POLİTEKNİK DERGİSİ

JOURNAL of POLYTECHNIC

ISSN: 1302-0900 (PRINT), ISSN: 2147-9429 (ONLINE)
URL: http://dergipark.org.tr/politeknik

Belirsizlik problemleri için daha ideal bir yaklaşım: VFPIVFSS

A more ideal approach to uncertainty problems: VFPIVFSS

***Yazar(lar) (Author(s))**: Orhan DALKILIÇ*[1]

ORCID[1]*: 0000-0003-3875-1398*

Bu makaleye şu şekilde atıfta bulunabilirsiniz(To cite to this article): Dalkılıç O., "Belirsizlik problemleri için daha ideal bir yaklaşım: VFPIVFSS", ***Politeknik Dergisi***, 25(4): 1661-1669, (2022).

Erişim linki (To link to this article): http://dergipark.org.tr/politeknik/archive

DOI: 10.2339/politeknik.792176

Belirsizlik Problemleri için Daha İdeal Bir Yaklaşım: VFPIVFSS

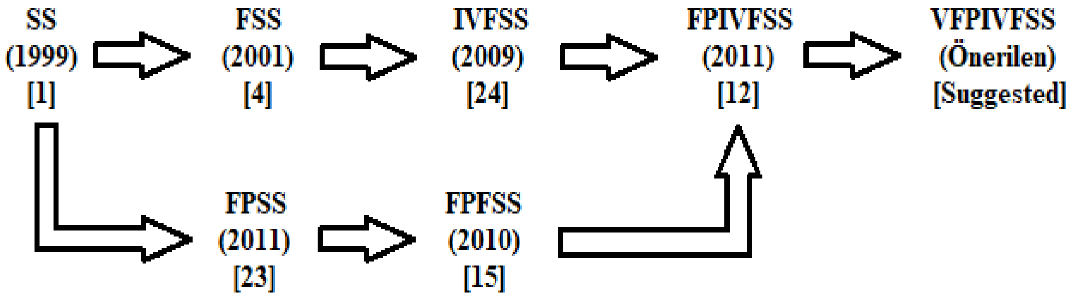
A more ideal Approach to Uncertainty Problems: VFPIVFSS

Önemli noktalar (Highlights)

- *Belirsizlik problemlerini çözmede FPIVFSS'lerin yetersizlikleri / The inadequacies of FPIVFSSs in solving uncertainty problems*
- *En ideale yakın sonuç için VFPIVFSS kavramının önerilmesi / Suggesting the concept of VFPIVFSS for nearest ideal result*
- *Bir karar verme sürecinde elde edilen sonuçların bir algortima yardımıyla iki küme için analizi / Analysis of the results obtained in a decision-making process for two sets with the help of an algorithm*

Grafik Özet (Graphical Abstract)

Bu çalışmada FPIVFSS'lerin bazı belirsizlik problemlerinin çözümündeki yetersizlikleri ifade edilmiş ve bu kümenin bir genellemesi olarak VFPIVFSS'ler önerilmiştir. / In this study, the inadequacies of FPIVFSSs in solving some uncertainty problems have been expressed and VFPIVFSSs have been proposed as a generalization of this set.



Şekil. Kümeler arasındaki tarihsel süreç **/Figure.** Historical process between sets

Amaç (Aim)

FPIVFSS'lerin bazı belirsizlik problemlerindeki yetersizliğini çözmek. / To solve the inadequacy of FPIVFSSs in some uncertainty problems.

Tasarım ve Yöntem (Design & Methodology)

Bir uygulama ile, kümeler arasındaki fark ifade edilir ve en ideal sonuçları elde etmek için VFPIVFSS'lerin kullanılması gerektiği tespit edilmiştir. / With an application, the difference between the sets is expressed and it was identified that VFPIVFSSs should be used to obtain the most ideal results.

Özgünlük (Originality)

Bu çalışmada önerilen VFPIVFSS'ler sayesinde FPIVFSS'lerin birçok yetersizliği aşılmıştır. / Thanks to the VFPIVFSSs proposed in this study, many deficiencies of FPIVFSSs have been overcome.

Bulgular (Findings)

Önerilen VFPIVFSS'lerin birçok belirsizlik probleminin çözümünde fayda sağlayabileceği açıktır. / It is clear that the proposed VFPIVFSSs can be helpful in solving many uncertainty problems.

Sonuç (Conclusion)

Bu çalışmada belirsizlik problemlerini en ideal şekilde çözmek amaçlanmış ve önerilen küme teorisinin başarılı bir şekilde uygulanabileceği belirlenmiştir. / In this study, it was aimed to solve uncertainty problems in the most ideal way and it was determined that the proposed set theory can be applied successfully.

Etik Standartların Beyanı (*Declaration of Ethical Standards*)

Bu makalenin yazarları çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler. / The authors of this article declare that the materials and methods used in this study do not require ethical committee permission and/or legal-special permission.

Belirsizlik Problemleri için Daha İdeal Bir Yaklaşım: VFPIVFSS

Araştırma Makalesi / Research Article

Orhan DALKILIÇ[1*]

[1]Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Mersin Üniversitesi, Türkiye

(Geliş/Received : 08.09.2020 ; Kabul/Accepted : 26.07.2021 ; Erken Görünüm/Early View : 17.08.2021)

ÖZ

Bu çalışmanın amacı belirsizlik problemleri için bulanık parametreli aralık değerli bulanık esnek küme (FPIVFSS)'lerin önerdiği yaklaşımı genelleştirerek daha ideale yakın bir sonuca ulaşabilmektir. Bu amaçla sanal FPIVFSS (VFPIVFSS) kavramı tanımlandı. Ayrıca bir belirsizlik probleminin çözümünde VFPIVSS'lerin nasıl ele alınması gerektiğine yönelik bir algoritma önerildi. Son olarak bir uygulama üzerinden FPIVFSS ve VFPIVFSS için karar verme süreçleri karşılaştırılarak her iki küme detaylı bir şekilde analiz edildi.

Anahtar Kelimeler: FPIVFSS, sanal FPIVFSS, karar verme.

A more ideal Approach to Uncertainty Problems: VFPIVFSS

ABSTRACT

The aim of this study is to reach a more ideal result by generalizing the approach proposed by fuzzy parametrized interval valued fuzzy soft sets (FPIVFSSs) for uncertainty problems. For this purpose, the virtual FPIVFSS (VFPIVFSS) concept was defined. In addition, an algorithm is proposed for how to handle VFPIVFSSs in solving an uncertainty problem. Finally, by comparing the decision-making processes for the FPIVFSS and VFPIVFSS through an application, both clusters were analyzed in detail.

Keywords: FPIVFSS, virtual FPIVFSS, decision making.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Belirsizlik, sonuçların sağlamlığını artırmak için bir veri analizi sırasında ele alınması gereken önemli bir özelliktir. Bununla birlikte, verilerin belirsizliğini ayrıştırmak genel olarak o kadar kolay değildir. Bu nedenle, belirli verilerin analizine dayanan birçok matematiksel yaklaşım, bu bileşeni yakalamak için yetersiz kalabilir. Verilerdeki belirsizlikle başa çıkmak için birçok teori tanıtılmıştır. Bu teorilerin ilki 1965 yılında Zadeh [1] tarafından literatüre kazandırılan bulanık küme (FS) teorisi olmuştur. Daha sonraki yıllarda ise belirsizlikle başa çıkma çabasının bir başka önemli matematiksel modeli olan kaba küme (RS) teorisi ortaya atılmıştır [2]. Ancak FS ve RS teorileri belirsizlik problemlerine objektif olarak uygulanması zor bir süreçtir. Bu zorluğun nedeninin bir parametreleme aracının eksikliğinden kaynaklandığını düşünen Molodtsov [3], 1999 yılında esnek küme (SS) teorisini önermiştir. Daha sonra Maji vd. [13] SS'ler üzerinde detaylı bir teorik çalışma yapmak için SS'lerin temel işlemlerini tanımlamışlardır. Ayrıca daha sonraki yıllarda Maji vd. [4] bulanık esnek küme (FSS) kavramını tanımlayarak [14]'de bir karar verme problemi için FSS teorisine dayanan bir uygulama vermişlerdir. Bu teoriler kullanılarak, SS ve FSS teorilerinin uygulamaları giderek daha fazla incelenmiştir [5-7], [10-12], [20-24]. Ayrıca Çağman ve Enginoğlu [16] esnek karar verme problemleri üzerine çalışmışlar ve Çağman vd. tarafından [15]'te bir karar verme problemi için SS teorisinin bir uygulamasını vermişlerdir. Chen vd. [17] ise SS'lerin parametreleştirme indirgemesini ve uygulamalarını tartışmışlardır. Dahası Feng vd. [18] tarafından karar vermeye dayalı FSS için ayarlanabilir bir yaklaşım verilmiştir.

Çağman vd. [15] bulanık parametreli bulanık esnek küme (FPFSS) kavramını literatüre kazandırarak belirsizliğin ifade edilmesinde daha başarılı sonuçlar elde etmişlerdir. Dahası Zadeh [19] tarafından bulanık kümeler, aralık değerli bulanık kümelere genişletilmiştir. Dolayısıyla bulanık kümelerin yardımıyla inşa edilen hibrit küme modellerinin de aralık değerli bulanık kümeler kullanılarak genelleştirilebilir. Bu nedenle Çağman [15] tarafından önerilen FPFSS'ler Alkhazaleh vd. [12] tarafından bulanık parametreli aralık değerli bulanık esnek küme (FPIVFSS)'lere genelleştirilmiştir. Bu sayede belirsizliğin daha belirgin ifade edilebilmesi ve karar verme süreçlerinin daha ideale yakın bir şekilde işleyebilmesi kolaylaştırılmıştır.

