaktır. Markowitz (1959), Denklem (4)’ü maksimum olarak ifade edilmiştir fakat yazıldığı şekilde minimum olarak kullanılması daha anlaşılabilirdir.

$$Ortalama\ Yarı\ Varyans\ SVar_i = \varphi_i^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Min\{(R_{it} - E(R_i), 0\}^2 \quad (4)$$

Burada R_{it}, i’inci varlığın t dönemindeki getirisi, $E(R_i)$, i’inci varlığın ortalama getirisidir. T, toplam dönem sayısıdır. Min ifadesi fonksiyonu ifade etmektedir. $E(R_i)$ değeri yerine ‘B’, hedef getiri (benchmark) değeri araştırmacı için opsiyoneldir. B değeri yerine burada kullanıldığı gibi ortalama getiri değeri, 0 değeri ve risksiz faiz oranı değeri araştırmalarda kullanılmaktadır. Bununla birlikte, Markowitz (1959, s. 196-198) portföyün ortalama yarı varyansını ve varlıkların birlikte yarı varyansını yani koyarıvayansı (co-semi-variance) hesaplamak için Denklem (5) ve (6)’yı önermiştir:

$$Portföy\ yarı\ varyansı\ SVar_p = \varphi_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \varphi_{i,j} \quad (5)$$

$$Koyarıvaryans = CSVar_{i,j}{}^{M} = \varphi_{i,j} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{K}[R_{it} - E(R_i))(R_{jt} - E(R_j))] \quad (6)$$

Denklem (5), portföyün yarı varyansı olarak tanımlanır. Denklem (6), iki değişken arasındaki standart bir kovaryans değeri değildir, iki varlık arasındaki koyarıvaryansı, "birlikte-yarı varyansı" (cosemivariance) hesaplamaktadır. Çünkü kıyas getiri değerinden düşük olan getirileri hesaplamalara katmaktadır. K, portföyün karşılaştırma ölçütü altında performans gösterdiği dönemlerin sayısını temsil eder. T, toplam dönem sayısıdır.

Hogan ve Warren (1974) koyarıvaryans için Denklem (7)’yi önermiştir:

$$CSVar_{i,j}^{HW} = \varphi_{i,j} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{(R_{it} - R_f).Min(R_{jt} - R_f, 0)\} \quad (7)$$

Denklem (7) ile varlık getirileri, sadece risksiz faiz oranı ile bir kıyaslama yapılabilmekte, farklı bir hedef getiri değeri denkleme uyarlama yapılamamaktadır. Diğer bir dezavantaj bu denklemdeki koyarıvaryans matrisi simetrik bir matris değildir, yani $\varphi_{i,j} \neq \varphi_{i,j}$ (Estrada, 2007). Bu durum hesaplama karmaşası yaratacaktır.

Estrada (2007) çalışmasındaki, simetrik bir koyarıvaryans matrisinin hesaplanması sunulmuştur. Estrada’nın (2007) çalışmasında kullandığı hedef getiri (B) yerine beklenen getiri değeri kullanılarak formül Denklem (8)’deki gibi değiştirilmiştir.

$$CSVar_{i,j}^{E} = \varphi_{i,j} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[Min(R_{it} - E(R_i)),0].\,[Min(R_{jt} - E(R_j)),0] \quad (8)$$

Estrada’nın (2007) Denklem (8)’deki koyarıvaryans matrisi önerisi simetrik olduğundan hesaplama açısından oldukça kolaydır fakat tüm aşağı yönlü risk ölçüt yaklaşımlarında olduğu gibi varlıkların aşağı yönlü getirilerin ikisi de aynı dönemde ise hesaplamalara dahil edilmektedir fakat aynı dönemde değil ise birinin değeri 0 iken diğeriyle çarpılması sonucu yine 0 olacaktır, bir varlığın bir dönemdeki aşağı yönlü getirisi bu sebepten göz ardı edilmiş olacaktır. Yani iki varlık da aynı dönemde aşağı yönlü bir getiri sağlamış olmalı ki koyarıvaryans hesaplamalarına katılabilsin. Bu sebeple Denklem (8) varlıkların koyarıvaryansının tamamını ölçememektedir. Varlıkların birbiriyle korelasyonu göz ardı edilmiştir.

3.3. Alt Kısmi Moment (LPM-Lover Partial Moment)

Fishburn (1977), LPM olarak ifade edilen aşağı yönlü risk ölçütünü önermiştir. Fishburn, bir varlık için α dereceden LPM hesaplaması için Denklem (9)'u sunmuştur.

$$\alpha \ dereceden \ Alt \ Kısmi \ moment = LPM_{\alpha,i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Max(B - R_{it}, 0)^{\alpha} \tag{9}$$

Denklem (9)'da T, gözlem sayısıdır, R_{it}, i'inci varlığın t dönemindeki getirisidir ve "B" hedeflenen (bencmark) getiri düzeyidir. Bu denklemde B yerine ortalama getiri ve α yerine 2 konulursa Markowitz (1959) SV formülü ile aynı olmaktadır. Fishburn (1977), riske kayıtsız yatırımcılar için α = 1 değerini, risk arayan yatırımcı için 0 < α < 1 değerini ve riskten kaçan yatırımcı için α > 1 değerini ayırmıştır.

Nawrocki (1991) bu yaklaşımı geliştirerek Denklem (10) ile α dereceden yarı sapma ya da α dereceden alt kısmi moment olarak ifade edilen risk ölçütünü sunmuştur ve Denklem (11) ile portföy optimizasyonunda kullanılmak üzere varlıkların birlikte alt kısmi momenti olan Co-LPM için simetrik bir birlikte alt kısmi moment matrisi de önermiştir.

$$\alpha \ dereceden \ Alt \ Kısmi \ moment = LPM_{\alpha,i} = \left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Max[(B - R_{it}),0]^{\alpha}\right\}^{1/\alpha} \tag{10}$$

$$Ko - Alt \ Kısmi \ Moment = CoLPM_{i,j} = \ LPM_{\alpha,i} x LPM_{\alpha,j} x \rho_{i,j} \tag{11}$$

Denklemler (10) ve (11)'de α yerine 2 konulduğunda bir varlık için yarı sapma Denklem (12)'deki gibidir ve iki varlık için simetrik bir koyarıvaryans matrisi hesaplaması Denklem (13)'deki gibidir. Portföy SV'ı ise Denklem (14)'te sunulur.

