

## Doğrusal Olmayan Tekil Sınır Değer Problemlerinin Chebyshev Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü

*Solution of Nonlinear Singular Boundary Value Problems using Chebyshev Finite Difference Method*

Soner AYDINLIK<sup>1</sup> , Ahmet KIRIŞ<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Doğuş Üniversitesi, Yazılım Mühendisliği Bölümü, 34775, İstanbul, Türkiye

<sup>2</sup>İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 34469, İstanbul, Türkiye

### Öz

Doğrusal olmayan tekil sınır değer problemlerinin çözümü için Chebyshev Sonlu Farklar Yöntemi (CSFY) kullanılmıştır. Yöntemin hata ve yakınsama analizi verilmiştir. Yöntemin yakınsaklığını ve etkinliğini göstermek için, termal patlama, küresel bir hücrede kararlı hal oksijen difüzyonu ve izotermal gaz kürelerinin dengesi gibi mühendislik problemleri incelenmiştir. Sonuçlar problemi alt aralıklara bölmeksizin ve farklı sınır koşulları için değişiklik yapmaksızın, sunulan yöntemin doğruluğu yüksek ve çözüme oldukça hızlı yakınsadığını göstermektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Chebyshev Sonlu Farklar Yöntemi, Chebyshev Polinomları, Doğrusal olmayan Tekil Sınır Değer Problemi, Lane-Emden denklemi.

### Abstract

Chebyshev Finite Difference Method (CFDM) is used for solving nonlinear singular boundary value problems. Error and convergence analysis of the method are given. To show the applicability and efficiency, some engineering problems such as thermal burst, steady-state oxygen diffusion in a spherical cell, and equilibrium of isothermal gas spheres are studied. The results show that without dividing the problem into sub-ranges and any changes for different boundary conditions, the presented method has high accuracy and converges to the solution rapidly.

**Keywords:** Chebyshev finite difference method, Chebyshev Polynomials, Nonlinear singular boundary value problems, Lane-Emden equation.

## I. GİRİŞ

Doğrusal olmayan tekil sınır değer problemi

$$\begin{cases} (g(x) y'(x))' = g(x)F(x, y(x)), \\ y'(0) = 0, \quad a y(1) + b y'(1) = c, \end{cases} \quad (1.1)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada  $a > 0, b \geq 0$  ve  $c$  gerçel sayılar,  $F(x, y(x))$  ve  $F_y(x, y(x))$  negatif olmayan sürekli fonksiyonlardır.  $g(x)$  fonksiyonu  $g(x) \geq 0$  in  $(0,1]$ ,  $g(x) \in C^1[0,1]$  (kendisi ve birinci mertebeye türevi sürekli olan fonksiyonlar uzayı) ve  $\frac{1}{g(x)} \in L^1(0,1)$  (integrallenebilir fonksiyonlar uzayı) özelliklerini sağlamaktadır.

Bu tür problemlerin analitik çözümlerini elde etmek tekillik nedeniyle zordur, hatta bazı sayısal yöntemlerle de yaklaşık çözümler elde edilemediğinden dolayı, bu zorluğun üstesinden gelmek için klasik olmayan bazı yöntemler önerilmektedir [1-12]. Chebyshev polinomları belirli bir aralıkta, bir ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olmalarından ve aynı mertebeden diğer polinom yaklaşımlarına göre belirli bir aralıkta maksimum hatayı minimum yapmalarından dolayı [13], Sunulan CSFY doğrusal olmayan tekil sınır değer problemlerinin çözümü için yukarıda bahsedilen yöntemlerden çok daha avantajlıdır.

Bu çalışmada, (1.1) 'de verilen problemin çözümünü elde etmek için CSFY tabanlı efektif bir sayısal yöntem sunulmuştur. Önerilen yöntemin hata ve yakınsaklık analizleri incelenmiş ve doğrusal olmayan dört gerçek mühendislik problemi çözülmüştür. Literatürdeki diğer çalışmalarla yapılan karşılaştırmalar, önerilen yöntemin verilen aralığın her noktasında geçerli, hatası diğer yöntemlere göre daha düşük mertebeden ve hızlı yakınsayan bir yaklaşım olduğunu göstermektedir.