Bu çalışmanın amacı belirsizliğe yönelik karar verme problemlerinde en ideale yaklaşabilecek sonuçların eldesi için FPIVFSS'lerden daha genel bir küme modeli olan sanal bulanık parametreli aralık değerli bulanık esnek küme (VFPIVFSS)'leri literatüre kazandırmaktır. Bunun için ilk olarak bu küme modelinin daha kolay bir

*Sorumlu Yazar (Corresponding Author)
e-posta : orhandlk952495@hotmail.com

şekilde anlaşılması için faydalanılan küme modellemeleri hatırlatıldı. Daha sonra VFPIVFSS için tümleyen, alt küme, birleşim, kesişim gibi bazı temel küme işlemleri verildi ve bazı özellikleri incelendi. Ayrıca karar verme süreçlerinin en ideale yakın bir şekilde ilerleyebilmesi için bir algoritma önerildi. Dahası algoritmanın işleyişini örnekleyebilmek adına bir belirsizlik problemi ele alındı. Son olarak problemin çıktıları FPIVFSS ve VFPIVFSS için karşılaştırılarak elde edilen sonuçlar analiz edildi.

Bu çalışma boyunca; U bir başlangıç evreni, $P(U)$ U'nun güç kümesi ve E, U evrenine göre olası tüm parametrelerin kümesi olarak ifade edilir. Bu durumda $\underline{E}$ ve $\overline{E}$ sırasıyla alt ve üst sanal parametre kümeleri olarak ifade edilir. Dahası A, E'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Genellikle parametreler; çeşitli karakteristikler ya da U evrenindeki nesnelerin özellikleri olarak belirtilir. Ayrıca X ve Y, E üzerinde bir FS olsun. (Alt ve üst sanal parametre kümelerinin özellikleri hakkında detaylı bilgi edinmek için [8,9] çalışmaları incelenebilir.)

2. MATERYAL VE METOD (MATERIAL and METHOD)

Bu bölümde çalışmanın geri kalanında verilecek tanım, teori ve sonuçların daha iyi anlaşılması için FS, SS, FSS, INFS ve FPIVFSS teorileri ve Alkhazaleh [12] tarafından tanımlanan FPIVFS toplanma operatörü hatırlatılır. Daha detaylı bir şekilde bilgi edinmek için [4-5], [8-9], [12-13] çalışmaları incelenebilir.

Tanım 2.1: U boştan farklı bir küme ve $\mu_X: U \to [0,1]$ bir fonksiyon olmak üzere $X = \{(u, \mu_X(u)) : u \in U\}$ kümesine U üzerinde bir FS denir [1]. Burada $\mu_X(u)$ değeri, u elemanının üyelik derecesini belirtir.

Bu çalışma boyunca U üzerindeki tüm FS'lerin ailesi $F(U)$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 2.2: Bir dönüşüm $F: E \to P(U)$ şeklinde verilmek üzere U üzerinde (F, E) ikilisine bir SS denir [3].

Tanım 2.3: Bir dönüşüm $F: A \to F(U)$ şeklinde verilmek üzere U üzerinde (F, A) ikilisine bir FSS denir. Yani, her $e \in A \subseteq E$ için $F(e)$, ifade edilen FSS'sinin $e -$yaklaşımlı elemanlar kümesidir [4].

Tanım 2.4: U boştan farklı bir küme olsun. U üzerinde bir $\widetilde{X}$ IVFS'si $\widetilde{X}: U \to Int([0,1])$ eşleşmesi yardımıyla ifade edilir [5]. Burada $Int([0,1])$, $[0,1]$ aralığının tüm kapalı alt aralıklarını sembolize eder.

Bu çalışma boyunca U üzerindeki tüm IVFS'lerin ailesini $IVF(U)$ sembolü ile göstereceğiz.

Bir $\widetilde{X} \in IVF(U)$ ve her $u \in U$ için $\mu_{\widetilde{X}}(u) = [\mu_{\widetilde{X}}^-(u), \mu_{\widetilde{X}}^+(u)]$ ifadesine bir u elemanının $\widetilde{X}$'e ait üyelik derecesi denir [5]. Burada $0 \leq \mu_{\widetilde{X}}^-(u) \leq \mu_{\widetilde{X}}^+(u) \leq 1$ olmak üzere $\mu_{\widetilde{X}}^-(u)$ ve $\mu_{\widetilde{X}}^+(u)$ ifadelerine ise sırasıyla bir u elemanının $\widetilde{X}$'e ait alt ve üst üyelik dereceleri denir [5].

$\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in IVF(U)$ olmak üzere birleşim, kesişim ve tümleyen küme işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır [5],

i) $\widetilde{X}$'in tümleyeni $\widetilde{X}^c$ şeklinde gösterilir ve $\mu_{\widetilde{X}^c}(u) = 1 - \mu_{\widetilde{X}}(u) = [1 - \mu_{\widetilde{X}}^+(u), 1 - \mu_{\widetilde{X}}^-(u)]$ şeklinde ifade edilir.

ii) $\widetilde{X}$ ve $\widetilde{Y}$'nin kesişimi $\widetilde{X} \cap \widetilde{Y}$ şeklinde gösterilir ve $\mu_{\widetilde{X}\cap\widetilde{Y}}(u) = \inf[\mu_{\widetilde{X}}(u), \mu_{\widetilde{Y}}(u)] = [\inf(\mu_{\widetilde{X}}^-(u), \mu_{\widetilde{Y}}^-(u)), \inf(\mu_{\widetilde{X}}^+(u), \mu_{\widetilde{Y}}^+(u))]$ şeklinde ifade edilir.

iii) $\widetilde{X}$ ve $\widetilde{Y}$'nin birleşimi $\widetilde{X} \cup \widetilde{Y}$ şeklinde gösterilir ve $\mu_{\widetilde{X}\cup\widetilde{Y}}(u) = \sup[\mu_{\widetilde{X}}(u), \mu_{\widetilde{Y}}(u)] = [\sup(\mu_{\widetilde{X}}^-(u), \mu_{\widetilde{Y}}^-(u)), \sup(\mu_{\widetilde{X}}^+(u), \mu_{\widetilde{Y}}^+(u))]$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.5: $\eta_X: E \to Int(U)$ eşleşmesi ile temsil edilen η_X, U evrensel kümesi üzerinde bir IVFS olsun öyle ki, $\mu_X(x) = 0$ ise $\eta_X(x) = \emptyset$ dir. Bu durumda U üzerindeki bir ψ_X FPIVFSS'si

$$\psi_X = \left\{ (x/\mu_X(x), \eta_X(x)) : \begin{matrix} x \in E, \\ \eta_X(x) \in Int(U), \\ \mu_X(x) \in [0,1] \end{matrix} \right\} \quad (1)$$

sıralı ikililerin bir kümesidir [12]. Burada $\eta_X = [\eta_X^-, \eta_X^+]$, ψ_X FPIVFSS'sinin aralık değerli bulanık yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır [12]. Ayrıca $\eta_X(x)$, her $x \in E$ için FPIVFSS'nin bir x-elemanıdır [12].

Bu çalışma boyunca U üzerindeki tüm FPIVFSS'lerin ailesi $FPIVFS(U)$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 2.6: $\psi_X \in FPIVFS(U)$ ve $FPIVFS_T: F(E) \times FPIVFS(U) \to Int(U)$ bir dönüşüm olsun. $FPIVFS_T$ şeklinde sembolize edilen FPIVFS toplanma operatörü,

$$FPIVFS_T(X, \psi_X) = \psi_X^* = \left\{ \frac{u}{\mu_{\psi_X^*}(u)} : u \in U \right\},$$ U üzerinde bir aralık değerli bulanık kümedir [12]. ψ_X^*'e ψ_X FPIVFSS'sinin bir toplam aralık değerli bulanık kümesi denir [12]. Burada u'nun üyelik derecesi $\mu_{\psi_X^*}(u) = [c^-, c^+]$ olup ($|E|$, E'nin kardinalitesidir.)

$$c^- = \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \mu_X(x) \mu_{\eta_X^-(x)}(u) \quad (2)$$

ve

$$c^+ = \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \mu_X(x) \mu_{\eta_X^+(x)}(u) \quad (3)$$

dir [12].

3. SANAL BULANIK PARAMETRELİ ARALIK DEĞERLİ BULANIK ESNEK KÜMELER (VIRTUAL FUZZY PARAMETRIZED INTERVAL VALUED FUZZY SOFT SETS)

Bu bölümde FPIVFSS'ler genelleştirilerek VFPIVFSS'lerin tanımı verildi. Dahası VFPIVFSS'ler için tümleyen, alt küme, birleşim, kesişim gibi temel küme işlemleri verildi ve ilgili bazı özellikleri örneklendirilerek incelendi. Bir VFPIVFSS'in inşasında üç tane FPIVFSS'den yararlanılır. Bu durumun (yani belirsizlik problemlerini ifade etmede ve ideale yakın sonuçlara ulaşmadaki katkısının) detaylı bir şekilde analizi "VFPIVFSS'LERİN UYGULAMASI" adlı bölümde verilir.

Tanım 3.1: $\underline{E}=\{x^{\underline{\alpha}}:0\le\underline{\alpha}<\mu_X(x)\}$ bir alt sanal parametre kümesi ve $\overline{E}=\{x^{\overline{\alpha}}:0\le\overline{\alpha}<1-\mu_X(x)\}$ bir üst sanal parametre kümesi olsun. Dahası $\underline{X}$ ve $\overline{X}$ sırasıyla $\underline{E}$ ve $\overline{E}$ üzerinde bir bulanık küme olsun. Bu durumda $\underline{\eta_X}:\underline{E}\to \mathrm{Int}(U)$ ve $\overline{\eta_X}:\overline{E}\to \mathrm{Int}(U)$ fonksiyonlarına sırasıyla alt ve üst aralık değerli bulanık yaklaşım fonksiyonları denir.

Açıktır ki, $\underline{\alpha}$ ve $\overline{\alpha}$ değerleri bir reel sayı olduğundan $\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})$ ve $\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})$ ifadelerine karşılık gelen nesnelerin üyelik derecelerinde bir değişim gözlenebilmesi muhtemeldir.