$$Yarı \ sapma = \varphi_i = \left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Min[R_{it} - E(R_i),0]^2\right\}^{1/2} \tag{12}$$

$$Koyarıvaryans = CSVar_{i,j}^{N} = \varphi_{i,j} = \varphi_i x \varphi_j x \rho_{i,j} \tag{13}$$

$$Portföy \ Yarı \ Varyansı \ a) \ \varphi_p^2 = \sum_{i=!}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \varphi_{i,j} \quad \text{α=2 için} \tag{14}$$
$$b) \ \varphi_p^2 = \sum_{i=!}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ CoLPM_{i,j} \quad \text{diğer α'lar için}$$

Denklem (13) simetrik koyarıvaryans matrisini temsil etmektedir φ_i ve φ_j yarı sapmaları (yarı varyansın karekökü) ve $\rho_{i,j}$ varlıklar arasındaki korelasyonu temsil eder. Portföy teorisine göre aralarında pozitif korelasyon olan varlıkların aynı portföyde yer alması faydalı bulunmadığından; Nawrocki'nin birlikte aşağı yönlü sapma Co-LPM istatistiği hem varlıklar arasında pozitif korelasyonu minimum yapmakta hem de varlıkların tekil olarak aşağı yönlü sapmasının minimum olmasını sağlamaktadır. Yarı sapma formülleri için orjinalinde Max olarak ifade edilen formüllerin Min olarak değiştirilmesi sonucu değiştirmeyecektir, $\varphi_i \ ve \ \varphi_j$ yarı sapma değerlerinin kareleri alındıktan sonra karekökleri alındığından $\varphi_i \ ve \ \varphi_j$ yarı sapma değerlerinin hesaplama sonucu aynı kalacaktır. Fakat alfanın (α) farklı değerleri için formüllerin orjinallerinin Denklem (10) ve (11) kullanılması gerekmektedir.

Bu çalışmada ilk aşamada hangi matematiksel koyarıvaryans formülünün daha iyi olduğu belirlenecektir. Bu amaçla klasik MV modeli sonuçları ile aşağı yönlü varyans modelleri sonuçları karşılaştırılacaktır. Hogan ve Warren'in (1974) kullandığı asimetrik koyarıvaryans formülü dezavantajı sebebiyle kullanılmamıştır. Kullanılan modeller Tablo 1’de sunulmuştur. Model 2 ve 3 koyarıvaryansı ölçerken Model 1 kovaryansı ölçmektedir.

Tablo 1. Karşılaştırılan Modeller

İsim	Tanım	Portföy Varyansı	Birlikte Değişim
Model 1	Ort Varyans (Markowitz)	Denklem (1)	Denklem (3)
Model 2	Ort Yarı Varyans (Estrada)	Denklem (5)	Denklem (8)
Model 3	2.dererecen LPM (Nawrocki)	Denklem (14)(a)	Denklem (13)

3.4. Portföy Performans Ölçütleri

Beklenen getiri ve risk yatırım kararının verilmesinde göz önünde bulundurulan iki önemli husustur. Yatırımcının fayda algısı getiri ve riskin bir fonksiyonudur. En genel anlamda bir yatırımın performansı getirinin riske oranı veya diğer bir ifadeyle yatırımın risk ayarlı getirisi olarak ifade edilir. Farklı performans ölçütleri bulunmaktadır. Sortino ve Sharpe oranları portföy performansını değerlendirirken, risksiz faiz oranını portföy getirisine kıstas aracı olarak kullanmaktadır.

Sharpe oranı, portföyün ortalama getirisinden risksiz faiz oranının çıkarılması sonucu kalan farkın, portföy riskine bölünmesi ile elde edilir, bu ölçütteki portföy riski, standart sapma ile ölçülür. Portföyün risksiz faiz oranının üzerinde elde ettiği getirinin risk birimi başına getirisidir (Coşkun, 1999, s. 24).

Sortino oranı, aşağı yönlü risk ölçütünde kullanılır ve Sharpe oranının bir türüdür. Sharpe oranında aşağı ve yukarı yönlü hareketleri birlikte ölçen portföy getirilerinin standart sapması kullanılırken Sortino oranında aşağı yönlü sapma kullanılır. Sortino oranında, portföyün ortalama getirisinden risksiz faiz oranı çıkarılır ve ardından bu tutar portföyün aşağı yönlü sapmasına bölünür. Sortino ve Sharpe oranlarının yüksek çıkması başarılı bir portföyün temsilidir.

Portföydeki varlıkların getirileri normal dağılım gösteriyorsa, Sharpe ve Sortino oranları birbirlerine yakın sonuçlar verecektir, dağılımlar normal değilse yani simetrik değilse, çarpıklık arttıkça, farklı sonuçlar elde edilecektir (Riskturk, 2020).

Çalışmada Model 1 için Sharpe, diğer tüm aşağı yönlü risk hesaplayan modeller için Sortino oranı kullanılmıştır. Çalışmada diğer bir ölçüt olarak portföy performansı (PP) olarak isimlendirilen getiri/aşağı yönlü sapma oranı da kullanılmıştır. Sortino oranından farkı getirilerin risksiz faiz oranından farkı alınmamıştır. Tüm oranlar için formüller sunulmuştur.

$$Sharpe\ oranı = Sh = \frac{E(R)_P - R_f}{\sigma_p} = \frac{\sum_i^n w_i E(R_i) - R_f}{(\sum_i^n \sum_j^n w_i w_j \sigma_{i,j})^{1/2}} \quad (15)$$

$$Sortino\ oranı = So_{LPM} = \frac{E(R)_P - R_f}{\varphi_p} = \frac{\sum_i^n w_i E(R_i) - R_f}{(\sum_i^n \sum_j^n w_i w_j CoLPM_{i,j})^{1/\alpha}} \quad (16)$$

$$P.P. = \frac{E(R)_P}{\varphi_p} = \frac{\sum_i^n w_i E(R_i)}{(\sum_i^n \sum_j^n w_i w_j CoLPM_{i,j})^{1/\alpha}} \quad (17)$$

3.5. Şans Kısıtlı Stokastik Programlama

Stokastik Programlama, model girdi parametrelerinin rastgele olduğu matematiksel programlamanın bir dalıdır. Stokastik Programlamanın amacı, belirsiz rasgele verilerle en uygun çözümü bulmaktır. Stokastik programlama, model parametrelerindeki belirsizliği dikkate alır bu belirsizliğe karşı korunan optimal kararlar sağlar (Ibrahim, Kamil ve Mustafa, 2010). Bu yaklaşım, optimal portföyün tanımlanmasında ele alınabilir. Portföy optimizasyon probleminde risk belirlidir, sadece varlıkların geçmiş dönemdeki getiri dalgalanmalarından kaynaklanır. Fakat bu problemdeki en önemli karakter, gelecekteki getirilerin belirsizliğidir.