## II. CHEBYSHEV SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Birinci cins Chebyshev polinomları

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad x = \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi], \quad (2.1)$$

$$\forall n \geq 0, \quad x \in [-1, 1].$$

olarak tanımlanmaktadır ve  $x \in [-1, 1]$  aralığında

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

noktalarında kökleri ve

$$\tilde{x}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

noktalarında ekstremumları bulunmakta olup,

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ağırlık fonksiyonuna göre}$$

ortogonaldirler. Chebyshev polinomlarının en önemli özelliği ekonomikleştirme (economization property) adıyla bilinir ve aşağıdaki teoremdedir [13].

**Teorem 2.1.**  $\tilde{P}_n$ ,  $n$ . dereceden tüm monik polinomlar kümesi olmak üzere, monik Chebyshev polinomları  $\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$  ile tanımlanı ve

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \|\tilde{T}_n(x)\|_\infty \leq \|P_n(x)\|_\infty \quad (2.4)$$

eşitsizliği  $\forall P_n(x) \in \tilde{P}_n$  geçerlidir, burada eşitlik sadece  $P_n(x) \equiv \tilde{T}_n(x)$  durumunda sağlanmaktadır.

CSFY' nde, verilen bir başlangıç veya sınır değer problemi için çözüm Chebyshev polinomlarının bir seri açılımı [14],

$$y(x) \approx \sum_{n=0}^N a_n T_n(x), \quad (2.5)$$

olarak önerilmektedir. Burada toplam üzerindeki (") işareti birinci ve sonuncu terimlerin yarısının alınacağını,  $N$  ise yaklaşım polinomunun derecesini göstermektedir. Chebyshev polinomlarının ortogonalite özelliği kullanılarak,  $a_n$  katsayıları

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y(x_j) T_n(x_j). \quad (2.6)$$

şeklinde elde edilebilir.  $y(x)$  çözümünün  $m$ . mertebeye türevinin  $x_k$  noktalarındaki değeri

$$y^{(m)}(x_k) = \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(m)} y(x_j) \quad (2.7)$$

ile verilir. Burada

$$d_{k,j}^{(m)} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N T_n(x_j) T_n^{(m)}(x_k) \quad (2.8)$$

dir. (2.8) katsayılarının ilk ikisi [15] de,

$$d_{k,j}^{(1)} = \frac{4\theta_j}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{l=0 \\ (n+l) \text{ tek}}}^{n-1} \frac{n\theta_n}{c_l} T_n(x_j) T_l(x_k), \quad (2.9)$$

$k, j = 0, 1, \dots, N$

$$d_{k,j}^{(2)} = \frac{2\theta_j}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{l=0 \\ (n+l) \text{ çift}}}^{n-2} \frac{n(n^2-l^2)\theta_n}{c_l} T_n(x_j) T_l(x_k), \quad (2.10)$$

$k, j = 0, 1, \dots, N$

şeklinde verilmektedir, ayrıca

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 = \theta_n = 1/2, \theta_j = 1 \\ c_0 = 2, c_i = 1 \end{aligned} \right\} j = 1, 2, \dots, N-1, i \geq 1. \quad (2.11)$$

dir. Böylece verilen diferansiyel denklem, başlangıç veya sınır koşulları ile birlikte Gauss-Lobatto noktalarında ( $x_j, j = 0, 1, \dots, N$ ) hesaplanarak,  $y(x_j)$  bilinmeyenlerini içeren cebirsel bir denklem sistemine indirgenerek çözüme ulaşılır.

## III. YAKINSAKLIK VE HATA ANALİZİ

CSFY' nin yakınsaklık ve hata analizi ile ilgili aşağıda verilen teoremlerin ispatları yazarların [16] çalışmasında bulunabilir.