Tanım 3.2: U üzerindeki bir Υ_X VFPIVFSS

$$\underline{\psi_X}=\left\{\left(x/\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}),\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})\right):x\in E,x^{\underline{\alpha}}\in\underline{E},\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})\in \mathrm{Int}(U),\mu_X(x)\in[0,1],0\le\underline{\alpha}\le\mu_X(x)\right\} \tag{4}$$

$$\psi_X=\{(x/\mu_X(x),\eta_X(x)):\ x\in E,\eta_X(x)\in \mathrm{Int}(U),\mu_X(x)\in[0,1]\} \tag{5}$$

$$\overline{\psi_X}=\{(x/\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}}),\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})):x\in E,x^{\overline{\alpha}}\in\overline{E},\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})\in \mathrm{Int}(U),\mu_X(x)\in[0,1],0\le\overline{\alpha}\le1-\mu_X(x)\} \tag{6}$$

$$\Upsilon_X=\underline{\psi_X}\cup\psi_X\cup\overline{\psi_X} \tag{7}$$

sıralı ikililerin bir birleşimi şeklinde yazılan kümeye denir. Burada $\eta_X=[\eta_X^-,\eta_X^+]$, Υ_X VFPIVFSS'sinin aralık değerli bulanık yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır. Dahası $\underline{\eta_X}=\left[\underline{\eta_X}^-,\underline{\eta_X}^+\right]$ ve $\overline{\eta_X}=\left[\overline{\eta_X}^-,\overline{\eta_X}^+\right]$ sırasıyla Υ_X VFPIVFSS'sinin alt ve üst aralık değerli bulanık yaklaşım fonksiyonları olarak adlandırılır. Ayrıca $\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})$, $\eta_X(x)$, $\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})$ sırasıyla her $x^{\underline{\alpha}}\in\underline{E}$, $x\in E$, $x^{\overline{\alpha}}\in\overline{E}$ için VFPIVFSS'nin bir alt x-elemanı, x-elemanı ve üst x-elemanıdır. Son olarak gösterim kolaylığı açısından $\mu_{\underline{X}}:\underline{E}\to[0,1]$ ve $\mu_{\overline{X}}:\overline{E}\to[0,1]$ üyelik fonksiyonlarının elemanlar üzerindeki değerleri $\mu_X(x)-\underline{\alpha}=\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}})$ ve $\mu_X(x)+\overline{\alpha}=\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}})$ şeklinde ifade edilir.

Dikkat edilmelidir ki; Tanım 2.5'ten $\mu_X(x)=0$ ise $\eta_X(x)=\emptyset$ olduğundan benzer şekilde $\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}})=0$ ise $\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})=\emptyset$ ve $\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}})=0$ ise $\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})=\emptyset$ dir.

U üzerinde tanımlanabilecek tüm VFPIVFSS'lerin kümesi VFPIVFS(U) ile gösterilecektir.

Özellik 3.1: $\Upsilon_X\in \mathrm{VFPIVFS}(U)$ olsun. Dahası $\mu_{\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})}$, $\mu_{\eta_X(x)}$, $\mu_{\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})}$ ifadeleri sırasıyla $\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})$, $\eta_X(x)$, $\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})$ fonksiyonlarının üyelik fonksiyonları olmak üzere her $x\in E,x^{\underline{\alpha}}\in\underline{E},x^{\overline{\alpha}}\in\overline{E}$ ve her $u\in U$ için $\mu_{\overline{\eta_X^-}(x^{\overline{\alpha}})}(u)\le\mu_{\eta_X^-(x)}(u)\le\mu_{\underline{\eta_X^-}(x^{\underline{\alpha}})}(u)$ ve $\mu_{\overline{\eta_X^+}(x^{\overline{\alpha}})}(u)\le\mu_{\eta_X^+(x)}(u)\le\mu_{\underline{\eta_X^+}(x^{\underline{\alpha}})}(u)$ eşitsizlikleri gerçeklenir. Burada

$$\mu_{\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})}(u)=\left[\mu_{\underline{\eta_X^-}(x^{\underline{\alpha}})}(u),\mu_{\underline{\eta_X^+}(x^{\underline{\alpha}})}(u)\right]$$

$$\mu_{\eta_X(x)}(u)=\left[\mu_{\eta_X^-(x)}(u),\mu_{\eta_X^+(x)}(u)\right]$$

$$\mu_{\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})}(u)=\left[\mu_{\overline{\eta_X^-}(x^{\overline{\alpha}})}(u),\mu_{\overline{\eta_X^+}(x^{\overline{\alpha}})}(u)\right]$$

dir.

İspat. Tanım 2.5 ve Tanım 3.2'nin doğrudan bir sonucu olduğundan açıktır.

Örnek 3.1: $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ nesnelerin bir kümesi ve $E=\{x_1,x_2\}$ parametrelerin bir kümesi şeklinde verilsin. Bu durumda alt ve üst sanal parametre kümeleri sırasıyla $\underline{E}=\left\{x_1^{\underline{\alpha_1}},x_2^{\underline{\alpha_2}}\right\}$, $\overline{E}=\left\{x_1^{\overline{\alpha_1}},x_2^{\overline{\alpha_2}}\right\}$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca $\underline{E}$, E, $\overline{E}$ parametre kümeleri üzerindeki bulanık kümeler sırasıyla $\underline{X}=\left\{\frac{x_1}{0.45},\frac{x_2}{0.32}\right\}$, $X=\left\{\frac{x_1}{0.56},\frac{x_2}{0.67}\right\}$, $\overline{X}=\left\{\frac{x_1}{0.75},\frac{x_2}{0.8}\right\}$ şeklinde ifade edilsin. Dahası aralık değerli bulanık yaklaşım fonksiyonları aşağıdaki şekilde verilsin,

$$\underline{\eta_X}(x_1^{0.11})=\left\{\frac{u_1}{[0.35,0.6]},\frac{u_2}{[0.24,0.37]},\frac{u_3}{[0.42,0.54]}\right\},$$

$$\underline{\eta_X}(x_2^{0.35})=\left\{\frac{u_1}{[0.24,0.5]},\frac{u_2}{[0.18,0.45]},\frac{u_3}{[0.5,0.38]}\right\},$$

$$\eta_X(x_1)=\left\{\frac{u_1}{[0.25,0.5]},\frac{u_2}{[0.2,0.32]},\frac{u_3}{[0.35,0.45]}\right\},$$

$$\eta_X(x_2)=\left\{\frac{u_1}{[0.2,0.42]},\frac{u_2}{[0.1,0.35]},\frac{u_3}{[0.32,0.25]}\right\},$$

$$\overline{\eta_X}(x_1^{0.19})=\left\{\frac{u_1}{[0.17,0.3]},\frac{u_2}{[0.15,0.3]},\frac{u_3}{[0.25,0.36]}\right\},$$

$$\overline{\eta_X}(x_2^{0.13})=\left\{\frac{u_1}{[0.1,0.35]},\frac{u_2}{[0.0,0.2]},\frac{u_3}{[0.24,0.17]}\right\}.$$

Burada x_1 parametresi için $\underline{\alpha_1}$, $0\le\underline{\alpha_1}=0.11\le0.56$ ve $\overline{\alpha_1}$, $0\le\overline{\alpha_1}=0.19\le0.44$ aralıklarından seçildiğine dikkat edilmelidir. Benzer şekilde x_2 parametresi için ise $\underline{\alpha_2}$, $0\le\underline{\alpha_2}=0.35\le0.67$ ve $\overline{\alpha_2}$, $0\le\overline{\alpha_2}=0.13\le0.33$ aralıkları dikkate alınmış olup ifade edilen değerler tercih edilmiştir. Bu durumda Υ_X VFPIVFSS'si aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\Upsilon_X=\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{x_1}{0.45},\left\{\frac{u_1}{[0.35,0.6]},\frac{u_2}{[0.24,0.37]},\frac{u_3}{[0.42,0.54]}\right\}\right),\left(\frac{x_2}{0.32},\left\{\frac{u_1}{[0.24,0.5]},\frac{u_2}{[0.18,0.45]},\frac{u_3}{[0.5,0.68]}\right\}\right),\\ \left(\frac{x_1}{0.56},\left\{\frac{u_1}{[0.25,0.5]},\frac{u_2}{[0.2,0.32]},\frac{u_3}{[0.35,0.45]}\right\}\right),\left(\frac{x_2}{0.67},\left\{\frac{u_1}{[0.2,0.42]},\frac{u_2}{[0.1,0.35]},\frac{u_3}{[0.32,0.55]}\right\}\right),\\ \left(\frac{x_1}{0.75},\left\{\frac{u_1}{[0.17,0.3]},\frac{u_2}{[0.15,0.3]},\frac{u_3}{[0.25,0.36]}\right\}\right),\left(\frac{x_2}{0.8},\left\{\frac{u_1}{[0.1,0.35]},\frac{u_2}{[0.0,0.2]},\frac{u_3}{[0.24,0.4]}\right\}\right)\end{array}\right\}.$$

Burada ifade edilen Υ_X VFPIVFSS'sinin kapsadığı FPIVFSS'ler aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\underline{\psi_X} = \left\{\left(\frac{x_1}{0.45},\left\{\frac{u_1}{[0.35,0.6]},\frac{u_2}{[0.24,0.37]},\frac{u_3}{[0.42,0.54]}\right\}\right),\left(\frac{x_2}{0.32},\left\{\frac{u_1}{[0.24,0.5]},\frac{u_2}{[0.18,0.45]},\frac{u_3}{[0.5,0.38]}\right\}\right)\right\},$$

$$\psi_X = \left\{\left(\frac{x_1}{0.56},\left\{\frac{u_1}{[0.25,0.5]},\frac{u_2}{[0.2,0.32]},\frac{u_3}{[0.35,0.45]}\right\}\right),\left(\frac{x_2}{0.67},\left\{\frac{u_1}{[0.2,0.42]},\frac{u_2}{[0.1,0.35]},\frac{u_3}{[0.32,0.55]}\right\}\right)\right\},$$

$$\overline{\psi_X} = \left\{\left(\frac{x_1}{0.75},\left\{\frac{u_1}{[0.17,0.3]},\frac{u_2}{[0.15,0.3]},\frac{u_3}{[0.25,0.36]}\right\}\right),\left(\frac{x_2}{0.8},\left\{\frac{u_1}{[0.1,0.35]},\frac{u_2}{[0.0,0.2]},\frac{u_3}{[0.24,0.4]}\right\}\right)\right\}.$$

Tanım 3.3: $\Upsilon_X \in \mathrm{VFPIVFS(U)}$ olmak üzere

(i) her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}}) = \emptyset$ ise Υ_X'e, X −boş VFPIVFSS denir ve $\Upsilon_{\emptyset_X}$ ile gösterilir. Eğer $\underline{X} = \emptyset$ ise Υ_X'e boş VFPIVFSS denir ve $\Upsilon_\emptyset$ ile gösterilir.