Stokastik Programlama ile problemin olasılıklı yapısı eş değer deterministik duruma dönüşebilir bu amaçla kullanılan yaklaşımlardan biri Şans Kısıtlı Programlamadır (Taha, 2000, s. 799). Şans kısıtlı programlamada; kısıtta yer alan bir parametrenin değeri, o parametrenin varyansına ve beklenen değerine göre belirlenir ve istenen olasılık limitlerine kadar kısıtın esnekliğine izin verilir. Şans Kısıtlı Stokastik programlama ile portföy optimizasyonunda en önemli parametre olarak girilen varlık getirileri rassal değişkenler olarak tanımlanmaktadır çünkü varlık getirilerinin değerinin gelecekte ne olacağının kesin olarak belirlenmesi zordur. Bu yolla optimizasyon modeline çözüm aranmaktadır. Portföy optimizasyonu için varlıkların geçmişteki getiri değerleri normal dağılım gösteriyorsa ve beklenen değerleri ve varyansları bilindiği için Şans Kısıtlı Programlama ile modellenebilmektedir. Portföyün hedef getirisi kısıtına 1-αi en az olasılığıyla gerçekleşme şansı tanınır.

Portföy optimizasyonu için Getiri şans kısıtlı optimizasyon modeli eşitlik (18)'de sunulmuştur.

$$\begin{aligned} & Min\, Z = \sigma_p^2 \\ & \textstyle\sum_i^n w_i E(R_i) + zy \geq R \\ & \textstyle\sum_i^n {w_i}^2 \sigma_i^2 - y^2 = 0 \\ & \textstyle\sum_i^n w_i = 1 \quad w_i, y \geq 0 \quad \text{i=1…n} \end{aligned} \tag{18}$$

Modeldeki σ_p^2 değeri portföy varyansının sembolik bir ifadesidir, çözümlenecek modelle göre MV, SV ya da LPM değerleri olabilmektedir. z değeri varlık getiri değerleri için atanan αi şans olasılığına göre belirlenen normal dağılım tablosu alan hesaplama kısmından elde edilecek değeri göstermektedir. y değeri yapay değişkendir. R, hedef getiri düzeyidir. σ_i^2, varlığın tekil varyansının sembolik gösterimidir, varyans, yarı varyans ya da varlığın LPM değeri olabilmektedir. Bu çalışmada LPM değerleri kullanılmıştır.

4. Model ve Veriler

Yöntem kısmında belirtilen üç model için Excel Çözücü kullanılarak farklı portföyler oluşturulmuştur ve portföylerin performansları değerlendirilmiştir. Yatırım seçenekleri; mevduat faiz oranı, BİST 100, Dolar, Euro, külçe altın ve devlet iç borçlanma senetleridir. Yatırım alternatiflerinin Ocak 2005 ve Mayıs 2020 arasındaki 185 adet aylık getiri verileri Türkiye İstatistik Kurumu'ndan elde edilmiştir. Risksiz Faiz Oranı (Rf) için 14 Nisan 2020 tarihindeki 5 yıllık devlet tahvil faizinin yıllık oranı olan %14.00 kullanılmıştır. Aylık oran ise $0.14^{1/12}$ formülü ile 0.848876 olarak hesaplanmıştır.

Model çözümlerinde portföy varyansının temsili $\sigma_p^2 = \sum_i^n \sum_j^n w_i w_j \sigma_{i,j}$ ve varlıkların ağırlıkları bir W nx1’lik matris olarak ifade edilir. $W = \{w_i, w_j, \dots w_n\}$. Varlıkların varyanlarını, koyarıvaryansını ya da co-LPM için hesaplanacak birlikte değişkenlik matrisi V nxn’lik bir matris olarak Eşitlik (19)’daki gibidir. Burada her üç modelden edilen V matrisi farklıdır.

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix} \tag{19}$$

W^T, W matrisinin devriğidir. Portföy temsili varyansı $\sigma_p^2 = [W^T][V][W]$ ile hesaplanır. Burada koyarıvaryans matrisi (V), simetrik bir matris olmalıdır (Markowitz, 1959, s. 172).

5. Bulgular

Çalışmada, verilerin genel istatistiksel karakteristikleri öncelikle araştırılmıştır. Alternatif yatırım seçeneklerinin geçmiş getirilerinin normal dağılım sağladığı gözlenmiştir. Aylık verilerden hareketle geçen 15 yıl boyunca, en fazla beklenen getiri değeri altın seçeneği ardından, devlet iç borçlanma senetleri ve borsa gelmektedir. Risk yönünden ise mevduat en risksiz yatırım olmakla birlikte en riskli borsa ve altın seçenekleridir. Araştırma amacı doğrultusunda, farklı risk ölçütü yöntemlerinin etkinliği ve başarısı için modeller ilerleyen kısımlarda karşılaştırılmıştır ve farklı risk algıları LPM yaklaşımı uygulanmıştır. Sonra, LPM ile birlikte Getiri Şans Kısıtlı Stokastik model uygulanmıştır.

5.1. Farklı Koyarıvaryans ve Ortalama Varyans Model Bulguları

Çalışmada belirlenen Model 2 ve Model 3 ile farklı koyarıvaryans formülleri uygulanmış ve simetrik koyarıvaryans matrisleri oluşturulmuştur. Model 1 ile de kovaryans matrisi oluşturulmuştur. Tablo 2’de üç model için varlıkların birlikte değişkenlik matrisleri sunulmuştur. Sonuçlar tüm modeller için farklı görünmektedir. Model 3 yarı varyans sonuçları teoriye uygun biçimde (normal dağılım şartı) ortalama varyansın yarısına yakındır.