**Teorem 3. 1.** (Yakınsaklık)

$y(x) \in L_w^2(-1,1)$  ve  $|y''(x)| \leq C$  ise (2.5) Chebyshev açılımı,  $N \rightarrow \infty$  durumunda  $y(x)$  fonksiyonuna düzgün yakınsar.

**Teorem 3. 2.**  $d_{k,j}^{(1)}$  ve  $d_{k,j}^{(2)}$  terimlerinin yuvarlama hataları

$$\left\{ \begin{aligned} d_{k,j}^{(1)*} - d_{k,j}^{(1)} &\leq 4\theta_j \left(\delta - O\left(\frac{1}{N^2}\delta\right)\right) \left(\frac{N^2}{3} + \frac{1}{6}\right) \\ d_{k,j}^{(2)*} - d_{k,j}^{(2)} &\leq \frac{4\theta_j}{3} \left(\delta - O\left(\frac{1}{N^2}\delta\right)\right) \left(\frac{N^4}{5} - \frac{1}{5}\right) \end{aligned} \right. \quad (3.1)$$

şeklinde sınırlıdır [17].

**Teorem 3. 3.**  $y(x)$  fonksiyonunun yaklaşım polinomu

$P_N y = \sum_{m=0}^N a_m T_m$  olmak üzere,  $\forall y(x) \in H_w^m(-1,1)$ ,  
 $m \geq 0$ , için kesme hatası

$$\|y - P_N y\|_{L_w^2(-1,1)} \leq C N^{-m} \|y\|_{H_w^{m,N}(-1,1)} \quad (3.2)$$

dır.

#### IV. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde dört doğrusal olmayan tekil sınır değer problemi CSFY ile çözülmüştür. Tüm problemler için verilen  $x \in [a, b]$  aralığı

$$x = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{(b+a)}{2}. \quad (4.1)$$

dönüşümü ile  $t \in [-1, 1]$  aralığına taşınmıştır.

**Örnek 1:** İlk olarak

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) = -e^{y(x)}, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0, & y(1) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

tekil sınır değer problemi incelenmiştir. Gerçek

$$\text{çözümü } y(x) = 2 \ln\left(\frac{4-2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})x^2+1}\right) \text{ olan} \quad (4.2)$$

probleminin  $N = 8$  için CSFY ile sayısal çözümü;

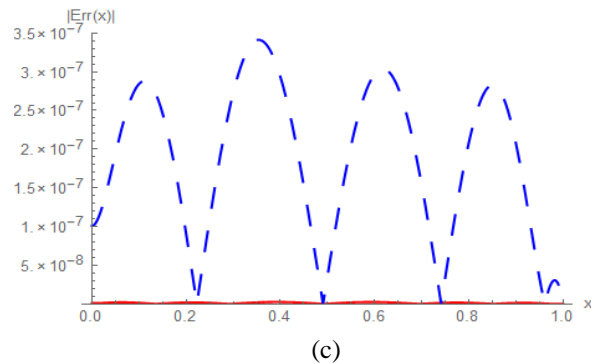
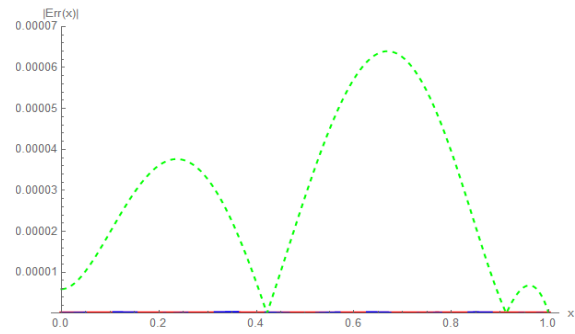
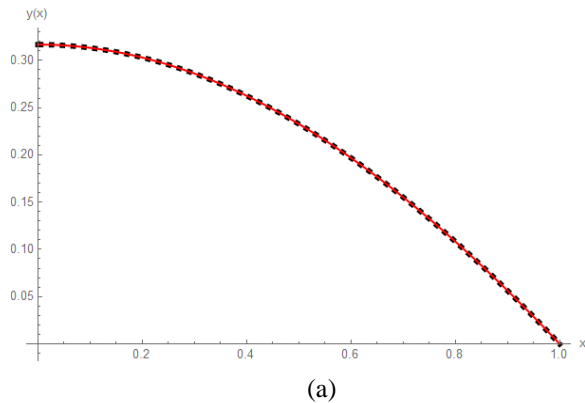
$$\begin{aligned} y(x) = & 0.31669 - 2.66453 \times 10^{-15} x - 0.34314 x^2 \\ & + 2.32483 \times 10^{-5} x^3 + 2.92804 \times 10^{-2} x^4 \\ & + 5.23403 \times 10^{-4} x^5 - 4.32272 \times 10^{-3} x^6 \\ & + 9.50569 \times 10^{-4} x^7 - 2.33492 \times 10^{-6} x^8 \end{aligned} \quad (4.3)$$

