Int. J. Adv. Eng. Pure Sci. 2021, 33(2): 265-276
DOI: 10.7240/jeps.796442

RESEARCH ARTICLE / ARAŞTIRMA MAKALESİ

Epidemiyolojideki Kompartman Modellerinin Eşlenmiş Hamilton Analizi

Matched Pair Hamiltonian Analysis of the Compartmental Models in Epidemiology

Begüm ATEŞLİ[1], Oğul ESEN[2], Serkan SÜTLÜ[3]

[1,2] Gebze Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 41400, Kocaeli, Türkiye
[3]Işık Üniversitesi, Matematik Bölümü, Şile, 34980, İstanbul, Türkiye

Öz
Epidemiyolojideki SIR, SEIR, 2-SIR ve 2-SEIR modellerinin Hamilton formülasyonu verildi. Eşlenmiş Lie-Poisson sistemleri yazıldı. SIR ve SEIR modellerinin eşlenmiş Lie-Poisson sistemi oldukları gösterildi. Bir Lie cebiri için bükülmüş eşçevrim genişlemesi çalışıldı. Bu genişlemenin dual uzayı üzerinde eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri elde edildi. SIR ve SEIR kompartman modellerinin iki popülasyon karşılığı olan 2-SIR ve 2-SEIR modellerinin bükülmüş eşçevrim genişlemesiyle elde edilmiş Lie-Poisson sistemi olarak ifade edilebilecekleri gösterildi.
Anahtar Kelimeler: Eşlenmiş Lie cebirleri; Eşlenmiş Lie-Poisson sistemleri; Bükülmüş eşçevrim genişlemesi; Epidemiyolojik kompartman modelleri.

Abstract
Hamiltonian formulations of SIR, SEIR, 2-SIR and 2-SEIR epidemiological models are presented. Matched Lie-Poisson dynamics is exhibited. SIR and SEIR models are expressed as matched pair Lie-Poisson systems. A twisted cocycle extension of a Lie algebra is studied. Lie-Poisson equations are written on the dual of a twisted cocycle extension. It is shown that two population 2-SIR and 2-SEIR models admit this Lie-Poisson formulation.
Keywords: Matched pairs of Lie algebras; Matched Lie-Poisson systems; Twisted cocycle extension; Epidemiological compartmental models.

I. GİRİŞ

Epidemiyoloji için kompartman modelleri 1900'lerin başında çalışılmaya başlanan ve bulaş dinamiğini inceleyen modellerdir [1, 15, 17]. Bu modeller bir çok salgın hastalık için oldukça makul öngörülerde bulunmuş [6, 10, 22], günümüzde ise Covid-19 pandemisi için de kullanılmaktadır [2, 25]. Kompartman modelleri kapalı bir toplumu kompartman olarak adlandırılan parçalara ayırır. Her bir kompartman bir büyük harf ile gösterilir: Örneğin, S ile hasta olma potansiyeli olan insanların toplam sayısı, E ile enfekte olup henüz bulaştırıcı olmayan insanların toplam sayısı, I ile enfekte (ve bulaştırıcı) olan insanların toplam sayısı, R ile ise iyileşmiş insanların toplam sayıları gösterilir. Burada dinamik her bir kompartmanın zaman içindeki değişimlerini modelleyen ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem takımları ile verilir. Şimdi bu çalışmamızda konu ettiğimiz kompartman modelleri örneklerine bir göz atalım.

1.1. SIR ve SEIR Kompartman Modelleri

Bu makalede çalışacağımız epidemiyoloji modellerinden ilki olan SIR modeli, enfekte olmuş kişilerin direkt olarak bulaşıcı olduğu, diğer bir ifade ile E kompartmanının olmadığı, sadece S, I ve R kompartmanlarından oluşan bir modeldir. Bu modeli belirleyen (diferansiyel) denklem takımı, bulaş oranı a ve iyileşme oranı r ile göstereceğimiz sabit reel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -rSI, \\ \dot{I} &= rSI - aI, \\ \dot{R} &= aI. \end{aligned} \tag{1}$$

şeklindedir. Bu modelin daha genel bir hali enfekte olup henüz bulaştırıcı olmayan E kompartmanını da içeren SEIR modelidir. Maruziyetten enfekte duruma geçiş oranı ϵ reel sayısı ile gösterilmek üzere, SEIR modeli

Sorumlu yazar: Begüm ATEŞLİ, Tel: 0262 605 1273, e-posta: b.atesli@gtu.edu.tr
Gönderilme: 20.09.2020, **Düzenleme:** 13.01.2021, **Kabul:** 13.01.2021

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -rSI, \\ \dot{E} &= rSI - \epsilon E, \\ \dot{I} &= -aI + \epsilon E, \\ \dot{R} &= aI \end{aligned} \tag{2}$$

denklem takımı ile belirlenir. Şimdi ileri bir adım olarak, sabit nüfus iki modelin ortak tek bir havuz olarak davrandıklarında (bu iki komşu şehir veya ülkenin karantina sonrası ortak davranışı olabilir) nasıl bir model dahilinde incelendiklerine bakalım. Bu ikili eşlenmeyi SIR ve SEIR için ayrı ayrı yapalım ve sırasıyla 2-SIR ve 2-SEIR adlarını verelim. S_1, E_1, I_1, R_1 ve a_1, r_1, ϵ_1 ilk popülasyonun, S_2, E_2, I_2, R_2 ve a_2, r_2, ϵ_2 ise ikinci popülasyonun kompartmanlarını ve sabitlerini ifade etsin. Bu notasyonlar ışığında $\ell = 1{,}2$ olmak üzere, ilk olarak 2-SIR modeli

$$\begin{aligned} \dot{S}_\ell &= -r_\ell S_\ell I_\ell, \\ \dot{I}_\ell &= r_\ell S_\ell I_\ell - a_\ell I_\ell, \\ \dot{R}_\ell &= a_\ell I_\ell, \end{aligned} \tag{3}$$