(ii) her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}}) = U$ ise Υ_X'e, X −evrensel VFPIVFSS denir ve $\Upsilon_{\tilde{X}}$ ile gösterilir. Özel olarak $\overline{X} = \overline{E}$ olarak alınırsa Υ_X'e, evrensel VFPIVFSS denir ve $\Upsilon_{\tilde{E}}$ ile gösterilir.

Tanım 3.4: Υ_X, $\Upsilon_Y \in \mathrm{VFPFSS(U)}$ olmak üzere

i) her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}) \leq \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})$ ve $\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}}) \subseteq \underline{\eta_Y}(x^{\underline{\beta}})$,

ii) her $x \in E$ için $\mu_X(x) \leq \mu_Y(x)$ ve $\eta_X(x) \subseteq \eta_Y(x)$,

iii) her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}}) \leq \mu_{\overline{Y}}\left(x^{\overline{\beta}}\right)$ve $\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}}) \subseteq \overline{\eta_Y}\left(x^{\overline{\beta}}\right)$

gerçeklenmesi durumunda Υ_X, Υ_Y nin sanal bulanık parametreli aralık değerli bulanık esnek alt kümesidir ve $\Upsilon_X \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_Y$ şeklinde gösterilir. Eğer

i) her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}) = \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})$ ve $\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}}) = \underline{\eta_Y}(x^{\underline{\beta}})$,

ii) her $x \in E$ için $\mu_X(x) = \mu_Y(x)$ ve $\eta_X(x) = \eta_Y(x)$,

iii) her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}}) = \mu_{\overline{Y}}\left(x^{\overline{\beta}}\right)$ve $\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}}) = \overline{\eta_Y}\left(x^{\overline{\beta}}\right)$

koşullarının gerçeklenmesi durumunda ise Υ_X ve Υ_Y VFPIVFSS-eşittir denir ve $\Upsilon_X = \Upsilon_Y$ şeklinde gösterilir.

Özellik 3.2: $\Upsilon_X, \Upsilon_Y, \Upsilon_Z \in \mathrm{VFPIVFS(U)}$ olmak üzere aşağıdaki verilenler gerçeklenir,

i) $\Upsilon_\emptyset \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_X \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_{\tilde{E}}$

ii) $\Upsilon_{\emptyset_X} \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_X \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_{\tilde{X}}$

iii) $\Upsilon_X \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_X$

iv) $\Upsilon_X \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_Y$ ve $\Upsilon_Y \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_Z$ ise $\Upsilon_X \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_Z$

v) $\Upsilon_X \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_Y$ ve $\Upsilon_Y \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Upsilon_X$ ise $\Upsilon_X = \Upsilon_Y$

Kanıt: Kanıt oldukça basit ve açıktır.

Tanım 3.5: $\Upsilon_X \in \mathrm{VFPIVFS(U)}$ olsun. Υ_X VFPIVFSS'nin tümleyeni her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$, $x \in E$, $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $c\langle\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}})\rangle$, $c\langle\mu_X(x)\rangle$, $c\langle\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}})\rangle$ ve $\tilde{c}\langle\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})\rangle$, $\tilde{c}\langle\eta_X(x)\rangle$, $\tilde{c}\langle\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})\rangle$ değerleri tarafından tanımlanan Υ_X^c VFPIVFSS'sidir. Burada c ve $\tilde{c}$ sırasıyla bulanık tümleyen ve aralık değerli bulanık tümleyen olarak adlandırılır.

Örnek 3.2: Örnek 3.1'de verilen Υ_X VFPIVFSS'sini ele alalım. Bu durumda $\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}})$, $\mu_X(x)$, $\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}})$ değerlerinin bulanık tümleyeni ve $\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})$, $\eta_X(x)$, $\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})$ değerlerinin ise aralık değerli bulanık tümleyenleri hesaplanarak Υ_X^c VFPIVFSS'si aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\Upsilon_X^c = \left\{\begin{array}{c}\left(\frac{x_1}{0.55},\left\{\frac{u_1}{[0.4,0.65]},\frac{u_2}{[0.63,0.76]},\frac{u_3}{[0.46,0.58]}\right\}\right),\left(\frac{x_2}{0.68},\left\{\frac{u_1}{[0.5,0.76]},\frac{u_2}{[0.55,0.82]},\frac{u_3}{[0.32,0.5]}\right\}\right),\\ \left(\frac{x_1}{0.44},\left\{\frac{u_1}{[0.5,0.75]},\frac{u_2}{[0.68,0.8]},\frac{u_3}{[0.55,0.65]}\right\}\right),\left(\frac{x_2}{0.33},\left\{\frac{u_1}{[0.58,0.8]},\frac{u_2}{[0.65,0.9]},\frac{u_3}{[0.45,0.68]}\right\}\right),\\ \left(\frac{x_1}{0.25},\left\{\frac{u_1}{[0.7,0.83]},\frac{u_2}{[0.7,0.85]},\frac{u_3}{[0.64,0.75]}\right\}\right),\left(\frac{x_2}{0.2},\left\{\frac{u_1}{[0.65,0.9]},\frac{u_2}{[0.8,1.0]},\frac{u_3}{[0.6,0.76]}\right\}\right)\end{array}\right\}$$

Tanım 3.6: Υ_X, $\Upsilon_Y \in \mathrm{VFPIVFS(U)}$ olmak üzere Υ_X, Υ_Y VFPIVFSS'lerinin birleşimi

i) her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{\underline{X \cup Y}}(x^{\underline{\gamma}}) = \max\{\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}), \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})\}$ ve $\underline{\eta_{X \tilde{\cup} Y}}(x^{\underline{\gamma}}) = \underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}}) \mathbin{\tilde{\cup}} \underline{\eta_Y}(x^{\underline{\beta}})$ fonksiyonları,

ii) her $x \in E$ için $\mu_{X \cup Y}(x) = \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$ ve $\eta_{X \tilde{\cup} Y}(x) = \eta_X(x) \mathbin{\tilde{\cup}} \eta_Y(x)$ fonksiyonları,

iii) her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{X \cup Y}}(x^{\overline{\gamma}}) = \max\left\{\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}}), \mu_{\overline{Y}}\left(x^{\overline{\beta}}\right)\right\}$ ve $\overline{\eta_{X \tilde{\cup} Y}}(x^{\overline{\gamma}}) = \overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}}) \mathbin{\tilde{\cup}} \overline{\eta_Y}(x^{\overline{\beta}})$ fonksiyonları

yardımıyla elde edilir ve $\Upsilon_X \mathbin{\hat{\cup}} \Upsilon_Y$ şeklinde gösterilir. Burada $\tilde{\cup}$ bir aralık değerli bulanık birleşimi temsil etmektedir. Ayrıca verilen VFPIVFSS'lerinin kesişimi ise

i) her $x \in E$ ve her $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için $\mu_{\underline{X \cap Y}}(x^{\underline{\gamma}}) = \min\{\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}), \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})\}$ ve $\underline{\eta_{X \tilde{\cap} Y}}(x^{\underline{\gamma}}) = \underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}}) \mathbin{\tilde{\cap}} \underline{\eta_Y}(x^{\underline{\beta}})$ fonksiyonları,

ii) her $x \in E$ için $\mu_{X \cap Y}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$ ve $\eta_{X \widetilde{\cap} Y}(x) = \eta_X(x) \widetilde{\cap} \eta_Y(x)$ fonksiyonları,

iii) her $x \in E$ ve her $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için $\mu_{\overline{X \cap Y}}(x^{\overline{\gamma}}) = \min\left\{\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}}), \mu_{\overline{Y}}\left(x^{\overline{\beta}}\right)\right\}$ ve $\overline{\eta_{X \widetilde{\cap} Y}}(x^{\overline{\gamma}}) = \overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}}) \widetilde{\cap} \overline{\eta_Y}(x^{\overline{\beta}})$ fonksiyonları

yardımıyla elde edilir ve $\Upsilon_X \widehat{\cap} \Upsilon_Y$ şeklinde gösterilir. Burada $\widetilde{\cap}$ bir aralık değerli bulanık kesişimi temsil etmektedir.