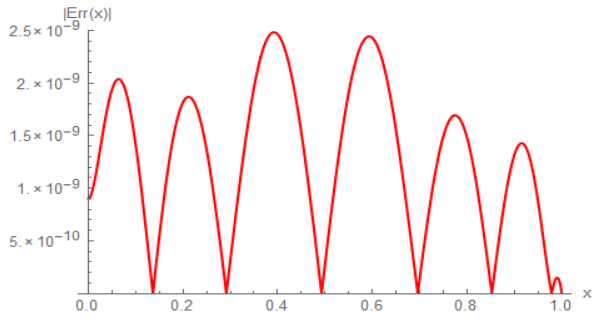
olarak elde edilmektedir. Sayısal sonuçlar “Wolfram Mathematica” ile elde edilmiş olup, varsayılan işlem hassasiyeti  $10^{-16}$  dır ancak bu çalışmada kısaltma amacıyla tüm basamaklar verilmemiştir. CSFY ile [1, 6, 9, 18, 19] da verilen diğer yöntemlerin karşılaştırılması Tablo 1 de verilmiştir.

**Tablo 1.** CSFY ile diğer yöntemlerin maksimum mutlak hatalarının karşılaştırılması.

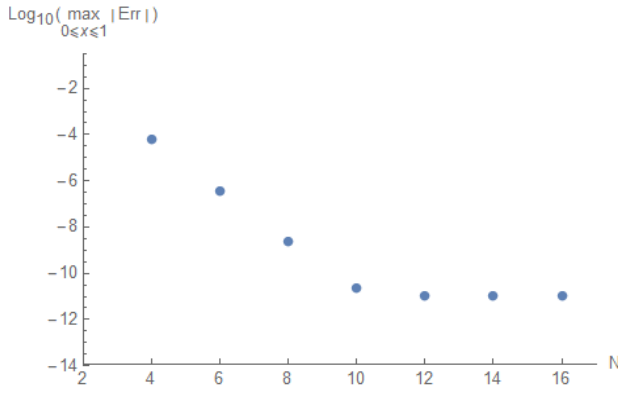
$N$	CSFY	$n$	[6]	[9]	[18]	$n$	[19]	$n$	[1]
4	$6.25E-05$	4	-	-	$5.67E-05$	12	$4.01E-04$	20	$3.16E-05$
6	$2.96E-07$	6	$3.93E-04$	$5.44E-07$	$3.14E-06$	16	$2.54E-05$	40	$7.87E-06$
8	$2.46E-09$	8	$6.95E-05$	$9.20E-09$	$6.35E-07$	20	$2.10E-06$	60	$3.50E-06$

Burada,  $N$  yaklaşım polinomunun derecesini,  $n$  ise alt aralık sayısını göstermektedir. CSFY'nin diğer yöntemlere nazaran problemi alt aralıklara bölmeksizin daha yüksek doğruluk sağladığı açıkça görülmektedir. Şekil 1.a  $N = 8$  için CSFY çözümünü ve analitik çözümü birlikte göstermekte olup, Şekil 1.b,c,d ise sırasıyla  $N = 4, 6, 8$  için CSFY ile analitik çözüm arasındaki mutlak hatayı göstermektedir.