şeklinde olacaktır. Sonrasında da 2-SEIR modelini

$$\begin{aligned} \dot{S}_\ell &= -r_\ell S_\ell I_\ell \\ \dot{E}_\ell &= r_\ell S_\ell I_\ell - \epsilon_\ell E_\ell \\ \dot{I}_\ell &= -a_\ell I_\ell + \epsilon_\ell E_\ell \\ \dot{R}_\ell &= a_l I_\ell \end{aligned} \tag{4}$$

olarak yazabiliriz. Şimdi ise bu modelleri analiz etmek için kullanacağımız Hamilton sistemleri hakkında genel bir bakış sunalım.

1.2. Hamilton Denklemleri

Hamilton denklemleri, kuantum fiziğinden, finans ve biyolojiye kadar bir çok disiplinden gelen diferansiyel denklemlerin sağladığı özel bir formdur. Bir Hamilton sisteminin kalitatif (stabilite, kontrol, vs.) analizlerini yaparken cebir ve geometri gibi disiplinlerden gelecek yöntemler kullanılabilmektedir [3, 7]. Bu nedenle bir denklemi Hamilton formunda yazmak, sistemin davranışını öğrenmek için ciddi avantajlar sağlamaktadır. Hamilton dinamiğini metin içinde (bakınız Altbölüm 2.1) detaylı bir şekilde sunacak olsak da, bu makalenin amacını anlatmamıza yardımcı olacağını umarak kısaca şu şekilde bir özet yapabiliriz.

Hamilton denklemlerini yazabilmek için öncelikle bağımlı değişkenlerin koordinat olarak tanımlanacağı bir Poisson katmanına (manifold) ihtiyaç vardır. Poisson katmanı üzerinde ters simetrik, Leibniz ve Jacobi eşitliklerini sağlayan Poisson çerçevesi $\{\bullet,\bullet\}$ - Lie cebiri yapısı - barındırmaktadır. Seçilen bir Hamilton fonksiyonu $\mathcal{H}$ için, Hamilton denklemleri

$$\dot{z} = \{z, \mathcal{H}\} \tag{5}$$

şeklinde yazılır. Burada z ile bağımlı değişkenler vektörü gösterilmiştir. Bir modelin - diferansiyel denklem takımının - Hamilton analizi için, **(1)** uygun bir Poisson çerçevesi tanımlamak, **(2)** uygun bir Hamilton fonksiyonunu belirlemek, ve de sonuç olarak modeli bu inşaların neticesinde (5) formunda yazabilmek gerekir. Bu iki iş - çerçevenin belirlenmesi ve Hamilton fonksiyonunun seçilmesi - için direkt bir metot/algoritma yoktur. Ve fakat simetri barındıran bazı fiziksel sistemler, örneğin katı cisimler dinamiği ve akışkanlar teorisi içindeki bazı ideal modeller, için kullanılan Poisson çerçeveleri özel olarak Lie-Poisson formundadır [20]. Lie-Poisson çerçeveleri, bir Lie cebirinin duali üzerinde ve cebir üzerindeki Lie çerçevesi vasıtasıyla tanımlanır. Lie-Poisson çerçeveleri bizim modellerimiz için de önemli olduğu için metin içinde detaylıca çalışılacaktır (bakınız Altbölüm 2.2). Ayrıca, standart olmayan, Lie-Poisson yapısı taşımayan ve daha çok deneme yanılma ile elde edilen çerçeveler de mevcuttur.

1.3. SIR ve SEIR Modellerin Hamilton Analizi

Epidemiyolojik kompartman modellerin Hamilton analizi literatürde mevcuttur [23, 24]. Çok yakın bir çalışmada [9] ise kapsamlı bir şekilde kompartman modellerin Hamilton formülasyonları verilmiştir. Metnin bütünlüğü açısından SIR (1) ve SEIR (2) modellerinin ve bu modellerin eşlenmiş 2-SIR (3) ve 2-SEIR (4) genelleştirilmelerinin Hamilton formülasyonlarını hatırlatalım. Bunu, her bir model için Poisson çerçevesini ve Hamilton fonksiyonunu sergileyerek başaracağız.

Öncelikle SIR modeline bakalım. Bağımlı değişken $z = (S, I, R)$ olsun. Poisson çerçevesi ise koordinatlarda, a ve r reel sayılar olmak üzere,

$$\{S, R\}_{SIR} = -rSI \qquad \{I, R\}_{SIR} = -aI + rSI \tag{6}$$

ve kalanı 0 olacak şekilde tanımlansın. Hamilton fonksiyonunu toplam nüfus $\mathcal{H} = S + I + R$ alırsak, SIR (1) modelini Hamilton formunda

$$\dot{S} = \{S, \mathcal{H}\}_{SIR} \quad \dot{I} = \{I, \mathcal{H}\}_{SIR} \quad \dot{R} = \{R, \mathcal{H}\}_{SIR} \tag{7}$$

yazabiliriz. Kısa ve kolay bir hesapla, bu kısımda yaptığımız seçimler ile denklem takımı (7)'nin SIR (1) sistemini verdiğini görebiliriz.