Tablo 2. Modellerin Birlikte Değişkenlik (V) Matrisleri

Model 1 Ortalama Varyans için Kovaryans Matrisi						
	MEVDUAT	**BİST100**	**USD**	**EURO**	**ALTIN**	**DİBS**
MEVDUAT	0.12	-0.05	-0.12	-0.13	0.01	0.16
BİST100	-0.05	41.56	-14.71	-11.34	-11.18	5.45
USD	-0.12	-14.71	14.81	11.54	10.93	-4.63
EURO	-0.13	-11.34	11.54	13.24	10.60	-4.24
ALTIN	0.01	-11.18	10.93	10.60	22.72	-2.63
DİBS	0.16	5.45	-4.63	-4.24	-2.63	3.44
Model 2 Koyarıvaryans Matrisi (Estrada Co-Semi)						
	MEVDUAT	**BİST100**	**USD**	**EURO**	**ALTIN**	**DİBS**
MEVDUAT	0.04	0.35	0.15	0.15	0.28	0.10
BİST100	0.35	21.81	0.95	1.18	2.34	3.37
USD	0.15	0.95	5.05	4.11	4.50	0.12
EURO	0.15	1.18	4.11	5.24	5.05	0.15
ALTIN	0.28	2.34	4.50	5.05	9.56	0.59
DİBS	0.10	3.37	0.12	0.15	0.59	1.70
Model 3 Koyarıvaryans Matrisi (Nawrocki α=2 Co-LPM)						
	MEVDUAT	**BİST100**	**USD**	**EURO**	**ALTIN**	**DİBS**
MEVDUAT	0.04	-0.02	-0.04	-0.05	0.00	0.07
BİST100	-0.02	21.92	-6.25	-5.20	-5.28	2.79
USD	-0.04	-6.25	5.08	4.26	4.16	-1.91
EURO	-0.05	-5.20	4.26	5.27	4.35	-1.89
ALTIN	0.00	-5.28	4.16	4.35	9.61	-1.21
DİBS	0.07	2.79	-1.91	-1.89	-1.21	1.71

Belirli getiri düzeyleri için minimum portföy varyansını sağlayan portföyler her 3 modele göre oluşturulmuştur. Model 1 için Sharpe oranı, Model 2 ve Model 3 için Sortino oranı hesaplanmıştır. Öncelikle aşağı yönlü risk ölçütüne göre hazırlanmış Model 2 ve Model 3 Sortino oranları karşılaştırılmıştır. Getiri düzeyinin mümkün olan en yüksek ve en düşük seviyesi arasında belirli getiri değerleri alınarak kaynak tahsisi yapılmıştır. Tablo 3'te Model 2 ve Model 3 Sortino oranları karşılaştırılmıştır.

Tablo 3. Model 2 ve Model 3 Sortino Oranlarının Karşılaştırması

Getiri	(Model 3) Sortino N	(Model 2) Sortino E	Fark %
0.82	-0.01	-0.01	-0.27
0.90	0.06	0.05	10.48
0.95	0.48	0.40	20.35
0.98	0.59	0.51	15.69
1.00	0.60	0.48	25.77
1.05	0.53	0.41	28.25
1.10	0.47	0.37	25.50
1.20	0.41	0.33	21.19
1.30	0.37	0.31	18.79
1.40	0.35	0.30	16.98
1.50	0.33	0.30	12.76
1.60	0.31	0.29	8.31
1.70	0.29	0.28	1.58
1.72	0.28	0.28	-0.27

Aynı getiri düzeylerini sağlayan portföylerin Model 3’ e göre hesaplanan Sortino oranları Model 2’den daha yüksek çıkmıştır, yüzdelik büyüklüğü Tablo 2’de görünmektedir. Farklı koyarıvaryans hesaplaması yönünden Model 3 sonuçları çok daha başarılıdır.

Yarı varyans risk ölçütleri, veriler normal dağılım sağladığında MV modeli ile aynı sonuçları vereceği daha önceden Markowitz tarafından ifade edilmişti. Kullanılan verilerin analizi sonucunda verilerin normal dağılım sağladığı gözlenmiştir. Bu sebeple farklı koyarıvaryans hesaplaması içeren yarı varyans modelleri (Model 2 ve Model 3) sonuçları klasik ortalama varyans (Model 1) sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Model 1 aşağı yönlü varyans ölçütü olmayan klasik bir ortalama varyans modelidir. Model 1 tüm getiri değerleri için hesaplanmıştır ve Sharpe oranları bulunmuştur. Daha sonra, Model 2 ve Model 3 sonuçlarına göre varlıkların ağırlıkları tahsis edildiği ölçüde Model 1’de yerine konulmuştur ve Sharpe oranları hesaplanmıştır. Tablo 4’te Sharpe oranlarının karşılaştırması yapılmıştır

Tablo 4. Ortalama Varyans Sonuçları ile Aşağı Yönlü Varyans Bulgularını Karşılaştırma

Getiri	(Model 1) Sharpe	(Model 2) Sharpe E	(Model 3) Sharpe N
0.82	-0.01	-0.01	-0.01
0.90	0.03	0.03	0.03
0.95	0.30	0.29	0.30
0.98	0.37	0.36	0.37
1.00	0.38	0.36	0.38
1.05	0.34	0.31	0.34
1.10	0.31	0.28	0.31
1.20	0.27	0.24	0.27
1.30	0.25	0.22	0.24
1.40	0.23	0.21	0.23
1.50	0.22	0.20	0.22
1.60	0.20	0.20	0.20
1.72	0.18	0.18	0.18

Model 3 yani Nawrocki'nin koyarıvaryans hesaplamasına göre oluşturulan portföyler aynı getiri düzeyinde Model 1 sonuçları ile hemen hemen aynı Sharpe oranlarını sağlamıştır. Bu sonuç, normal dağılım sağlayan verilerde SV risk ölçütü ile MV risk ölçütü sonuçlarının aynı olduğunu kanıtlamaktadır. Ayrıca Model 3 yani Nawrocki modeli, farklı alfa değeri ile çeşitli risk düzeyleri için farklı portföyler oluşturulmada kullanılabilir bir yöntem olarak seçilebilecektir. Model 2 yani Estrada (2007) sonuçlarına göre koyarıvaryans matrisinin kullanışlı olmadığı bulgusuna ulaşılmıştır. Bu sebeple risk seven ve riskten kaçınan yatırımcılar için Nawrocki LMP modeli izleyen kısımda uygulanmıştır.