(d)



(e)

**Şekil 1.** a)  $N = 8$  için CSFY çözümü ve analitik çözüm. b)  $N = 4$ , c)  $N = 6$  ve d)  $N = 8$  için CSFY ve analitik çözüm arasındaki mutlak hata farkı. e)  $N = 4, 6, \dots, 16$  için maksimum mutlak hata.

**Örnek 2:** Küresel bir hücrede kararlı durum oksijen difüzyonu çalışmasında ortaya çıkan doğrusal olmayan tekil sınır değer problem

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{\alpha}{x} y'(x) = \frac{\delta y(x)}{y(x) + \mu}, & \delta > 0, \mu > 0 \\ y'(0) = 0, \quad 5y(1) + y'(1) = 5 \end{cases} \quad (4.4)$$

şeklinde. Burada  $\delta = 0.76129$ ,  $\mu = 0.03119$  ve  $\alpha = 2$ . (4.4) probleminin CSFY ile sayısal çözümü;

$$\begin{aligned} y(x) = & 0.82848 + 3.62210 \times 10^{-15} x + 0.12227 x^2 \\ & - 6.76668 \times 10^{-10} x^3 + 1.96442 \times 10^{-4} x^4 \\ & - 4.51380 \times 10^{-8} x^5 - 1.30042 \times 10^{-5} x^6 \\ & - 3.06715 \times 10^{-7} x^7 + 1.45908 \times 10^{-6} x^8 \\ & - 2.86035 \times 10^{-7} x^9 + 5.11063 \times 10^{-9} x^{10}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

olarak elde edilmektedir. Bu denklemin analitik çözümü bilinmediğinden dolayı

$$R_n(x) = \left| y_n'(x) + \frac{2}{x} y_n'(x) - \frac{\delta y_n(x)}{y_n(x) + \mu} \right|, \quad 0 < x < 1. \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanan mutlak artık hata (absolute residual error) formülü kullanılmıştır.

CSFY ile [18, 20] de verilen diğer yöntemlerin mutlak artık hatalarının karşılaştırılması Tablo 2 de verilmektedir.

**Tablo 2.** Mutlak artık hataların karşılaştırılması.

N	CSFY	n	[18]	[20]
4	6.36E-05	4	4.25E-05	4.84E-04
6	9.64E-07	6	6.14E-06	6.78E-05
8	1.11E-08	8	1.38E-06	9.45E-06
10	3.48E-10	10	8.39E-07	1.31E-06

**Örnek 3:** Standart Lane Emden denklemi

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + y^m(x) = 0, & x \geq 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

olarak verilmektedir. (4.7) denkleminin  $m = 0$ ,  $m = 1$  ve  $m = 5$  için analitik çözümleri sırasıyla

$$y(x) = 1 - \frac{1}{6} x^2, \quad y(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{ve} \quad y(x) = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ dir.}$$

**Durum 1.1**  $m = 0$  ve  $N = 4$  için yaklaşım polinomu,

$$\begin{aligned} y(x) = & 1 - 3.88578 \times 10^{-16} x - 0.16666 x^2 \\ & - 1.33226 \times 10^{-14} x^3 + 5.32907 \times 10^{-15} x^4 \approx 1 - \frac{x^2}{6} \end{aligned} \quad (4.8)$$

olarak elde edilmiştir.