Benzer şekilde SEIR modelinin Hamilton formülasyonunu da yazabiliriz. Bu sefer bağımlı değişkenleri $z = (S, E, I, R)$ şeklinde belirleyelim. Poisson çerçevesini, a, r ve ϵ reel sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\{S, R\}_{SEIR} = -rSI \qquad \{E, R\}_{SEIR} = rSI - \epsilon E \\ &\{I, R\}_{SEIR} = -aI + \epsilon E \end{aligned} \tag{8}$$

ve kalanı 0 olacak şekilde tanımlayalım. Hamilton fonksiyonu bir kez daha toplam nüfus $\mathcal{H} = S + E + I + R$ alınırsa, Hamilton denklemleri (5),

$$\dot{S} = \{S, \mathcal{H}\}_{SEIR} \qquad \dot{E} = \{E, \mathcal{H}\}_{SEIR}$$
$$\dot{I} = \{I, \mathcal{H}\}_{SEIR} \qquad \dot{R} = \{R, \mathcal{H}\}_{SEIR} \tag{9}$$

kısa bir hesap sonunda SEIR (2)'yi verecektir.

1.4. 2-SIR ve 2-SEIR Modellerin Hamilton Analizi

2-SIR modelinin Hamilton formülasyonunu sunalım. $z = (S_1, S_2, I_1, I_2, R_1, R_2)$ vektörünü belirleyip, Poisson çerçevesini, $\ell = 1{,}2$ için a_ℓ, r_ℓ reel sayılar olmak üzere,

$$\{S_\ell, R_\ell\} = -r_\ell S_\ell I_\ell \qquad \{I_\ell, R_\ell\} = -a_\ell I_\ell + r S_\ell I_\ell \tag{10}$$

olarak tanımlayalım. Hamilton fonksiyonunu iki popülasyonun toplam nüfusu $\mathcal{H} = S_1 + S_2 + I_1 + I_2 + R_1 + R_2$ alırsak, Hamilton denklemlerinden

$$\dot{S}_\ell = \{S_\ell, \mathcal{H}\}_{2-SIR} \qquad \dot{I}_\ell = \{I_\ell, \mathcal{H}\}_{2-SIR}$$
$$\dot{R}_\ell = \{R_\ell, \mathcal{H}\}_{2-SIR} \tag{11}$$

2-SIR (3) modelini elde ederiz. 2-SEIR modeli için ise $z = (S_1, S_2, E_1, E_2, I_1, I_2, R_1, R_2)$ olarak belirleyelim. Hareket denklemlerini

$$\dot{S}_\ell = \{S_\ell, \mathcal{H}\}_{2-SEIR} \qquad \dot{E}_\ell = \{E_\ell, \mathcal{H}\}_{2-SEIR}$$
$$\dot{I}_\ell = \{I_\ell, \mathcal{H}\}_{2-SEIR} \qquad \dot{R}_\ell = \{R_\ell, \mathcal{H}\}_{2-SEIR} \tag{12}$$

yazalım. Çerçeveyi koordinatlarda, $a_\ell, r_\ell, \epsilon_\ell$ reel sayılar olmak üzere,

$$\{S_\ell, R_\ell\}_{2-SEIR} = -r_\ell S_\ell I_\ell$$
$$\{E_\ell, R_\ell\}_{2-SEIR} = r_\ell S_\ell I_\ell - \epsilon_\ell E_\ell$$
$$\{I_\ell, R_\ell\}_{2-SEIR} = -a_\ell I_\ell + \epsilon_\ell E_\ell \tag{13}$$

ve kalanı 0 olacak şekilde tanımlayıp $\mathcal{H} = S_1 + S_2 + E_1 + E_2 + I_1 + I_2 + R_1 + R_2$ alırsak, 2-SEIR (4) modelini elde ederiz.

1.5. Makalenin Amacı ve İçerik

Bu çalışmada kompartman modellerinin Hamilton analizini bir basamak ileri taşımak, daha net bir ifade ile, S, I, E ve R kompartmanlarının birbiriyle olan ilişkilerinin cebirsel/geometrik analizini yapmak hedeflenmiştir.

Kullanacağımız temel yaklaşım, karşılıklı etki eden iki sistemin kollektif davranışını yazmamıza olanak sağlayan eşlenmiş (Lie-Poisson) Hamilton denklemleri teorisidir [13]. Eşlenmiş Hamilton analizi yeni bir teori olmasına rağmen, elektromanyetik teoriden [12], akışkanlar [11] ve plazma teorisine [14] kadar geniş uygulama alanları bulmuştur. Bu teorideki temel cebirsel yapı, birbiri üzerine karşılıklı olarak etki eden - cebir tasvirleri olan - iki Lie cebirini göz önüne almak ve bu cebirleri aşikar olarak içerecek ve fakat karşılıklı etkileri de koruyacak toplam bir Lie cebirini inşa etmektir. Bu tür Lie cebiri genişlemeleri, literatürde eşlenmiş Lie cebiri (matched pair Lie algebras) adı ile anılır [18], detaylı anlatım için bakınız Altbölüm 2.3. Bu karşılıklı etkiler, dual uzaylar üzerinde dual etkiler tanımlar. Bu sayede, bireysel (Lie-Poisson) Hamilton denklemlerini ve de karşılıklı etkileri de koruyan tek bir Hamilton denklem sistemi elde edilmesi mümkün olur. Bu sürecin detayları metin içinde, Altbölüm 2.4, anlatılmıştır. İki sistemi bu şekilde birleştirmeyi bilmek, aynı zamanda tek bir sistemi parçalar arasındaki ilişkileri koruyacak şekilde analiz etmeyi de mümkün kılar.