5.2. Farklı Risk Algıları İçin Bulgular

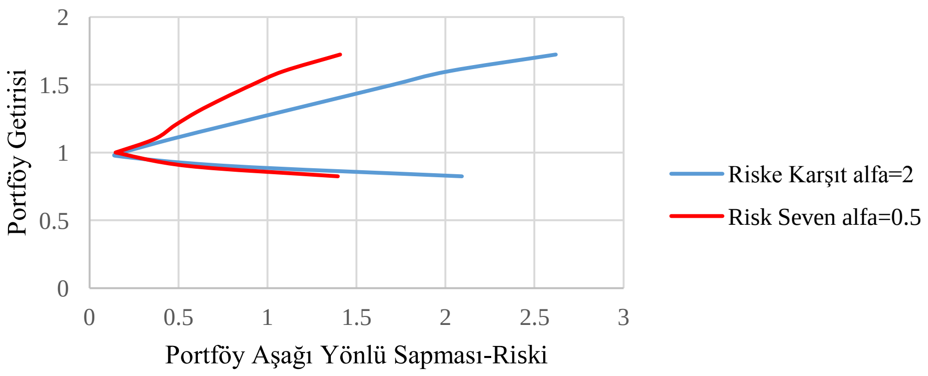
Nawrocki (1991) yaklaşımı farklı risk algılarına hitap etmektedir. Denklem (10), Denklem (11) ve Denklem (17) kullanılarak Nawrocki'nin LPM modeli uygulanmıştır. Aşağı yönlü risk ölçütünde kıyas getiri değeri için risksiz faiz oranı Rf kullanılmıştır. Riski seven yatırımcılar için alfa=0,5 değeri ve riskten kaçınan yatırımcılar için alfa=2 değeri seçilmiştir. Alfa değerinin 2 seçilmesi MV modeli ile aynı sonuçları verdiği belirtilmişti fakat burada beklenen değer değil Rf oranına göre aşağı sapmalar dikkate alınmıştır. İfade edilen model alfa 0.5 ve 2 değerleri için ve tüm getiri düzeyleri için minimum varyansı sağlamak üzere çalıştırılmıştır. Ayrıca maksimum portföy performansı oranı sağlamak için de çalıştırılmıştır ve sonuçlar Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5. Farklı Risk Algıları İçin Model Bulguları

LPM Nawrocki CO-LPM ile alfa 0.5 risk seven yatırımcı için model sonuçları								
Getiri	A.Sapma	P.P.	MEV.	BİST100	USD	EURO	ALTIN	DİBS
0.824	1.395	0.591	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.900	0.554	1.624	0.368	0.149	0.000	0.483	0.000	0.000
1.000	0.146	6.853	0.000	0.107	0.262	0.000	0.000	0.632
1.000	0.146	6.831	0.000	0.105	0.258	0.000	0.000	0.637
1.100	0.367	2.999	0.116	0.120	0.162	0.000	0.143	0.459
1.200	0.479	2.506	0.570	0.120	0.000	0.000	0.310	0.000
1.300	0.604	2.151	0.412	0.150	0.000	0.000	0.439	0.000
1.400	0.753	1.859	0.253	0.180	0.000	0.000	0.567	0.000
1.500	0.914	1.641	0.095	0.210	0.000	0.000	0.695	0.000
1.600	1.091	1.467	0.000	0.171	0.000	0.000	0.829	0.000
1.722	1.408	1.223	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
LPM Nawrocki Co-LPM ile alfa 2 riske Karşıt yatırımcı için model sonuçları								
Getiri	A.Sapma	P.P.	MEV.	BİST100	USD	EURO	ALTIN	DİBS
0.824	2.092	0.394	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.900	0.784	1.149	0.440	0.097	0.000	0.463	0.000	0.000
0.976	0.144	6.766	0.968	0.007	0.000	0.000	0.025	0.000
1.000	0.186	5.375	0.929	0.014	0.000	0.000	0.056	0.000
1.100	0.463	2.376	0.772	0.043	0.000	0.000	0.185	0.000
1.200	0.769	1.560	0.615	0.072	0.000	0.000	0.313	0.000
1.300	1.080	1.203	0.450	0.101	0.000	0.000	0.441	0.009
1.400	1.393	1.005	0.269	0.128	0.000	0.000	0.567	0.036
1.500	1.706	0.879	0.088	0.156	0.000	0.000	0.694	0.063
1.600	2.021	0.792	0.000	0.171	0.000	0.000	0.829	0.000
1.722	2.619	0.658	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000

Riski seven yatırımcılar için getiri beklentisinin yaklaşık 1 olduğu düzeyde maksimum performans sağlanmıştır. Riskten kaçınan yatırımcılar için ise getiri düzeyinin yaklaşık 0.976 seviyelerinde maksimum performans sağlanmıştır. Ayrıca diğer getiri düzeyleri için optimal portföy ağırlıkları da Tablo 5'te sunulduğu gibidir.

Farklı risk düzeyleri için çizilen etkin sınırlar Şekil 1'de gösterilmiştir. Yatay eksende aşağı yönlü sapma (aşağı yönlü varyansın karekökü) ve dikey eksende getiriler vardır. Her iki risk düzeyi için de getirinin yaklaşık 1 olduğu seviyeye kadar getiri arttıkça risk azalmıştır ve 1 seviyesinden sonra getirinin daha da artması riskin de artmasına neden olmuştur. Getirinin 1 olduğu seviyeye kadar riske karşıt ve riski seven yatırımcılar için hemen hemen aynı sonuçlar varken 1 seviyesinden sonra riski seven yatırımcı eğrisi daha dik bir eğimdedir, risk karşıtı eğrinin eğimi daha yatıktır. Bunun anlamı 1 getiri seviyesinden sonra risk seven yatırımcılar için oluşturulan portföylerin performans oranları, riske karşıt yatırımcılar için oluşturulan portföylerin performans oranlarından daha yüksektir. Çünkü risk karşıtları için risk yükseldikçe getirinin faydasının onlar için anlamı düşmektedir. Örneğin şekilde risk seviyesinin 1 olduğu noktada, risk seven için 1.5 getiri düzeyi varken, risk karşıtı için 1.25 civarında getiri düzeyi vardır.



Şekil 1. Farklı Risk Düzeyleri İçin Etkin Sınır Eğrileri

Diğer bir anlatımla, 1.5 getiri düzeyi için, risk karşıtı yatırımcı 1.75 düzeyinde risk algılarken, risk seven yatırımcı 1 düzeyinde risk algılamaktadır.

5.3. Stokastik Getirili ve Aşağı Yönlü Risk Hesaplamalı Model Bulguları

Varlık getirileri normal dağılım sağladığından Şans Kısıtlı modelleme uygulanabilmiştir. Belirsizliği dikkate alan stokastik getiri ile risk seven (alfa=0.5) yatırımcı için yöntem bölümünde kısım 3.5. teki Denklem (18) kullanılarak kurulan optimizasyon modeli Denklem (10), Denklem (11) ve Denklem (17) kullanılarak çalıştırılmıştır. R hedef getiri düzeyi için önceki tablolarda kullanılan getiri değerleri seçilmiştir. Getiri kısıtı için şans olasılığı %50 verildiğinde normal dağılım tablosunda 0.50 alanı z istatistiği için 0 değerini verir. %52 şans olasılığında ise z değeri 0.05 olacaktır. Daha yüksek şans olasılıkları için model uygun sonuç bulamamıştır. Bu sebeple z=0.05 değeri kullanılmıştır. Varlık getirilerin %52 olasılıkla doğru hesaplanmış olması varsayımıyla portföyler oluşturulmuştur. Bulgular Tablo 6'da sunulmuştur.