Özellik 3.3: $\Upsilon_X, \Upsilon_Y, \Upsilon_Z \in \mathrm{VFPIVFS}(U)$ olmak üzere aşağıdaki verilenler gerçeklenir,

i) $\Upsilon_X \widehat{\cup} \Upsilon_X = \Upsilon_X$ ve $\Upsilon_X \widehat{\cap} \Upsilon_X = \Upsilon_X$

ii) $\Upsilon_{\emptyset_X} \widehat{\cup} \Upsilon_X = \Upsilon_X$ ve $\Upsilon_{\emptyset_X} \widehat{\cap} \Upsilon_X = \Upsilon_{\emptyset_X}$

iii) $\Upsilon_X \widehat{\cup} \Upsilon_\emptyset = \Upsilon_X$ ve $\Upsilon_X \widehat{\cap} \Upsilon_\emptyset = \Upsilon_\emptyset$

iv) $\Upsilon_X \widehat{\cup} \Upsilon_{\widetilde{E}} = \Upsilon_{\widetilde{E}}$ ve $\Upsilon_X \widehat{\cap} \Upsilon_{\widetilde{E}} = \Upsilon_X$

v) $\Upsilon_X \widehat{\cup} \Upsilon_Y = \Upsilon_Y \widehat{\cup} \Upsilon_X$ ve $\Upsilon_X \widehat{\cap} \Upsilon_Y = \Upsilon_Y \widehat{\cap} \Upsilon_X$

vi) $(\Upsilon_X \widehat{\cup} \Upsilon_Y) \widehat{\cup} \Upsilon_Z = \Upsilon_X \widehat{\cup} (\Upsilon_Y \widehat{\cup} \Upsilon_Z)$ ve $(\Upsilon_X \widehat{\cap} \Upsilon_Y) \widehat{\cap} \Upsilon_Z = \Upsilon_X \widehat{\cap} (\Upsilon_Y \widehat{\cap} \Upsilon_Z)$

Kanıt: Tanım 3.6'dan açıktır.

Örnek 3.3: Örnek 3.1'de verilen Υ_X VFPIVFSS'sini ve aşağıda verilen bir başka Υ_Y VFPIVFSS'sini ele alalım.

$$\Upsilon_Y = \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{x_1}{0.54}, \left\{\frac{u_1}{[0.45,0.55]}, \frac{u_2}{[0.4,0.6]}, \frac{u_3}{[0.4,0.5]}\right\}\right), \left(\frac{x_2}{0.2}, \left\{\frac{u_1}{[0.4,0.65]}, \frac{u_2}{[0.2,0.5]}, \frac{u_3}{[0.65,0.8]}\right\}\right), \\ \left(\frac{x_1}{0.6}, \left\{\frac{u_1}{[0.2,0.42]}, \frac{u_2}{[0.15,0.4]}, \frac{u_3}{[0.34,0.4]}\right\}\right), \left(\frac{x_2}{0.7}, \left\{\frac{u_1}{[0.35,0.4]}, \frac{u_2}{[0.15,0.38]}, \frac{u_3}{[0.3,0.75]}\right\}\right), \\ \left(\frac{x_1}{0.7}, \left\{\frac{u_1}{[0.1,0.4]}, \frac{u_2}{[0.1,0.2]}, \frac{u_3}{[0.3,0.35]}\right\}\right), \left(\frac{x_2}{0.95}, \left\{\frac{u_1}{[0.24,0.3]}, \frac{u_2}{[0.1,0.15]}, \frac{u_3}{[0.2,0.56]}\right\}\right) \end{array}\right\}$$

Bu durumda Υ_X ve Υ_Y VFPIVFSS'lerinin birleşimi ve kesişimi aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\Upsilon_X \widehat{\cup} \Upsilon_Y = \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{x_1}{0.54}, \left\{\frac{u_1}{[0.45,0.6]}, \frac{u_2}{[0.4,0.6]}, \frac{u_3}{[0.42,0.54]}\right\}\right), \left(\frac{x_2}{0.32}, \left\{\frac{u_1}{[0.4,0.65]}, \frac{u_2}{[0.2,0.5]}, \frac{u_3}{[0.65,0.8]}\right\}\right), \\ \left(\frac{x_1}{0.6}, \left\{\frac{u_1}{[0.25,0.5]}, \frac{u_2}{[0.2,0.4]}, \frac{u_3}{[0.35,0.45]}\right\}\right), \left(\frac{x_2}{0.7}, \left\{\frac{u_1}{[0.35,0.42]}, \frac{u_2}{[0.15,0.38]}, \frac{u_3}{[0.32,0.75]}\right\}\right), \\ \left(\frac{x_1}{0.75}, \left\{\frac{u_1}{[0.17,0.4]}, \frac{u_2}{[0.15,0.3]}, \frac{u_3}{[0.3,0.36]}\right\}\right), \left(\frac{x_2}{0.95}, \left\{\frac{u_1}{[0.24,0.35]}, \frac{u_2}{[0.1,0.2]}, \frac{u_3}{[0.24,0.56]}\right\}\right) \end{array}\right\}$$

$$\Upsilon_X \widehat{\cap} \Upsilon_Y = \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{x_1}{0.45}, \left\{\frac{u_1}{[0.35,0.55]}, \frac{u_2}{[0.24,0.37]}, \frac{u_3}{[0.4,0.5]}\right\}\right), \left(\frac{x_2}{0.2}, \left\{\frac{u_1}{[0.24,0.5]}, \frac{u_2}{[0.18,0.45]}, \frac{u_3}{[0.5,0.68]}\right\}\right), \\ \left(\frac{x_1}{0.56}, \left\{\frac{u_1}{[0.2,0.42]}, \frac{u_2}{[0.15,0.32]}, \frac{u_3}{[0.34,0.4]}\right\}\right), \left(\frac{x_2}{0.67}, \left\{\frac{u_1}{[0.2,0.4]}, \frac{u_2}{[0.1,0.35]}, \frac{u_3}{[0.3,0.55]}\right\}\right), \\ \left(\frac{x_1}{0.7}, \left\{\frac{u_1}{[0.1,0.3]}, \frac{u_2}{[0.1,0.2]}, \frac{u_3}{[0.25,0.35]}\right\}\right), \left(\frac{x_2}{0.8}, \left\{\frac{u_1}{[0.1,0.3]}, \frac{u_2}{[0.0,0.15]}, \frac{u_3}{[0.2,0.4]}\right\}\right) \end{array}\right\}$$

Özellik 3.4: $\Upsilon_X, \Upsilon_Y \in \mathrm{VFPIVFS}(U)$ olmak üzere aşağıdaki verilen De Morgan kuralları gerçeklenir,

i) $(\Upsilon_X \widehat{\cup} \Upsilon_Y)^c = \Upsilon_X^c \widehat{\cap} \Upsilon_Y^c$

ii) $(\Upsilon_X \widehat{\cap} \Upsilon_Y)^c = \Upsilon_X^c \widehat{\cup} \Upsilon_Y^c$

Kanıt: Kanıtlar benzer olduğundan sadece bir tanesini kanıtlayalım.

i) Tanım 3.5 ve 3.6'dan faydalanarak her $x^{\underline{\alpha}}, x^{\underline{\beta}}, x^{\underline{\gamma}} \in \underline{E}$ ve $x \in E$ ve $x^{\overline{\alpha}}, x^{\overline{\beta}}, x^{\overline{\gamma}} \in \overline{E}$ için,

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{(X\cup Y)^c}}(x^{\underline{\gamma}}) &= c\left(\mu_{\underline{(X\cup Y)}}(x^{\underline{\gamma}})\right) \\ &= c\left(\max\left\{\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}}), \mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})\right\}\right) \\ &= \min\left\{c\left(\mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}})\right), c\left(\mu_{\underline{Y}}(x^{\underline{\beta}})\right)\right\} \\ &= \min\left\{\mu_{\underline{X}^c}(x^{\underline{\alpha}}), \mu_{\underline{Y}^c}(x^{\underline{\beta}})\right\} \\ &= \mu_{\underline{X^c\cap Y^c}}(x^{\underline{\gamma}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{(X\cup Y)^c}(x) &= c\left(\mu_{(X\cup Y)}(x)\right) \\ &= c(\max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}) \\ &= \min\{c(\mu_X(x)), c(\mu_Y(x))\} \\ &= \min\{\mu_{X^c}(x), \mu_{Y^c}(x)\} = \mu_{X^c\cap Y^c}(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{(X\cup Y)}^c}(x^{\underline{\gamma}}) &= c\left(\mu_{\overline{(X\cup Y)}}(x^{\underline{\gamma}})\right) \\ &= c\left(\max\left\{\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}}), \mu_{\overline{Y}}\left(x^{\overline{\beta}}\right)\right\}\right) \\ &= \min\left\{c\left(\mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}})\right), c\left(\mu_{\overline{Y}}\left(x^{\overline{\beta}}\right)\right)\right\} \\ &= \min\left\{\mu_{\overline{X}^c}(x^{\overline{\alpha}}), \mu_{\overline{Y}^c}\left(x^{\overline{\beta}}\right)\right\} \\ &= \mu_{\overline{X^c\cap Y^c}}(x^{\overline{\gamma}}). \end{aligned}$$

Dahası,

$$\begin{aligned} \underline{\eta_{(X\widetilde{\cup}Y)^{\tilde{c}}}}(x^{\underline{\gamma}}) &= \tilde{c}\left(\underline{\eta_{(X\widetilde{\cup}Y)}}(x^{\underline{\gamma}})\right) \\ &= \tilde{c}\left(\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}}) \widetilde{\cup} \underline{\eta_Y}(x^{\underline{\beta}})\right) \\ &= \tilde{c}\left(\underline{\eta_X}(x^{\underline{\alpha}})\right) \widetilde{\cap} \tilde{c}\left(\underline{\eta_Y}(x^{\underline{\beta}})\right) \\ &= \underline{\eta_{X^{\tilde{c}}}}(x^{\underline{\alpha}}) \widetilde{\cap} \underline{\eta_{Y^{\tilde{c}}}}(x^{\underline{\beta}}) \\ &= \underline{\eta_{X^{\tilde{c}}\widetilde{\cap}Y^{\tilde{c}}}}(x^{\underline{\gamma}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{(X\widetilde{\cup}Y)^{\tilde{c}}}(x) &= \tilde{c}\left(\eta_{(X\widetilde{\cup}Y)}(x)\right) \\ &= \tilde{c}(\eta_X(x) \widetilde{\cup} \eta_Y(x)) \\ &= \tilde{c}(\eta_X(x)) \widetilde{\cap} \tilde{c}(\eta_Y(x)) \\ &= \eta_{X^{\tilde{c}}}(x) \widetilde{\cap} \eta_{Y^{\tilde{c}}}(x) \\ &= \eta_{X^{\tilde{c}}\widetilde{\cap}Y^{\tilde{c}}}(x) \end{aligned}$$

ve

$$\overline{\eta_{(X\tilde{\cup}Y)^{\tilde{c}}}}(x^{\overline{\gamma}}) = \tilde{c}\left(\overline{\eta_{(X\tilde{\cup}Y)}}(x^{\overline{\gamma}})\right)$$
$$= \tilde{c}\left(\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})\,\tilde{\cup}\,\overline{\eta_Y}(x^{\overline{\beta}})\right)$$
$$= \tilde{c}\left(\overline{\eta_X}(x^{\overline{\alpha}})\right)\tilde{\cap}\,\tilde{c}\left(\overline{\eta_Y}(x^{\overline{\beta}})\right)$$
$$= \overline{\eta_{X^{\tilde{c}}}}(x^{\overline{\alpha}})\,\tilde{\cap}\,\overline{\eta_{Y^{\tilde{c}}}}\left(x^{\overline{\beta}}\right)$$
$$= \overline{\eta_{X^{\tilde{c}}\tilde{\cap}Y^{\tilde{c}}}}(x^{\overline{\gamma}}).$$