Bu çalışmamızda, eşlenmiş Hamilton analizini epidemiyolojik modeller üzerinde çalışacağız ve SIR (1) ve SEIR (2) modellerinin birer eşlenmiş Hamilton sistemi olduğunu (sırasıyla bkz. 4.1 ve 4.2) göstereceğiz. Diğer bir ifade ile, tek bir Hamilton sistemi olarak ifade edilmiş SIR (1) ve SEIR (2) modellerini, karşılıklı etki tepki içindeki iki alt sistemin toplamı olarak ifade edecek, diferansiyel denklemlerdeki her bir terimin bireysel ve/veya karşılıklı etki sonucu olup olmadığını göstereceğiz.

2-SIR (3) ve 2-SEIR (4) modellerini alt dinamiklere bölmek ise yukarıda tarif ettiğimiz eşlenmiş Hamilton sistemlerinden daha genel bir yaklaşım talep etmektedir. Bu tür Lie cebiri genişlemelerine [4]'te birleşik çarpım (unified product) adı verilmiştir. Bir Lie cebiri ve bir vektör uzayının birleşik çarpımı bir Lie cebiri olup bu Lie cebiri ve vektör uzayının direkt toplamı olarak yazılır, ve kendisini oluşturan Lie cebiri parçasını bir Lie altcebiri olarak ihtiva eder. Diğer parçanın birleşik çarpım içerisinde yalnızca bir vektör altuzayı olarak bulunup bir Lie altcebiri olmaması ise bu vektör uzayından Lie cebiri parçasına tanımlanan ters-simetrik bir fonksiyon, bükülmüş eşçevrim (twisted cocycle) dönüşümü, ile telafi edilir. Bu çalışmamızın 3. bölümü teorik olarak bu tip Lie cebirlerini sunmak ve bu tip cebirlerin dual uzayları üzerindeki Poisson yapılarını belirlemek üzerinedir (bkz. 3.2). Bu son durum teorik olarak da literatürde henüz çalışılmamış ve ilk burada sunulacaktır. 2-SIR (3) ve 2-SEIR (4) modellerinin bu teorik yapıya uygun oldukları da sırasıyla Bölüm 4.3 ve 4.4'te verilecektir.

II. HAMILTON DİNAMİĞİ VE EŞLENME PROBLEMİ

2.1. Hamilton Sistemleri

P türevlenebilir bir katman (manifold) olsun [28]. P üzerinde tanımlı reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı $C^\infty(P)$ için

$$\{\bullet,\bullet\}: C^\infty(P) \times C^\infty(P) \to C^\infty(P)$$

operasyonunu düşünelim. Eğer her $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in C^\infty(P)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için bu operasyon

- *(İki-lineerlik.)* $\{a\mathcal{F} + b\mathcal{G}, \mathcal{H}\} = a\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} + b\{\mathcal{G}, \mathcal{H}\}$ ve $\{\mathcal{F}, a\mathcal{G} + b\mathcal{H}\} = a\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} + b\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}$,
- *(Ters simetri.)* $\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} = -\{\mathcal{H}, \mathcal{F}\}$,
- *(Jacobi özdeşliği.)* $\{\mathcal{F}, \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\}\} + \{\mathcal{G}, \{\mathcal{H}, \mathcal{F}\}\} + \{\mathcal{H}, \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}\} = 0$,
- *(Leibniz kuralı.)* $\{\mathcal{F}\mathcal{G}, \mathcal{H}\} = \mathcal{F}\{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \mathcal{G}\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}$

özelliklerini sağlıyorsa, $\{\bullet,\bullet\}$ operasyonu *Poisson çerçevesi*, $(P,\{\bullet,\bullet\})$ ise *Poisson katmanı* olarak adlandırılır [29, 30].

Bir $\mathcal{H} \in C^{\infty}(P)$ fonksiyonu seçelim. Bu fonksiyona *Hamilton fonksiyonu* diyeceğiz. Çerçevenin Leibniz kuralını sağlaması neticesinde, verilen bir Hamilton fonksiyonu $\mathcal{H}$ için bir vektör alanı $X_{\mathcal{H}}$ tanımlayalım:

$$X_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{F},\mathcal{H}\}, \qquad \mathcal{F} \in C^{\infty}(P). \tag{14}$$

Sol taraftaki notasyon, rasgele seçilen bir $\mathcal{F}$ fonksiyonunun $X_{\mathcal{H}}$ vektör alanı etkisindeki yönlü türevini (directional derivative) göstermektedir. Literatürde, $X_{\mathcal{H}}$ vektör alanı *Hamilton vektör alanı* olarak adlandırılır. Bu durumda her $\mathrm{z} \in P$ için,

$$\dot{\mathrm{z}} = X_{\mathcal{H}}(\mathrm{z}) = \{\mathrm{z},\mathcal{H}\} \tag{15}$$

şeklinde yazılan diferansiyel denklem *Hamilton denklemi* adını alır.