Stokastik getiri sütunu, R hedeflenen getiri değerlerini vermektedir. Deterministik getiriler olarak belirlenen sütun ise stokastik modelleme sonucu elde edilen kaynak tahsisine göre hesaplanan deterministik model sonuçlarıdır.

Tablo 6. Getiri Şans Kısıtlı LMP ile Risk Seven Yatırımcı İçin Model Bulguları

Stkst Getiri	Dtmn. Getiri	Aşağı Sap.	P.P.	MEV	BİST	USD	EURO	ALTN	DİBS	y
0.824	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.900	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1.000	0.965	0.311	3.218	0.614	0.057	0.104	0.036	0.000	0.190	0.692
1.084	0.999	0.145	7.438	0.000	0.108	0.265	0.000	0.000	0.627	1.696
1.100	1.016	0.197	5.580	0.000	0.123	0.253	0.000	0.022	0.601	1.684
1.200	1.114	0.395	3.038	0.000	0.154	0.191	0.000	0.157	0.499	1.714
1.300	1.211	0.491	2.645	0.539	0.138	0.000	0.000	0.323	0.000	1.787
1.400	1.286	0.587	2.385	0.414	0.166	0.000	0.000	0.420	0.000	2.273
1.500	1.362	0.697	2.153	0.290	0.194	0.000	0.000	0.516	0.000	2.762
1.600	1.437	0.815	1.964	0.166	0.222	0.000	0.000	0.613	0.000	3.253
1.700	1.513	0.938	1.812	0.041	0.249	0.000	0.000	0.709	0.000	3.744
1.800	1.596	1.082	1.664	0.000	0.177	0.000	0.000	0.823	0.000	4.085
1.900	1.676	1.277	1.488	0.000	0.065	0.000	0.000	0.935	0.000	4.478
1.961	1.722	1.408	1.393	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	4.767

Stokastik Programla ile elde edilen portföylerin getirileri stokastik olmayan getiri değerlerinden daha yüksektir. Belirsizlikle mücadele edebilmek için Şans Kısıtlı Programlamanın daha garantici daha korumacı bir yöntem olduğu söylenebilir. Portföy varyansının hesaplaması stokastik model ya da stokastik olmayan deterministik modelde aynı olacağından sadece getiri değerlerini kıyaslamak yeterlidir.

Tüm modellerden elde edilen genel sonuçlara göre altın seçeneğine yatırım yapmak en yüksek getiriyi sağlamaktadır fakat aynı zamanda en yüksek riski de içermektedir. Riski seven ve belirsizliği dikkate alan stokastik model sonuçlarına göre farklı getiri düzeyleri için oluşturulan portföyler içerisinden tercih yapılabilir. Portföy performansı (getiri/risk) oranı en yüksek olan seçeneğe göre, %63 devlet iç borçlanma senetlerine, %26 Dolar ve %11 borsaya yatırım yapılabilir. Çok yüksek getiri düzeyleri için ağırlıklı olarak altın seçeneğine ve daha az yüzdelik oranlarda borsa seçeneğine yatırım seçilmelidir.

6. Sonuç

Çalışmada öncelikle getirileri normal dağılım gösteren varlık kompozisyonu için aşağı yönlü risk ölçütlerinden, Estrada (2007) yarı varyans ve Nawrocki (1991) LPM yaklaşımının 2. dereceden momenti olan yarı varyans formülü kullanılmıştır. İki farkı koyarıvaryans istatistiğini kullanan modeller karşılaştırılmıştır. Nawrocki’nin modeli (Model 3) kullandığı koyarıvaryans ve co-LPM istatistikleri ile hem varlıklar arasında pozitif korelasyonu minimum yapmakta hem de varlıkların tekil olarak aşağı yönlü sapmasının minimum olmasını sağlamaktadır. Yani Model 3 daha yüksek aşağı yönlü sapmaya sahip varlıklara yatırım tahsisisini azalttığı gibi aynı zamanda birbiriyle diğerlerinin daha yüksek pozitif korelasyona sahip varlıklara da yatırım tahsisini en küçüklemektedir. Literatüre paralel olarak veriler normal dağılım sağladığından yarı varyans (Model 3) risk ölçütü ile oluşturulan portföyler ortalama varyans (Model 1) risk ölçütü ile oluşturulan portföyler hemen hemen aynı sonuçları sağlamıştır. Model 3’ ün, aşağı yönlü riski kontrol etmek için yararlı olduğu ve daha iyi bir seçim olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Estrada’ya göre (2007) hazırlanan Model 2 ise uygun olmayan bir risk ölçütü olmuştur, çünkü varlıkların birbirleriyle olan korelasyonunu göz ardı eden koyarıvaryans istatistiğini kullanmıştır. Cheremushkin (2011) çalışmasından elde edilen sonuca paralel olarak Model 2’nin aşağı yönlü risk hesaplaması önemli yanlışlık yaratmıştır. Estrada (2007) çalışmasına getirilen eleştirilerin haksız sayılmayacağı ortaya konulmuştur.

Daha açık ifade etmek gerekirse, kovaryans formülünün bilindiği gibi iki farklı biçimi vardır. MV yaklaşımında Denklem 3’te (a ve b) ikisi birlikte sunulmuştur. Aşağı yönlü risk ölçümünde Estrada (2007) çalışmasında bunlardan birini (b), Nawrocki (1991) çalışmasında bunlardan bir diğerini (a) kullanmıştır. İki farklı kovaryans formülü aşağı yönlü sapmalara uyarlanarak koyarıvaryans formüllerine dönüştürülmüştür. Ortalama varyans yaklaşımında hangi kovaryans formülünün (a veya b) kullanıldığının önemi yoktur ikisi de aynı sonuçları verecektir. Fakat aşağı yönlü risk ölçümü yapılıyorsa varlıklar arasındaki korelasyon katsayısını kullanan koyarıvaryans formülü kullanılmalıdır. Nawrocki’nin modelindeki koyarıvaryans formülü varlıklar arasındaki korelasyon katsayısını kullandığından başarılı olmuştur çünkü portföy teorisince aralarında pozitif korelasyon olan varlıkların aynı portföyde tutulmalarının faydası yoktur.