**Durum 1.2.**  $m = 1$  ve  $N = 16$  için yaklaşım polinomu

$$\begin{aligned} y(x) = & 0.99999 - 5.85642 \times 10^{-15} x - 0.16666 x^2 \\ & + 1.52207 \times 10^{-9} x^3 + 0.00833 x^4 + 2.16351 \times 10^{-7} x^5 \\ & - 1.9 \times 10^{-4} x^6 + 5.57038 \times 10^{-6} x^7 - 1.42242 \times 10^{-5} x^8 \\ & + 3.79615 \times 10^{-5} x^9 - 6.27821 \times 10^{-5} x^{10} + 7.65878 \times 10^{-5} x^{11} \\ & - 6.811774 \times 10^{-5} x^{12} + 4.29274 \times 10^{-5} x^{13} - 1.81617 \times 10^{-5} x^{14} \\ & + 4.62681 \times 10^{-6} x^{15} - 5.36441 \times 10^{-7} x^{16}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklinde. CSFY ile diğer yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması Tablo 3' te verilmiştir.

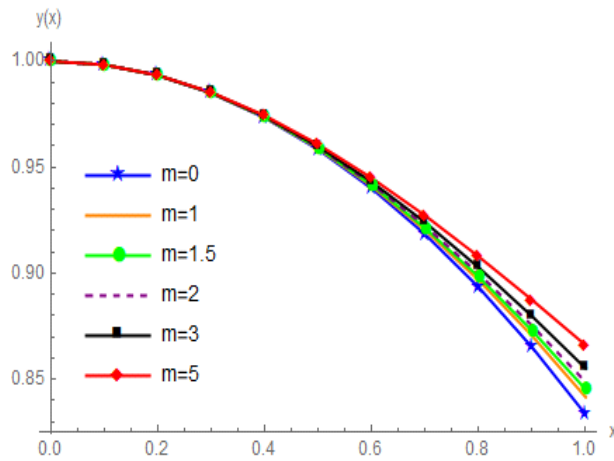
**Tablo 3.** Mutlak maksimum hataların karşılaştırılması.

$x$	[21]	[22]	[23]	[24]	CSFY
0.1	$4.61E-11$	$1.40E-06$	$3.44E-09$	$7.27E-10$	$6.24E-13$
0.5	$4.43E-08$	$2.99E-06$	$1.28E-07$	$4.32E-08$	$5.82E-13$
1.0	$3.74E-05$	$1.99E-06$	$3.78E-05$	$3.74E-05$	$4.63E-13$

**Durum 1.3.**  $m = 5$  ve  $N = 16$  için çözüm

$$\begin{aligned}
y(x) = & 0.99999 - 1.36002 \times 10^{-14} x - 0.16666 x^2 \\
& - 4.70661 \times 10^{-9} x^3 + 0.04166 x^4 - 8.80698 \times 10^{-7} x^5 \\
& - 1.15677 \times 10^{-2} x^6 - 3.17828 \times 10^{-5} x^7 + 3.49178 \times 10^{-3} x^8 \\
& - 3.11723 \times 10^{-4} x^9 - 3.92795 \times 10^{-4} x^{10} - 9.06971 \times 10^{-4} x^{11} \\
& + 1.26308 \times 10^{-3} x^{12} - 6.80095 \times 10^{-4} x^{13} + 1.83709 \times 10^{-4} x^{14} \\
& - 2.14651 \times 10^{-5} x^{15} + 2.23517 \times 10^{-7} x^{16}
\end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak elde edilmiştir.  $[0,1]$  aralığında  $N = 16$  iken CSFY ile elde edilen mutlak maksimum hata  $1.74 \times 10^{-13}$  iken, aynı aralık için [25] de kullanılan Haar wavelet yöntemiyle elde edilen hata  $8.47 \times 10^{-8}$  dir ve bu yöntemde dalgacık çözünürlük seviyesinin maksimum değeri  $J = 9$  ve  $2M = 2^{J+1} = 1024$  olarak alınmakta yani daha çok düğüm noktası kullanılmaktadır. Örnek 3 için  $m = 0, 1, 1.5, 2, 3, 5$  alınarak CSFY ile elde edilen yaklaşım çözümler Şekil 2 de verilmiştir. (4.7) denklemindeki her  $m$  değeri, farklı bir probleme karşılık gelmekte, dolayısıyla Şekil 2 de farklı problemlerin sayısal çözümleri birlikte gösterilmektedir.