Sonlu Boyut - Koordinatlar. Yerel olarak P üzerinde (z_i) koordinat sistemini alırsak, Poisson çerçevesini $N_{ij} = \{z_i, z_j\}$ notasyonu ile belirleyebiliriz. Buradaki $N = [N_{ij}]$ matrisi *Poisson matrisi* olarak adlandırılır. Bu durumda Lie çerçevesinin genel hali (14)'ü ve Hamilton denklemleri (15)'i

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\} = N_{ij}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_j}, \qquad \dot{z}_i = N_{ij}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_j} \tag{16}$$

şeklinde yazabiliriz.

2.2. Lie-Poisson Sistemleri

$\mathfrak{g}$ bir vektör uzayı olsun. Bu vektör uzayı üzerinde tanımladığımız iki-lineer, ters simetrik ve Jacobi özdeşliğini sağlayan

$$[\bullet,\bullet]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

operasyonuna *Lie çerçevesi*, bu operasyonla donatılmış $(\mathfrak{g},[\bullet,\bullet])$ vektör uzayına ise *Lie cebiri* denir. $\mathfrak{g}$ bir Lie cebiriyse, onun duali olan $\mathfrak{g}^*$ uzayında tanımlı reel değerli fonksiyonlar uzayı üzerinde

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}(z) = \langle z, \left[\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z}, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z}\right]\rangle \tag{17}$$

şeklinde tanımlanabilen bir Poisson çerçevesi bulunur. Bu çerçeve *Lie-Poisson çerçevesi* olarak adlandırılır. (17)'deki $\delta\mathcal{F}/\delta z$ ve $\delta\mathcal{H}/\delta z$ türevlerinin Lie cebire ait olabilmesi, dolayısıyla da tanımın geçerli olabilmesi için $\mathfrak{g}$ vektör uzayının $\mathfrak{g}^{**}$ uzayını içermesi gerekmektedir. Bu tanım ışığında, Hamilton fonksiyonu $\mathcal{H}'$nin etkisindeki $\mathcal{F}$'nin dinamiği

$$\dot{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F},\mathcal{H}\}(z) = \langle z, \left[\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z}, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z}\right]\rangle = \langle z, -\mathrm{ad}_{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z}}\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z}\rangle$$
$$= \langle \mathrm{ad}^*_{\delta\mathcal{H}/\delta z} z, \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z}\rangle \tag{18}$$

şeklinde hesaplanır. Buradaki ad ve ad^* operasyonları $\mathfrak{g}$'nin sırasıyla adjoint ve koadjoint operasyonları olup her $X,Y \in \mathfrak{g}$ ve $\mu \in \mathfrak{g}^*$ için

$$ad_X Y \coloneqq [X,Y] \quad ve$$
$$\langle \mathrm{ad}^*_X \mu, Y\rangle = \langle \mu, -\mathrm{ad}_X Y\rangle = -\langle \mu, [X,Y]\rangle$$

olarak tanımlanır. Hamilton denklemi ise

$$\dot{\mathrm{z}} - \mathrm{ad}^*_{\delta\mathcal{H}/\delta z} z = 0 \tag{19}$$

şeklinde yazılır ki bu, $\mathcal{H}$ Hamilton fonksiyonunun etkisindeki *hareket denklemi*dir.

Sonlu Boyut - Koordinatlar. Şimdi sonlu boyutlu $\mathfrak{g}$ uzayının dualinde tanımlı Lie-Poisson yapılarını koordinatlarda inceleyelim. $\{e_i\} = \{e_1, \dots, e_N\}$, $\mathfrak{g}$ uzayının bir bazı ise, bu baz üzerindeki Lie çerçevesi işlemlerini

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k, \tag{20}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan elde ettiğimiz C_{ij}^k sabitleri Lie çerçevesinin *yapı sabitleri*dir. Dual bazı $\{e^i\} = \{e^1, \dots, e^N\}$ şeklinde gösterelim. Bu durumda $\mathfrak{g}^*$'deki herhangi bir eleman $z = z_i e^i$ şeklinde yazılabilir ve $\{z_1, \dots, z_N\}$ reel sayıları da koordinatları ifade eder. Böylece, (17)'deki Lie-Poisson çerçevesinin koordinatlardaki yazımı

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\} = C_{ij}^k z_k \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z_i}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z_j} \tag{21}$$

olurken, (19)'daki hareket denklemi koordinatlarda

$$\dot{z}_i - C_{ij}^k z_k \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z_j} = 0 \tag{22}$$

şeklindedir.