Çalışmada, uygulanabilir bir aşağı yönlü risk ölçüt modeli seçildikten sonra yatırımcıların farklı risk algılarına hitap edebilen modeller üzerinde yoğunlaşılmıştır. Yani standart sapmanın aksine aşağı yönlü sapma ile modelleme yapmak farklı risk görüşlerini barındırmaktadır. Risksiz faiz oranı altındaki sapmaların 0.5 ve 2. derece momentleri alınarak riski seven ve riske karşıt yatırımcılar için etkin sınırlar çizilmiştir. Risk sevenler daha dik bir etkin sınır eğrisine, riske karşıt olanlar ise eğimi daha az olan bir eğriye sahiptir. Bu sonuçların mantıksal olarak doğruluğu tutarlıdır. Aynı getiri seviyesi için riski sevenler daha az risk algılamakta, riske karşıt olanlar ise daha yüksek risk algılamaktadır. Farklı risk algıları için Nawrocki (1991) LPM modelinin uygulanabilirliği gösterilmiştir.

Riski seven yatırımcılar için, Nawrocki (1991) LPM modeli vasıtasıyla aşağı yönlü risk ölçütü ile birlikte aynı zamanda belirsizliği hesaba katan getiri şans kısıtlı model portföy optimizasyon sürecine dahil edilmiştir. Problemin yapısı en fazla %52 şans olasılığına izin vermiştir. Uygulanan model sonuçları deterministik modele göre daha muhafazakâr varlık tahsisini sağlamıştır.

Araştırmadan elde edilen genel bulgulara göre getiri verileri normal dağılım sağlamıyorsa ortalama varyans modeli yanıltıcı olacaktır. Özellikle kısa dönem veriler kullanıldığında ve gerçek hayat verilerinde normal dağılım sağlanmaması muhtemeldir. Aşağı yönlü yarı varyans ölçütü normal dağılım sağlamayan veriler için faydalıdır fakat farklı koyarıvaryans formüllerindeki karmaşıklık ve yanlış formüllerin seçimi yanlış portföylerin oluşturulmasına sebep olacaktır. Sistem yaklaşımında sistemin elemanlarından birinde bir sorun oluşursa diğer elemanlar da etkilenir ve tüm sistemin başarısı olumsuz etkilenir. Portföy de bir sistemdir, portföyde bulunan varlıkların birinde hata yapmak, varlığın, varlığı veya yokluğu veya yanlış oranda kullanımı diğer varlıkların oranını etkiler ve tüm portföyün başarısız olmasıyla sonuçlanabilir, önemli parasal külfet doğurabilir. Bu sebeple bu çalışmanın portföy yöneticilerine, üst düzey yöneticilere, uygulayıcılara ve tüm karar vericilere aşağı yönlü risk ölçütü ile portföy oluşturma problemlerinin çözümünde doğru koyarıvaryans formüllerinin seçiminde fayda sağlayacağı umulmaktadır. İlaveten portföy yöneticileri postmodern portföy teorisini kullanarak yatırımcılarının farklı risk algılarına hitap edebilen etkin portföyler oluşturabilirler ve getiri verilerindeki belirsizlikten korunmak için stokastik modelleme ile daha az riskli daha garantici portföyler oluşturabilirler. Aşağı yönlü risk ölçütleri, doğru koyarıvaryans formülleri ve stokastik optimizasyon yöntemleri, karar vericilere yatırımcı için en iyi portföyü bulmada yardımcı olabilecek güçlü ve esnek araçlar sağlamaktadır.

Farklı bir çalışmada, normal dağılım sağlamayan verilerde farklı risk ölçüt yöntemleri ile karşılaştırmalar yapılabilir. Farklı risk düzeyleri için performanslar değerlendirilebilir. Aşağı yönlü riskin teorik çekiciliği ve potansiyeli portföy yönetimi için uygulanabilir ek çalışmaları hak etmektedir.

Yapılan bu çalışmada "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Çalışmanın etik kurallara uygunluğu beyan edilmiştir. Yönergenin ikinci bölümü olan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

Kaynakça

Ballestero, E. (2005). Mean-semivariance efficient frontier: A downside risk model for portfolio selection. *Applied Mathematical Finance, 12*(1), 1-15. https://doi.org/10.1080/1350486042000254-015

Bawa, V. S. and Lindenberg, E. B. (1977). Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework. *Journal of Financial Economics, 5*(2), 189-200. https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90017-4

Boasson, V., Boasson, E. and Zhou, Z. (2011). Portfolio optimization in a mean-semivariance framework. *Investment Management and Financial Innovations, 8*(3), 58-68. Retrieved from http://nbuv.gov.ua/UJRN

Cheremushkin, S. V. (2011). Internal inconsistency of downside CAPM models. *Журнал Корпоративные Финансы, 4*(20), 90-111. Retrieved from https://papers.ssrn.com/

Coşkun, Y. (1999). *Portföy performansının ölçülmesi ve sunulması* (Yayımlanmamış doktora tezi). Sermaye Piyasası Kurulu Aracılık Faaliyetleri Dairesi, Ankara.

Estrada, J. (2007). *Mean-semivariance optimization: A heuristic approach* (IESE Business School Working Paper). http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1028206

Estrada, J. (2008). Mean-semivariance optimization: A heuristic approach. *Journal of Applied Finance, 18*(1), 57-72. Retrieved from https://ssrn.com/

Fishburn, P. C. (1977). Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. *American Economic Review*, *67*(2), 116-126. Retrieved from https://www.jstor.org/

Foo, T. and Eng, S. (2000). Asset allocation in a downside risk framework. *Journal of Real Estate Portfolio Management, 6*(3), 213-223. Retrieved from http://web.ist.utl.pt/

Harlow, W. V. and Rao, R. K. S. (1989). Asset pricing in a generalized mean-lower partial moment framework: Theory and evidence. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 24*(3), 285-311. https://doi.org/10.2307/2330813

Hoe, L. W., Hafizah, J. S. and Zaidi, I. (2010). An empirical comparison of different risk measures in portfolio optimization**.** *Business and Economic Horizons, 1*(1), 39-45. http://dx.doi.org/10.15208/beh.2010.06

Hogan, W. W. and Warren, J. M. (1974). Toward the development of an equilibrium capital-market model based on semivariance. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *9*(1), 1-11. https://doi.org/10.2307/2329964

Ibrahim K., Kamil, A. A. and Mustafa, A. (2010). Optimization in portfolio using maximum downside deviation stochastic programming model. *Advances in Applied Science Research, 1*(1), 1-8. Retrieved from https://www.imedpub.com/advances-in-applied-science-research/

Jaaman, S. H. H. J., Hoe, L. W. and Zaidi, I. (2011). Different downside risk approaches in portfolio optimisation**.** *Journal of Quality Measurement and Analysis, 7*(1), 77-84. Retrieved from http://www.ukm.my/jqma/

Kahraman, S. R. (2019). *Yarı varyans modeli ile portföy optimizasyonu: BİST-100 endeksi üzerinde bir uygulama* (Yayımlanmamış doktora tezi). Afyon Kocatepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Afyon.