Özellik 3.5: $\Upsilon_X, \Upsilon_Y, \Upsilon_Z \in \mathrm{VFPIVFS}(U)$ olmak üzere aşağıdaki verilenler gerçeklenir,

i) $\Upsilon_X \,\hat{\cup}\, (\Upsilon_Y \,\hat{\cap}\, \Upsilon_Z) = (\Upsilon_X \,\hat{\cup}\, \Upsilon_Y) \,\hat{\cap}\, (\Upsilon_X \,\hat{\cup}\, \Upsilon_Z)$

ii) $\Upsilon_X \,\hat{\cap}\, (\Upsilon_Y \,\hat{\cup}\, \Upsilon_Z) = (\Upsilon_X \,\hat{\cap}\, \Upsilon_Y) \,\hat{\cup}\, (\Upsilon_X \,\hat{\cap}\, \Upsilon_Z)$

Kanıt: Tanım 3.6'dan kolaylıkla gösterilebilir.

4. VFPIVFSS'LERİN UYGULAMASI (APPLICATION OF VFPIVFSS)

Burada günlük hayatta hemen hemen her alanda karşılaşılabilen belirsizlik problemlerine yönelik bir algoritma önerildi. Bu algoritmanın inşası için VFPIVFSS'lerden faydalanıldı. Ayrıca eğer önerilen algoritmanın inşası için FPIVFSS'lerden faydalanılsaydı sonuçların ne şekilde bir değişim gösterebileceği üzerine bir analiz yapıldı.

Algoritma verilmeden önce VFPIVFSS için VFPIVFS toplanma operatörü kavramı tanıtıldı,

Tanım 4.1: $\Upsilon_X \in \mathrm{VFPIVFS}(U)$ ve $\mathrm{VFPIVFS_T}: F(E) \times \mathrm{VFPIVFS}(U) \rightarrow \mathrm{Int}(U)$ bir dönüşüm olsun. $\mathrm{VFPIVFS_T}$ şeklinde sembolize edilen VFPIVFS toplanma operatörü, $\mathrm{VFPIVFS_T}(X, \Upsilon_X) = \Upsilon_X^* = \left\{\frac{u}{\mu_{\Upsilon_X^*}(u)} : u \in U\right\}$, U üzerinde bir aralık değerli bulanık kümedir. Υ_X^*'e Υ_X VFPIVFSS'sinin bir toplam aralık değerli bulanık kümesi denir. Burada u'nun üyelik derecesi $\mu_{\Upsilon_X^*}(u) = [C^- = (c_1^- + c_2^- + c_3^-)/3, C^+ = (c_1^+ + c_2^+ + c_3^+)/3]$ olup ($|\underline{E}|$, $|E|$, $|\overline{E}|$ sırasıyla $\underline{E}$, E, $\overline{E}$ parametre kümelerinin kardinalitesini ifade etmektedir.)

$$c_1^- = \frac{1}{|\underline{E}|}\sum_{x^{\underline{\alpha}}\in\underline{E}} \mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}})\mu_{\eta_{\underline{X}}^-(x^{\underline{\alpha}})}(u) \quad (8)$$

$$c_2^- = \frac{1}{|E|}\sum_{x\in E} \mu_X(x)\mu_{\eta_X^-(x)}(u) \quad (9)$$

$$c_3^- = \frac{1}{|\overline{E}|}\sum_{x^{\overline{\alpha}}\in\overline{E}} \mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}})\mu_{\overline{\eta_X^-}(x^{\overline{\alpha}})}(u) \quad (10)$$

ve

$$c_1^+ = \frac{1}{|\underline{E}|}\sum_{x^{\underline{\alpha}}\in\underline{E}} \mu_{\underline{X}}(x^{\underline{\alpha}})\mu_{\eta_{\underline{X}}^+(x^{\underline{\alpha}})}(u) \quad (11)$$

$$c_2^+ = \frac{1}{|E|}\sum_{x\in E} \mu_X(x)\mu_{\eta_X^+(x)}(u) \quad (12)$$

$$c_3^+ = \frac{1}{|\overline{E}|}\sum_{x^{\overline{\alpha}}\in\overline{E}} \mu_{\overline{X}}(x^{\overline{\alpha}})\mu_{\overline{\eta_X^+}(x^{\overline{\alpha}})}(u) \quad (13)$$

dir.

Aşağıda alternatifler arasındaki en iyi nesnenin seçilmesinde VFPIVFS'ler için bir karar verme algoritması önerildi.

Algoritma:

Adım 1. $A \subseteq E$ istenilen koşulların parametre kümesi, U evren kümesi ve X, E üzerinde bir bulanık küme olmak üzere temel kümeleri gir.

Adım 2. Karşılaşılan problemi VFPIVFS yardımıyla ifade et.

Adım 3. Υ_X VFPIVFSS'sinin toplam aralık değerli bulanık kümesi olan Υ_X^* aralık değerli bulanık kümesini hesapla.

Adım 4. Her $u_i \in U$ için $\Phi(u_l) = \max\{\Phi(u_i) = C_i^+ - C_i^- : 1 \leq i \leq |U|\}$ değerini bul. ($|U|$, U'nun kardinalitesidir.)

Adım 5. u_l nesnesi istenen parametreleri en iyi karşılayan elemandır.

Şimdi önerilen algoritmanın işleyişini görebilmek için bir belirsizlik problemini ele alalım,

Örnek 4.1: Bir okul kendi parametrelerine en uygun öğrencileri kendi bünyesine almayı hedeflemektedir. Bunun için okul bir ilan duyurusu yayınlamıştır. İlana göre başvuran öğrenci adaylarına üç aşamalı bir sınav yapılacaktır. Bu sınavlara katılım koşulları ise şöyle belirtilmiştir,

i. Okul tarafından yapılan üç sınava da başvuran tüm öğrenci adaylar katılabilecekler.
ii. İlk yapılan sınav ikinci yapılacak sınavdan daha az belirleyici ve ikinci yapılacak sınavda üçüncü yapılacak sınavdan daha az belirleyici olacaktır.
iii. Sınavlardaki belirleyiciliğin artması bu sınavdan alınacak puanın yüksek olacağını ifade edecektir.

Adım 1. Bu koşullar altında okula alınmak için başvuran öğrenci adayların kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$ ve okulun öğrencilerden istediği parametrelerin kümesi ise $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olduğu varsayılsın. Burada e_i parametreleri sırasıyla $i = 1,2,3$ için "başarılı, çalışkan, öz güveni yüksek" dir. Dahası okul yönetimi tarafından aday öğrencilerin değerlendirilmesi için yapılacak sınavların zorluk dereceleri şöyle belirlenmiştir:

İlk sınavın zorluk derecesi her bir parametre için sırasıyla 0.3, 0.45, 0.2, ikinci sınavın zorluk derecesi her bir parametre için sırasıyla 0.56, 0.7, 0.35 ve son olarak üçüncü sınavın zorluk derecesi her bir parametre için sırasıyla 0.78, 0.92, 0.5 dir.

Burada ifade edilen sınavların zorluk dereceleri $\underline{E}$, E, $\overline{E}$ parametre kümelerinin bulanık kümelerini inşa etmektedirler ve sırasıyla $\underline{X} = \left\{\frac{x_1}{0.3}, \frac{x_2}{0.45}, \frac{x_3}{0.2}\right\}$, $X = \left\{\frac{x_1}{0.56}, \frac{x_2}{0.7}, \frac{x_3}{0.35}\right\}$, $\overline{X} = \left\{\frac{x_1}{0.78}, \frac{x_2}{0.92}, \frac{x_3}{0.5}\right\}$ dir.

Dikkat edilmelidir ki; yapılan sınavlarda her bir parametre için zorluk derecelerinin değiştirilmesi sınavlardaki aday öğrencilerin başarı durumunu doğrudan etkileyebilir. İfade edilen bu durum için daha detaylı bilgi edinmek için [8,9] çalışmaları incelenebilir.