2.3. Eşlenmiş ve (Sol) Yarı Direkt Çarpım Lie Cebirleri

$\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ iki Lie cebiri olsun. Bu cebirlerin karşılıklı etkileşiminden bahsedebilmek için birbirleri üzerinde sağ ve sol etkilerini tanımlamamız gerekir. $\xi, \xi' \in \mathfrak{g}$ ve $\eta, \eta' \in \mathfrak{h}$ için,

$$\begin{aligned} \rhd &: \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad \eta \otimes \xi \mapsto \eta \rhd \xi \\ \lhd &: \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}, \qquad \eta \otimes \xi \mapsto \eta \lhd \xi \end{aligned} \tag{23}$$

olmak üzere iki lineer dönüşüm tanımlayalım. Eğer bu dönüşümler

$$\begin{aligned} [\eta,\eta'] \rhd \xi &= \eta \rhd (\eta' \rhd \xi) - \eta' \rhd (\eta \rhd \xi) \\ \eta \lhd [\xi,\xi'] &= (\eta \lhd \xi) \lhd \xi' - (\eta \lhd \xi') \lhd \xi \end{aligned} \tag{24}$$

eşitliklerini sağlarsa, $\rhd$ ve $\lhd$ dönüşümleri sırasıyla *sol etki* ve *sağ etki* olarak adlandırılır. Burada, okumayı kolaylaştırmak adına, $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$'ye ait Lie çerçeveleri aynı

$[\bullet,\bullet]$ sembolüyle yazılmıştır. Direkt toplam $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ üzerinde bir Lie yapısı tanımlayabilmek için de bu etkilerden yararlanacağız. Öncelikle,

$$\begin{aligned} \eta \triangleright [\xi,\xi'] &= [\eta \triangleright \xi,\xi'] + [\xi,\eta \triangleright \xi'] + (\eta \triangleleft \xi) \triangleright \xi' - (\eta \triangleleft \xi') \triangleright \xi \\ [\eta,\eta'] \triangleleft \xi &= [\eta,\eta' \triangleleft \xi] + [\eta \triangleleft \xi,\eta'] + \eta \triangleleft (\eta' \triangleright \xi) - \eta' \triangleleft (\eta \triangleright \xi) \end{aligned} \tag{25}$$

"uyumluluk" şartlarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &(\xi \oplus \eta), (\xi' \oplus \eta')]_{\bowtie} = ([\xi,\xi'] + \eta \triangleright \xi' - \eta' \triangleright \xi) \\ &\oplus ([\eta,\eta'] + \eta \triangleleft \xi' - \eta' \triangleleft \xi) \end{aligned} \tag{26}$$

şeklinde tanımlanan operasyon, Lie çerçevesi özelliklerini taşır. Böylece $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, [\bullet,\bullet]_{\bowtie})$, *eşlenmiş Lie cebiri* (matched pair Lie algebra) oluşturur. (26)'ya göre etkiler

$$[\eta,\xi] = (\eta \triangleright \xi) \oplus (\eta \triangleleft \xi) \tag{27}$$

eşitliğini sağlamaktadır.

Özel olarak ise denklem (23)'te ikinci satırda verilen $\mathfrak{g}$'nin $\mathfrak{h}$'ye sağ etkisini aşikar kabul edelim. Bu durumu $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{h}$ notasyonu ile belirtip, literatürde *(sol) yarı direkt çarpım* (semi-direct product) adıyla anıldığını hatırlatalım. Bu özel durum için uyumluluk koşulları (25)'ten birincisinin sol etkinin Lie çerçevesini korumasını gerektireceği

$$\eta \triangleright [\xi,\xi'] = [\eta \triangleright \xi,\xi'] + [\xi,\eta \triangleright \xi'], \tag{28}$$

ikinci koşulun ise otomatikman sağlanacağı rahatlıkla gözlenebilir. Eşlenmiş çerçeve ise

$$\begin{aligned} &[(\xi \oplus \eta), (\xi' \oplus \eta')]_{\ltimes} = \left([\xi,\xi'] + \eta \triangleright \xi' - \eta'' \triangleright \xi\right) \\ &\oplus ([\eta,\eta']) \end{aligned} \tag{29}$$

şeklinde indirgenecektir.

Sonlu Boyut - Koordinatlar. $\{\mathrm{e}_\alpha\}$ kümesi $\alpha = 1,\dots,N$ olacak şekilde $\mathfrak{g}$ uzayının, $\{\mathrm{f}_a\}$ kümesi ise $a = 1,\dots,M$ olacak şekilde $\mathfrak{h}$ uzayının bazları olsun. Her bir Lie cebiri için yapı sabitlerini

$$[\mathrm{e}_\alpha,\mathrm{e}_\beta] = C_{\alpha\beta}^{\theta}\mathrm{e}_\theta, \qquad [\mathrm{f}_a,\mathrm{f}_b] = D_{ab}^{j}\mathrm{f}_j. \tag{30}$$

olarak tanımlayalım. $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ direkt toplamı $N + M$ boyutlu bir vektör uzayı olduğundan,

$$\{\bar{\mathrm{e}}_\alpha,\bar{\mathrm{e}}_a\} \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h},\ \ \bar{\mathrm{e}}_\alpha = \mathrm{e}_\alpha \oplus 0,\ \ \bar{\mathrm{e}}_a = 0 \oplus \mathrm{f}_a \tag{31}$$

şeklinde tanımlanmış $\{\bar{\mathrm{e}}_1,\dots,\bar{\mathrm{e}}_{N+M}\}$ kümesi $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ için bir baz oluşturur. Buradaki sonlu yapıda, denklem (23)'te verilen karşılıklı etkiler

$$\mathrm{f}_a \triangleright \mathrm{e}_\alpha = L_{a\alpha}^{\beta}\mathrm{e}_\beta \qquad \mathrm{f}_a \triangleleft \mathrm{e}_\alpha = R_{a\alpha}^{b}\mathrm{f}_b \tag{32}$$