Kroencke, T. A. and Schindler, F. (2010). *Downside risk optimization in securitized real estate markets* (ZEW Centre for European Economic Research, Working Paper No. 10-034). Retrieved from https://www.zew.de/en/publications/zew-discussion-papers

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance, 7*(1), 77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. New York: John Wiley & Sons.

Nawrocki, D. N. (1991). Optimal algorithms and lower partial moment: Ex post results. *Applied Economics, 23*(3), 465-470. https://doi.org/10.1080/00036849100000021

Pala, O. ve Aksaraylı, M. (2016). Bulanık hedef programlama tabanlı yüksek dereceden momentlerle BIST 30 endeksinde portföy seçimi [Özel Sayı]. *Sosyal Bilimler Metinleri Dergisi*, 98-113. Erişim adresi: https://ssrn.com/

Pala, O. ve Aksaraylı, M. (2019). Nicelik kısıtlı ortalama varyans çarpıklık basıklık portföy modeli: Bulanık sezgisel bir yaklaşım. *Akademik Araştırmalar ve Çalışmalar Dergisi, 11*(21), 386-397. https://doi.org/10.20990/kilisiibfakademik.536454

Riskturk. (2020). *Fon riski ve performans yönetimi*. Erişim adresi: http://www.riskturk.com/TR/Page/-24

Rom, B. M. and Ferguson, K. W. (1994). *Post-modern portfolio theory comes of age*. Paper presented at the Proceedings 4th AFIR International Colloquium. Orlando, United States. Retrieved from http://www.actuaries.org/AFIR

Roy, A. D. (1952). Safety first and the holding of assets. *Econometrica, 20*(3), 431-449. doi:10.2307/1907413

Sayılgan, G. ve Mut, A. D. (2010). Portföy optimizasyonunda alt kısmi moment ve yarıvaryans ölçütlerinin kullanılması. *BDDK Bankacılık ve Finansal Piyasalar, 4*(1), 47-73. Erişim adresi: https://www.bddk.org.tr/

Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, *19*(3), 425-442. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x

Sortino, F. A. and Meer, Van Der Meer, R. (1991). Downside risk. *Journal of Portfolio Management, 17*(4), 27-31. https://doi.org/10.3905/jpm.1991.409343

Taha, H. (2000). *Yöneylem araştırması* (Çev. Ş. A. Baray ve Ş. Esnaf) (6. bs.). İstanbul: Literatür Yayınları.

Tuna, G. ve Tuna, V. E. (2013). İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda sistematik risk: Geleneksel beta katsayısına karşı aşağı yönlü beta katsayısı. *İşletme Araştırmaları Dergisi, 5*(1), 189-205. Erişim adresi: https://www.isarder.org/

PORTFOLIO OPTIMIZATION WITH MEAN-DOWNSIDE VARIANCE BASED RISK MEASURES AND STOCHASTIC RETURN

EXTENDED SUMMARY

Purpose of the Study

The purpose of this study is to compare the performances of the portfolio optimization models that apply different risk measures such as variance, semi-variance, and lower partial moment (LPM) with different cosemivariance formulas. Furthermore, it is to create efficient portfolios for investors having different risk attitudes with the LPM model. Additionally, it is to conduct a portfolio optimization by using the LPM approach with the stochastic modeling to avoid the uncertainty of portfolio returns.

Literature

Many downside risk measure methods have been suggested within the frame of the Post-Modern Portfolio Theory. The first and foremost of these are semi-variance and LPM approaches. Markowitz (1959) stated that a framework based on semi-variance, semi-deviation, or other downside risk measures rather than the variance and standard deviation is more appropriate to reflect the risk perception of the investors and to avoid the asymmetry in the distribution of their returns. In the literature, it has been stated that the results of the mean-variance model will be the same for the results of the semi-variance model and the semi-variance of an asset will be equal to half of the asset’s variance for the data providing a normal distribution. The biggest challenge of using semi-variance and LPM as a risk measure is the creation of cosemivariance and co-LPM matrixes evaluating the co-movement or correlation of the assets. In the literature, the cosemivariance and co-LPM statistics are quite controversial.

Methodology

In this section, the mean-variance, semi-variance, and LPM measures are explained with a mathematical presentation of the cosemivariance statistics suggested by different researches. In the study, the mean-variance (Model 1), Estrada (2007) Semi-Variance (Model 2), and Nawrocki (1991) LPM (Model 3) models were chosen to demonstrate the differences between different cosemivariance statistics used in the semi-variance risk measures. Then, Sharpe and Sortino ratios are explained to compare the models. In the last section, the mathematical structure of the Chance Constrained Stochastic Programming problem is submitted.

Empirical Results

In the study, different covariance formulas were applied with Model 2 and Model 3, and the symmetric cosemivariance matrixes were created. Furthermore, a covariance matrix was created with Model 1. The semi-variance results of Model 3 are approximate to half of the mean-variance according to the theory of normal distribution asumption. The Sortino ratios of

the portfolios providing the same return levels calculated under the Model 3 were higher than Model 2. The results of Model 3 are much more successful. The portfolios created based on Model 3 yielded almost the same Sharpe ratios with the results of Model 1 at the same level of return. This result demonstrates that the results of the Semi-Variance risk measure and Mean-Variance risk measure are the same for the data providing normal distribution. Based on the results of Model 2, it was found that Estrada's suggestion of cosemivariance statistic is not useful. Model 3 can be chosen as a method that can be used. For the risk-averse and risk-avoiding investors, the Nawrocki LPM approach was applied. The efficient frontiers were drawn for risk-averse and risk-avoiding investors by taking 0.5 and 2-degree moments of the deviations below the risk-free interest ratio. For the same return level, the risk-averse ones perceive lower risk while the risk-avoiding ones perceive a higher risk. Then, the stochastic return model was applied, and the model allowed a maximum of 52% chance probability but could not find a solution for higher probabilities.

Conclusion

Nawrocki's Model (Model 3) which uses the cosemivariance and co-LPM statistics both minimize the positive correlation between the assets in the portfolio and ensure that the individual downside deviation of the assets in the portfolio is minimum. It was concluded that Model 3 is beneficial to control the downside risk and it is a better choice. The results of the scholastic model used with the LPM approach provided a conservative asset allocation compared to the deterministic model.