**Şekil 2.**  $m = 0, 1, 1.5, 2, 3, 5$  alınarak elde edilen yaklaşık çözümler

**Örnek 4:**

$$\begin{cases}
y''(x) + \frac{(4x+1)}{4x} y'(x) = \frac{5x^3(20x^5 e^{y(x)} - 4x - 17)}{4(4+x^5)}, \\
y'(0) = 0, \quad y(1) + 5y'(1) = \log\left(\frac{1}{5}\right) - 5
\end{cases} \quad (4.11)$$

tekil diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$y(x) = \log\left(\frac{1}{4+x^5}\right)$  dir. CSFY yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal çözüm

$$\begin{aligned}
y(x) = & -1.38629 - 5.66779 \times 10^{-14} x - 1.55565 \times 10^{-10} x^2 \\
& + 1.63695 \times 10^{-8} x^3 - 6.73787 \times 10^{-7} x^4 - 0.24998 x^5 \\
& - 2.00057 \times 10^{-4} x^6 + 1.78223 \times 10^{-3} x^7 - 1.09354 \times 10^{-3} x^8 \\
& + 4.70694 \times 10^{-2} x^9 - 0.10963 x^{10} + 0.27461 x^{11} - 0.24922 x^{12} \\
& - 0.33414 x^{13} + 1.67805 x^{14} - 3.22251 x^{15} + 3.82783 x^{16} \\
& - 3.01115 x^{17} + 1.52702 x^{18} - 0.44998 x^{19} + 0.058273 x^{20}
\end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklinde dir.  $N = 20$  için CSFY yöntemi kullanılarak elde edilen maksimum mutlak  $2.99322 \times 10^{-11}$  ( $x = 0.99933$ ) iken, [3, 26] çalışmalarında  $n = 256$  alınarak elde edilen maksimum mutlak hatalar sırasıyla  $1.9582 \times 10^{-10}$  ve  $1.13 \times 10^{-9}$  dir.

Sonuç olarak bu çalışmada CSFY kullanılarak gerçek mühendislik problemlerinde ortaya çıkan doğrusal olmayan tekil sınır değer problemleri çözülmüştür. Ayrıca bu yöntemin yakınsaklık ve hata analizi verilmiştir. Sayısal sonuçlar CSFY'nin problemi alt aralıklara bölmeksizin diğer yöntemlere göre doğruluğunun daha yüksek ve çözüme daha hızlı yakınsadığını göstermektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] Caglar, H., Caglar, N., & Ozer, M., (2009). B-spline solution of non-linear singular boundary value problems arising in physiology. *Chaos Solitons Fractals*, 39, 1232-1237.
- [2] Abukhaled, M., Khuri, S.A., & Sayef, A., (2011). A numerical approach for solving a class of singular boundary value problems arising in physiology. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 8(2), 353-363.
- [3] Thula, K., & Roul, P., (2018). A High-Order B-Spline Collocation Method for solving nonlinear singular boundary value problems arising in engineering and applied science. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 15(76), 1-24
- [4] Yucel, U., & Sari, M., (2009). Differential quadrature method (DQM) for a class of singular two-point boundary value problem. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(3), 465-475.