şeklinde yazılabilir. Bazları sabitlediğimiz için $L_{a\alpha}^{\beta}$ ve $R_{a\alpha}^{b}$ sabitlerini tek şekilde elde ederiz. Şimdi eşlenmiş Lie çerçevesi operasyonunu baz elemanlarına uygulayalım. (32)'den yararlanarak

$$\begin{aligned} [\bar{e}_\beta,\bar{e}_\alpha]_{\bowtie} &= \bar{C}_{\beta\alpha}^{\gamma}\bar{\mathrm{e}}_\gamma + \bar{C}_{\beta\alpha}^{a}\bar{\mathrm{e}}_a \\ &= [\mathrm{e}_\beta \oplus 0,\mathrm{e}_\alpha \oplus 0]_{\bowtie} = C_{\beta\alpha}^{\gamma}\mathrm{e}_\gamma \oplus 0 \\ [\bar{\mathrm{e}}_\beta,\bar{\mathrm{e}}_a]_{\bowtie} &= \bar{C}_{\beta a}^{\gamma}\bar{\mathrm{e}}_\gamma + \bar{C}_{\beta a}^{j}\bar{\mathrm{e}}_j \\ &= [\mathrm{e}_\beta \oplus 0, 0 \oplus \mathrm{f}_a]_{\bowtie} = -L_{a\beta}^{\gamma}\mathrm{e}_\gamma \oplus (-R_{a\beta}^{j}\mathrm{f}_j) \\ [\bar{\mathrm{e}}_b,\bar{\mathrm{e}}_a]_{\bowtie} &= \bar{C}_{ba}^{\gamma}\bar{\mathrm{e}}_\gamma + \bar{C}_{ba}^{j}\bar{\mathrm{e}}_j \\ &= [0 \oplus \mathrm{f}_b, 0 \oplus \mathrm{f}_a]_{\bowtie} = 0 \oplus D_{ba}^{j}\mathrm{f}_j \end{aligned} \tag{33}$$

sonuçlarını alırız. Dolayısıyla, eşlenmiş Lie cebirinin yapı sabitleri şu şekilde olur:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{\beta\alpha}^{\gamma} &= C_{\beta\alpha}^{\gamma}, \qquad \bar{C}_{\beta\alpha}^{a} = 0, \qquad \bar{C}_{\beta a}^{\gamma} = -L_{a\beta}^{\gamma} \\ \bar{C}_{\beta a}^{j} &= -R_{a\beta}^{j}, \qquad \bar{C}_{ba}^{\gamma} = 0, \qquad \bar{C}_{ba}^{j} = D_{ba}^{j}. \end{aligned} \tag{34}$$

Bir özel durum olarak (32)'de ikinci denklemle verilen etkilerden $\mathfrak{g}$'nin $\mathfrak{h}$'ye sağ etkisini aşikar kabul edelim. Koordinatlarda, bu durumun gerçekleşebilmesi için tüm $R_{a\alpha}^{b}$ sayılarının sıfır olması gerekecektir. Böylece de eşlenmiş sistem (29) için $\bar{C}_{\beta a}^{j}$ ile kodlanan yapı sabitleri de sıfır olarak hesap edilecektir.

2.4. Eşlenmiş ve (Sol) Yarı Direkt Çarpım Lie-Poisson Sistemleri

Öncelikle $\eta \in \mathfrak{h}$ olacak şekilde bir eleman sabitleyelim. $\mathfrak{h}$ Lie cebiri $\mathfrak{g}$'ye soldan etki ettiği için

$$\eta \triangleright : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad \xi \mapsto \eta \triangleright \xi \tag{35}$$

şeklinde bir lineer dönüşüm tanımlayabiliriz. Bu lineer dönüşümün duali aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\overset{*}{\triangleleft}\eta : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \qquad \langle \mu \overset{*}{\triangleleft} \eta, \xi \rangle = \langle \mu, \eta \triangleright \xi \rangle. \tag{36}$$

Yani $\overset{*}{\triangleleft}$ dönüşümü, $\mathfrak{h}$'nin $\mathfrak{g}^*$'e etkisi olur. Şimdi de $\xi \in \mathfrak{g}$ elemanını sabitleyerek

$$\mathfrak{b}_\xi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{b}_\xi(\eta) = \eta \triangleright \xi \tag{37}$$

lineer dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşümün duali ise aşağıdaki şekildedir:

$$\mathfrak{b}_\xi^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*, \quad \langle \mathfrak{b}_\xi^*\mu, \eta \rangle = \langle \mu, \mathfrak{b}_\xi \eta \rangle = \langle \mu, \eta \triangleright \xi \rangle. \tag{38}$$

Sağ etki için de benzer dönüşümler yazabiliriz. $\xi \in \mathfrak{g}$ elemanını sabitleyerek $\triangleleft \xi$ dönüşümünü ve onun duali olan $\xi \overset{*}{\triangleright}$ dönüşümünü şu şekilde tanımlarız:

$$\triangleleft \xi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}, \qquad \eta \mapsto \eta \triangleleft \xi \tag{39}$$

$$\xi \overset{*}{\triangleright} : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*, \qquad \langle \xi \overset{*}{\triangleright} \nu, \eta \rangle = \langle \nu, \eta \triangleleft \xi \rangle. \tag{40}$$