Aday öğrencilerin değerlendirilmesi aşamasında okul yönetiminden alınan veriler aralık değerli bulanık yaklaşım fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki şekilde olduğu varsayılır,

$$\underline{\eta_X}(x_1^{0.26})=\left\{\frac{u_1}{[0.65,0.8]},\frac{u_2}{[0.54,0.76]},\frac{u_3}{[0.43,0.9]},\frac{u_4}{[0.56,0.87]},\frac{u_5}{[0.6,0.7]},\frac{u_6}{[0.65,0.8]},\frac{u_7}{[0.76,0.9]},\frac{u_8}{[0.48,0.75]},\frac{u_9}{[0.5,0.65]},\frac{u_{10}}{[0.8,0.95]}\right\},$$

$$\underline{\eta_X}(x_2^{0.25})=\left\{\frac{u_1}{[0.76,0.9]},\frac{u_2}{[0.54,0.65]},\frac{u_3}{[0.67,0.7]},\frac{u_4}{[0.8,0.85]},\frac{u_5}{[0.64,0.76]},\frac{u_6}{[0.5,0.8]},\frac{u_7}{[0.56,0.77]},\frac{u_8}{[0.44,0.62]},\frac{u_9}{[0.54,0.66]},\frac{u_{10}}{[0.41,0.7]}\right\},$$

$$\underline{\eta_X}(x_3^{0.15})=\left\{\frac{u_1}{[0.8,0.85]},\frac{u_2}{[0.65,0.7]},\frac{u_3}{[0.61,0.8]},\frac{u_4}{[0.45,0.5]},\frac{u_5}{[0.6,0.9]},\frac{u_6}{[0.74,0.86]},\frac{u_7}{[0.55,0.67]},\frac{u_8}{[0.42,0.8]},\frac{u_9}{[0.75,0.92]},\frac{u_{10}}{[0.54,0.75]}\right\},$$

$$\eta_X(x_1)=\left\{\frac{u_1}{[0.5,0.75]},\frac{u_2}{[0.45,0.7]},\frac{u_3}{[0.35,0.8]},\frac{u_4}{[0.46,0.72]},\frac{u_5}{[0.5,0.65]},\frac{u_6}{[0.55,0.71]},\frac{u_7}{[0.7,0.8]},\frac{u_8}{[0.35,0.55]},\frac{u_9}{[0.42,0.5]},\frac{u_{10}}{[0.6,0.8]}\right\},$$

$$\eta_X(x_2)=\left\{\frac{u_1}{[0.6,0.8]},\frac{u_2}{[0.5,0.62]},\frac{u_3}{[0.55,0.6]},\frac{u_4}{[0.64,0.75]},\frac{u_5}{[0.6,0.7]},\frac{u_6}{[0.4,0.6]},\frac{u_7}{[0.35,0.64]},\frac{u_8}{[0.25,0.5]},\frac{u_9}{[0.41,0.6]},\frac{u_{10}}{[0.3,0.42]}\right\},$$

$$\eta_X(x_3)=\left\{\frac{u_1}{[0.65,0.7]},\frac{u_2}{[0.5,0.6]},\frac{u_3}{[0.45,0.7]},\frac{u_4}{[0.35,0.4]},\frac{u_5}{[0.52,0.86]},\frac{u_6}{[0.6,0.75]},\frac{u_7}{[0.43,0.55]},\frac{u_8}{[0.4,0.64]},\frac{u_9}{[0.6,0.8]},\frac{u_{10}}{[0.42,0.6]}\right\},$$

$$\overline{\eta_X}(x_1^{0.22})=\left\{\frac{u_1}{[0.3,0.6]},\frac{u_2}{[0.25,0.5]},\frac{u_3}{[0.2,0.6]},\frac{u_4}{[0.3,0.65]},\frac{u_5}{[0.35,0.54]},\frac{u_6}{[0.43,0.51]},\frac{u_7}{[0.4,0.64]},\frac{u_8}{[0.15,0.5]},\frac{u_9}{[0.3,0.4]},\frac{u_{10}}{[0.35,0.62]}\right\},$$

$$\overline{\eta_X}(x_2^{0.22})=\left\{\frac{u_1}{[0.52,0.7]},\frac{u_2}{[0.42,0.5]},\frac{u_3}{[0.4,0.52]},\frac{u_4}{[0.44,0.67]},\frac{u_5}{[0.5,0.66]},\frac{u_6}{[0.33,0.53]},\frac{u_7}{[0.22,0.44]},\frac{u_8}{[0.1,0.4]},\frac{u_9}{[0.25,0.4]},\frac{u_{10}}{[0.15,0.3]}\right\},$$

$$\overline{\eta_X}(x_3^{0.15})=\left\{\frac{u_1}{[0.4,0.5]},\frac{u_2}{[0.25,0.55]},\frac{u_3}{[0.3,0.6]},\frac{u_4}{[0.1,0.3]},\frac{u_5}{[0.4,0.7]},\frac{u_6}{[0.42,0.65]},\frac{u_7}{[0.24,0.4]},\frac{u_8}{[0.15,0.35]},\frac{u_9}{[0.4,0.72]},\frac{u_{10}}{[0.3,0.45]}\right\}.$$

Adım 2. Bu veriler bir bütün olarak bir Υ_X VFPIVFSS'si yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\Upsilon_X=\left\{\begin{array}{c}
\left(\frac{x_1}{0.3},\left\{\frac{u_1}{[0.65,0.8]},\frac{u_2}{[0.54,0.76]},\frac{u_3}{[0.43,0.9]},\frac{u_4}{[0.56,0.87]},\frac{u_5}{[0.6,0.7]},\frac{u_6}{[0.65,0.8]},\frac{u_7}{[0.76,0.9]},\frac{u_8}{[0.48,0.75]},\frac{u_9}{[0.5,0.65]},\frac{u_{10}}{[0.8,0.95]}\right\}\right)\\
\left(\frac{x_2}{0.45},\left\{\frac{u_1}{[0.76,0.9]},\frac{u_2}{[0.54,0.65]},\frac{u_3}{[0.67,0.7]},\frac{u_4}{[0.8,0.85]},\frac{u_5}{[0.64,0.76]},\frac{u_6}{[0.5,0.8]},\frac{u_7}{[0.56,0.77]},\frac{u_8}{[0.44,0.62]},\frac{u_9}{[0.54,0.66]},\frac{u_{10}}{[0.41,0.7]}\right\}\right)\\
\left(\frac{x_3}{0.2},\left\{\frac{u_1}{[0.8,0.85]},\frac{u_2}{[0.65,0.7]},\frac{u_3}{[0.61,0.8]},\frac{u_4}{[0.45,0.5]},\frac{u_5}{[0.6,0.9]},\frac{u_6}{[0.74,0.86]},\frac{u_7}{[0.55,0.67]},\frac{u_8}{[0.42,0.8]},\frac{u_9}{[0.75,0.92]},\frac{u_{10}}{[0.54,0.75]}\right\}\right)\\
\left(\frac{x_1}{0.56},\left\{\frac{u_1}{[0.5,0.75]},\frac{u_2}{[0.45,0.7]},\frac{u_3}{[0.35,0.8]},\frac{u_4}{[0.46,0.72]},\frac{u_5}{[0.5,0.65]},\frac{u_6}{[0.55,0.71]},\frac{u_7}{[0.7,0.8]},\frac{u_8}{[0.35,0.55]},\frac{u_9}{[0.42,0.5]},\frac{u_{10}}{[0.6,0.8]}\right\}\right)\\
\left(\frac{x_2}{0.7},\left\{\frac{u_1}{[0.6,0.8]},\frac{u_2}{[0.5,0.62]},\frac{u_3}{[0.55,0.6]},\frac{u_4}{[0.64,0.75]},\frac{u_5}{[0.6,0.7]},\frac{u_6}{[0.4,0.6]},\frac{u_7}{[0.35,0.64]},\frac{u_8}{[0.25,0.5]},\frac{u_9}{[0.41,0.6]},\frac{u_{10}}{[0.3,0.42]}\right\}\right)\\
\left(\frac{x_3}{0.35},\left\{\frac{u_1}{[0.65,0.7]},\frac{u_2}{[0.5,0.6]},\frac{u_3}{[0.45,0.7]},\frac{u_4}{[0.35,0.4]},\frac{u_5}{[0.52,0.86]},\frac{u_6}{[0.6,0.75]},\frac{u_7}{[0.43,0.55]},\frac{u_8}{[0.4,0.64]},\frac{u_9}{[0.6,0.8]},\frac{u_{10}}{[0.42,0.6]}\right\}\right)\\
\left(\frac{x_1}{0.78},\left\{\frac{u_1}{[0.3,0.6]},\frac{u_2}{[0.25,0.5]},\frac{u_3}{[0.2,0.6]},\frac{u_4}{[0.3,0.65]},\frac{u_5}{[0.35,0.54]},\frac{u_6}{[0.43,0.51]},\frac{u_7}{[0.4,0.64]},\frac{u_8}{[0.15,0.5]},\frac{u_9}{[0.3,0.4]},\frac{u_{10}}{[0.35,0.62]}\right\}\right)\\
\left(\frac{x_2}{0.92},\left\{\frac{u_1}{[0.52,0.7]},\frac{u_2}{[0.42,0.5]},\frac{u_3}{[0.4,0.52]},\frac{u_4}{[0.44,0.67]},\frac{u_5}{[0.5,0.66]},\frac{u_6}{[0.33,0.53]},\frac{u_7}{[0.22,0.44]},\frac{u_8}{[0.1,0.4]},\frac{u_9}{[0.25,0.4]},\frac{u_{10}}{[0.15,0.3]}\right\}\right)\\
\left(\frac{x_3}{0.5},\left\{\frac{u_1}{[0.4,0.5]},\frac{u_2}{[0.25,0.55]},\frac{u_3}{[0.3,0.6]},\frac{u_4}{[0.1,0.3]},\frac{u_5}{[0.4,0.7]},\frac{u_6}{[0.42,0.65]},\frac{u_7}{[0.24,0.4]},\frac{u_8}{[0.15,0.35]},\frac{u_9}{[0.4,0.72]},\frac{u_{10}}{[0.3,0.45]}\right\}\right)
\end{array}\right\}.$$

Adım 3. Tanım 4.1'den Υ_X^* aralık değerli bulanık kümesi şöyle elde edilir,

$$\Upsilon_X^*=\left\{\begin{array}{c}
\frac{u_1}{[0.2819,0.378]},\frac{u_2}{[0.2243,0.3135]},\\
\frac{u_3}{[0.2183,0.3449]},\frac{u_4}{[0.2372,0.3428]},\\
\frac{u_5}{[0.267,0.3628]},\frac{u_6}{[0.2461,0.3403]},\\
\frac{u_7}{[0.2235,0.327]},\frac{u_8}{[0.1357,0.2754]},\\
\frac{u_9}{[0.2155,0.2996]},\frac{u_{10}}{[0.1985,0.2985]},
\end{array}\right\}$$

Adım 4.

$$\Phi(u_l)=\max\left\{\begin{array}{c}
\Phi(u_1)=0.0961,\Phi(u_2)=0.0892,\\
\Phi(u_3)=0.1266,\Phi(u_4)=0.1056,\\
\Phi(u_5)=0.0958,\Phi(u_6)=0.0942,\\
\Phi(u_7)=0.1035,\Phi(u_8)=0.1398,\\
\Phi(u_9)=0.0841,\Phi(u_{10})=0.1
\end{array}\right\}$$

olduğundan $l=8$ için $\Phi(u_l)=0.1398$ değeri bulunur.