- [5] Danish, M., & Kumar, S., (2012). A note on the solution of singular boundary value problems arising in engineering and applied sciences: use of OHAM. *Computers & Chemical Engineering*, 36, 57-67.
- [6] Roul, P., & Warbhe, U., (2016). New approach for solving class of singular boundary value problem arising in various physical models. *Journal of Mathematical Chemistry*, 54, 1255-1285.
- [7] Ravi Kanth, A., & Aruna, K., (2010). He's variational iteration method for treating nonlinear singular boundary value problem. *Computers & Mathematics with Applications*, 60(3), 821-829.
- [8] Chawla, M. M., & Katti, C.P., (1982). Finite difference methods and their convergence for a class of singular two-point boundary value problems. *Numerische Mathematik*, 39, 341-350.
- [9] Roul, P. (2017). On the numerical solution of singular two-point boundary value problems: A domain decomposition homotopy perturbation approach. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40, 7396-7409.
- [10] Pandey, R. K., & Singh, A.K., (2006). A new high-accuracy difference method for a class of weakly nonlinear singular boundary-value problems. *International Journal of Computer Mathematics*, 83(11), 809-817.
- [11] Schreiber, R. (1980). Finite element methods of high order accuracy for singular two-point boundary value problems with non-smooth solutions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 17, 547-566.
- [12] Khaleghi, M., Moghaddam, M. T., Babolian, E., & Abbasbandy, S., (2018). Solving a class of singular two-point boundary value problems using new effective reproducing kernel technique. *Applied Mathematics and Computation*, 331, 264-273.
- [13] Fox, L., & Parker, I.B., (1968). Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Press, London.
- [14] Clenshaw, C.W., & Curtis, A.R., (1960). A method for numerical integration on an automatic computer. *Numerische Mathematik*, 2, 197-205.
- [15] Elbarbary, E. M. E., & El-Kady, M., (2003). Chebyshev finite difference approximation for the boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 139, 513-523.
- [16] Aydinlik, S., & Kiris, A., (2018). A High-Order Numerical Method for Solving Fractional Nonlinear Lane-Emden Type Equations Arising in Astrophysics. *Astrophysics and Space Science*, 363, 264.
- [17] Elbarbary, E.M.E., & El-Sayed, S.M. (2005). Higher order pseudospectral differentiation matrices. *Applied Numerical Mathematics*, 55, 425-438.
- [18] Zhu, H., Niu, J., Zhang, R., & Lin, Y., (2018). A new approach for solving nonlinear singular boundary value problems. *Mathematical Modelling and Analysis*, 23(1), 33-43.
- [19] Singh, R., & Kumar. J., (2016). An efficient numerical technique for the solution of nonlinear singular boundary value problems. *Computer Physics Communications*, 185(4), 466-477.
- [20] Xie, L. J., Zhou, C. L., & Xu, S. (2016). An effective numerical method to solve a class of nonlinear singular boundary value problems using improved differential transform method. *SpringerPlus*, 5, 1066-1084.
- [21] Singh, H. (2018). An efficient computational method for the approximate solution of nonlinear Lane-Emden type equations arising in astrophysics. *Astrophys Space Sci*, 363, 71.
- [22] Parand, K., Dehghan, M., Rezaei, A.R., & Ghaderi, S.M. (2010). An approximation algorithm for the solution of the nonlinear Lane-Emden type equations arising in astrophysics using Hermite functions collocation method. *Comput. Phys. Commun.* 181, 1096-1108.
- [23] Căruntu, B., & Bota, C. (2013). Approximate polynomial solutions of the nonlinear Lane-Emden type equations arising in astrophysics using the squared remainder minimization method. *Comput. Phys. Commun.* 184, 1643-1648.
- [24] Pandey, R.K., & Kumar, N., (2012). Solution of Lane-Emden type equations using Bernstein operational matrix of differentiation. *New Astron.* 17, 303-308.
- [25] Singh, R., Garg, H., & Guleria, V. (2019). Haar wavelet collocation method for Lane-Emden equations with Dirichlet, Neumann and Neumann-Robin boundary conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 346, 150-161.
- [26] Pandey, R.K., & Singh, A.K. (2009). On the convergence of a fourth-order method for a class of singular boundary value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224, 734-742.