Adım 5. u_8 öğrenci adayı okul yönetiminin istediği parametreleri en iyi karşılayan öğrencidir. Okul birden fazla öğrenci almak istiyorsa öğrenci adayları arasındaki öncelikli sıralama aşağıdaki gibidir,

$$u_8>u_3>u_4>u_7>u_{10}>u_1>u_5>u_6>u_2>u_9$$

Bir karşılaştırma: Burada, yukarıda verilen belirsizlik probleminin çözümü için kullanılacak algoritmayı değiştirmeden FPIVFSS'lerden faydalanılsaydı yine benzer sonuçlara ulaşılıp ulaşılamadığı analiz edilecektir. Dikkat edilmelidir ki; FPIVFSS için alt ve üst aralık değerli bulanık yaklaşım fonksiyonları hesaplamalarda göz ardı edilir. Bu durumda Örnek 4.1'de uygulanan benzer işlemler tekrar edilerek her $u \in U$ için aşağıda verilen sonuçlar elde edilir,

Çizelge 1. FPIVFSS ve VFPIVFSS için $\Phi(u)$ değerleri (The values $\Phi(u)$ for FPIVFSS and VFPIVFSS)

Nesneler	FPIVFSS	VFPIVFSS
u_1	0.0992	0.0961
u_2	0.0863	0.0892
u_3	0.1248	0.1266
u_4	0.08	0.1056
u_5	0.091	0.0958
u_6	0.094	0.0942
u_7	0.1003	0.1035
u_8	0.1237	0.1398
u_9	0.0826	0.0841
u_{10}	0.0863	0.1

Çizelge 1 incelendiğinde FPIVFSS ve VFPIVFSS için $\Phi(u)$ değerlerinin birbirlerine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Ancak FPIVFSS için alt ve üst aralık değerli bulanık yaklaşım fonksiyonları dikkate alınmadığı için en iyi öğrenci $l = 3$ için $\Phi(u_3) = 0.1248$ olarak tespit edilmiştir. Bu yüzden karşılaşılan belirsizlik probleminin en doğru şekilde ifade edilebilmesi ve en ideale yakın bir şekilde verilerin analizinin yapılabilmesi için VFPIVFSS'lerin tercih edilmesi önerilir.

Ayrıca bir hibrit küme tipi, kendisini oluşturan kümelerin özelliklerini içerisinde barındırdığından belirsizliği ifade etmede daha başarılıdır. Bir VFPIVFSS, alt ve üst aralık değerli bulanık yaklaşım fonksiyonları aracılığıyla üç adet FPIVFSS'nin birleşimi sonucunda meydana geldiğinden belirsizliği ifade etmede FPIVFSS'den daha başarılıdır. Bu durumda belirsizlik problemlerinin çözümlerini en ideale yakın bir şekilde elde etmek için sorunu en genel ve açık bir şekilde belirtebilen küme tiplerinin ele alınması gerektiği sonucuna ulaşılır.

6. SONUÇ (CONCLUSION)

Geçmişten günümüze dek literatüre kazandırılan tüm küme modellemeleri belirsizlik problemlerinin en doğru şekilde ifade edilebilmesi ve karar verme sürecinin en ideale yakın bir şekilde sonuçlandırılabilmesi için ortaya atılmıştır. Ancak "En ideale yakın sonuç için şu küme modeli kullanılmalıdır" gibi bir nihai sonuca ulaşılmadığı gibi gün geçtikçe daha ideale yakın sonuçların elde edilmesi bu hedef doğrultusunda araştırmacıları heyecanlandırmaya devam etmektedir. Bu çalışma bu heyecanın bir ürünü olarak VFPIVFSS modelini önermektedir. Dahası VFPIVFSS için bazı temel küme işlemleri verilerek bazı özellikleri incelendi. Ayrıca bir karar verme problemi için bir algoritma önerildi. Çalışmanın sonuna doğru önerilen algoritma bir bir problem üzerinde FPIVFSS ve VFPIVFSS için elde edilen sonuçlar irdelendi.

Çalışmamızda tanımladığımız VFPIVFSS'ler FPIVFSS'lerden daha genel olması ve daha ideale yakın sonuçlara ulaşması, bu küme teorisinin belirsizlik problemlerinin çözümünde daha tercih edilebilir olmasını sağlamaktadır. Ayrıca VFPIVFSS'e özel alt ve üst aralık değerli bulanık yaklaşım fonksiyonları sayesinde belirsizlik problemlerini ifade etmedeki başarısı, karar verme süreçlerinde bu teoriyi daha dikkat çekici yapmaktadır.

ETİK STANDARTLARIN BEYANI (DECLARATION OF ETHICAL STANDARDS)

Bu makalenin yazar(lar)ı çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler.

YAZARLARIN KATKILARI (AUTHORS' CONTRIBUTIONS)

Orhan DALKILIÇ: Deneyleri yapmış ve sonuçlarını analiz etmiştir. Makalenin yazım işlemini gerçekleştirmiştir. / Perofrmed the experiments and analyse the results. Wrote the manuscript.

ÇIKAR ÇATIŞMASI (CONFLICT OF INTEREST)

Bu çalışmada herhangi bir çıkar çatışması yoktur. / There is no conflict of interest in this study.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

[1] Zadeh L.A., "Fuzzy sets", ***Information and Control***, 8:338-353, (1965).

[2] Pawlak Z., "Rough sets", ***Int J Comput Inf Sci***, 11:341-356, (1982).

[3] Molodtsov D., "Soft set theory-first results", ***Comput. Math. Appl.***, 37:19-31, (1999).

[4] Maji P.K., Roy A.R. and Biswas R., "Fuzzy soft sets", ***Journal of Fuzzy Mathematics***, 9(3):589-602, (2001).

[5] Gorzalczany M.B., "A method of inference in approximate reasoning based on interval valued fuzzy sets", ***Fuzzy Sets and Systems***, 21:1-17, (1987).

[6] Demirtaş N., Hussaın S. and Dalkılıç O. "New approaches of inverse soft rough sets and their applications in a decision making problem", ***Journal of applied mathematics and informatics***, 38(3-4): 335-349, (2020).

[7] Demirtaş N. and Dalkılıç O. "An application in the diagnosis of prostate cancer with the help of bipolar soft rough sets", ***on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2019)***, KONYA, 283, (2019).

[8] Dalkılıç O, Demirtas N. "VFP-Soft Sets and Its Application on Decision Making Problems", Journal of

Polytechnic, https://doi.org/10.2339/politeknik.685634, (2021).

[9] Dalkılıç O. “An Application of VFPFSS’s in Decision Making Problems”, Journal of Polytechnic, https://doi.org/10.2339/politeknik.758474, (2021).

[10] Dalkılıç O. and Demirtaş N. “Bipolar soft filter”, ***Journal of Universal Mathematics***, 3(1): 21-27, (2020).

[11] Demirtaş N. and Dalkılıç O. “Decompositions of Soft α-continuity and Soft A-continuity, ***Journal of New Theory***, (31): 86-94, (2020).

[12] Alkhazaleh S., Salleh A.R. and Hassan N. “Fuzzy parameterized interval-valued fuzzy soft set”, ***Applied Mathematical Sciences***, *5*(67): 3335-3346, (2011).

[13] Maji P.K., Roy A.R. and Biswas R., “Soft set theory”, ***Computers and Mathematics with Applications***, 45(4-5): 555–562, (2003).

[14] Maji P.K., Roy A.R. and Biswas R., “An application of soft sets in a decision making problem”, ***Computers and Mathematics with Applications***, 44: 1077-1083, (2002).

[15] Cağman N., Citak F. and Enginoglu S., “Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications”, ***Turkish Journal of Fuzzy Systems***, 1(1): 21-35, (2010).

[16] Cağman N. and Enginoğlu S.,” Soft matrices and its decision makings”, ***Computers and Mathematics with Applications***, 59: 3308-3314, (2010).

[17] Chen D., Tsang E.C.C., Yeung D.S. and Wang X., “The parameterization reduction of soft sets and its applications”, ***Computers and Mathematics with Applications***, 49: 757-763, (2005).

[18] Feng F., Jun Y.B., Liu X. and Li L., “An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making”, ***Journal of Computational and Applied Mathematics***, 234: 10-20, (2010).

[19] Zadeh L.A., “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I”, ***Information Sciences***, 8: 199-249, (1975).

[20] Roy A.R. and Maji P.K., “A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems”, ***Journal of computational and Applied Mathematics***, 203 (2): 412-418, (2007).

[21] Peng X. and Jingguo D., "Hesitant fuzzy soft decision making methods based on WASPAS, MABAC and COPRAS with combined weights", ***Journal of Intelligent and Fuzzy Systems***, 33: 1313-1325, (2017).

[22] Peng X. and Harish G., "Algorithms for interval-valued fuzzy soft sets in emergency decision making based on WDBA and CODAS with new information measure", ***Computers and Industrial Engineering***, 119: 439-452, (2018).

[23] Çağman N., Çıtak F. and Enginoğlu S., “FP-soft Set Theory and Its Applications”, ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics***, 2: 219-226, (2011).

[24] Yang X., Lin T.Y., Yang J., Li Y. and Yu D., Combination of interval-valued fuzzy set and soft set, ***Computers and Mathematics with Application***, 58: 521-527, (2009)