Burada da $\overset{*}{\triangleright}$ dönüşümü, $\mathfrak{g}$'nin $\mathfrak{h}^*$'e etkisidir. $\eta \in \mathfrak{h}$ elemanını sabitleyerek de $\mathfrak{a}_\eta$ dönüşümünü ve onun duali olan $\mathfrak{a}_\eta^*$ dönüşümünü tanımlarız:

$$\mathfrak{a}_\eta : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{a}_\eta(\xi) = \eta \lhd \xi \tag{41}$$
$$\mathfrak{a}_\eta^* : \mathfrak{h}^* \mapsto \mathfrak{g}^*, \quad \langle \mathfrak{a}_\eta^* \nu, \xi \rangle = \langle \nu, \mathfrak{a}_\eta \xi \rangle = \langle \nu, \eta \lhd \xi \rangle. \tag{42}$$

Bu notasyonlar ışığında, $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{h}^*$ dual uzayı üzerindeki eşlenmiş Lie-Poisson çerçevesi [13], $\mu \in \mathfrak{g}^*$ ve $\nu \in \mathfrak{h}^*$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H},\mathcal{F}\}_{\bowtie}(\mu \oplus \nu) &= \underbrace{\left\langle \mu, \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mu}, \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mu}\right]\right\rangle + \left\langle \nu, \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \nu}, \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \nu}\right]\right\rangle}_{\text{A: Direkt toplam}} \\ &+ \underbrace{\left\langle \mu, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \nu} \rhd \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mu}\right\rangle - \left\langle \mu, \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \nu} \rhd \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mu}\right\rangle}_{\text{B: } \mathfrak{h}\text{'nin } \mathfrak{g} \text{ üzerindeki sol etkisinden gelen terim}} \\ &+ \underbrace{\left\langle \nu, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \nu} \lhd \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mu}\right\rangle - \left\langle \nu, \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \nu} \lhd \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mu}\right\rangle}_{\text{C: } \mathfrak{g}\text{'nin } \mathfrak{h} \text{ üzerindeki sağ etkisinden gelen terim}}\end{aligned} \tag{43}$$

olarak hesaplanır. Bu tanımın geçerli olabilmesi için, $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ uzaylarının sırasıyla $\mathfrak{g}^{**}$ ve $\mathfrak{h}^{**}$ uzaylarını içermeleri gerekmektedir. Eşlenmiş Lie-Poisson ($\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mu,\nu)$ Hamilton fonksiyonuyla üretilmiş) hareket denklemleri ise

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{d\mu}{dt} = ad^*_{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mu}}(\mu)}_{\mathfrak{g}^* \text{ Lie-Pois. denk.}} - \underbrace{\mu \overset{*}{\lhd} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \nu}}_{\mathfrak{h}\text{'nin etkisi}} - \underbrace{\mathfrak{a}^*_{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \nu}} \nu}_{\mathfrak{g}\text{'nin etkisi}} \\ \underbrace{\frac{d\nu}{dt} = ad^*_{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \nu}}(\nu)}_{\mathfrak{h}^* \text{ Lie-Pois. denk.}} + \underbrace{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mu} \overset{*}{\rhd} \nu}_{\mathfrak{g}\text{'nin etkisi}} + \underbrace{\mathfrak{b}^*_{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mu}} \mu}_{\mathfrak{h}\text{'nin etkisi}}\end{aligned} \tag{44}$$

olarak yazılır.

Özel olarak $\mathfrak{g}$'nin $\mathfrak{h}$'ye sağ etkisini aşikar kabul edelim. Bu durumda $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{h}$ uzayının duali üzerinde (sol) yarı direkt çarpım olacak şekilde denklem (43)'te verilen çerçevede *C* ile kodlanmış terimler sıfır gelecektir ve çerçeve

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H},\mathcal{F}\}_{\ltimes}(\mu \oplus \nu) &= \underbrace{\left\langle \mu, \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mu}, \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mu}\right]\right\rangle + \left\langle \nu, \left[\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \nu}, \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \nu}\right]\right\rangle}_{\text{A: Direkt toplam}} \\ &+ \underbrace{\left\langle \mu, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \nu} \rhd \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mu}\right\rangle - \left\langle \mu, \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \nu} \rhd \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mu}\right\rangle}_{\text{B: } \mathfrak{h}\text{'nin } \mathfrak{g} \text{ üzerindeki sol etkisinden gelen terim}}\end{aligned} \tag{45}$$

şeklinde indirgenecektir. Bu özel durumda eşlenmiş hareket denklemleri (44)'te sağ etkiden gelen terimler düşecek ve

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{d\mu}{dt} = ad^*_{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mu}}(\mu)}_{\mathfrak{g}^* \text{ Lie-Pois. denk.}} - \underbrace{\mu \overset{*}{\lhd} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \nu}}_{\mathfrak{h}\text{'nin etkisi}} \\ \underbrace{\frac{d\nu}{dt} = ad^*_{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \nu}}(\nu)}_{\mathfrak{h}^* \text{ Lie-Pois. denk.}} + \underbrace{\mathfrak{b}^*_{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mu}} \mu}_{\mathfrak{h}\text{'nin etkisi}}\end{aligned} \tag{46}$$

olarak elde edilecektir. Yarı direkt çarpım uzayları üzerindeki Hamilton denklemleri için ayrıca bakınız [21].

Sonlu Boyut - Koordinatlar. Eşlenmiş Lie-Poisson cebirini yerel koordinatlarda inceleyelim. $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ uzayı için $\{\bar{\mathrm{e}}_i\}$ bazını (31)'de tanımlamıştık. $\mathfrak{g}^*$ ve $\mathfrak{h}^*$'nin dual bazları da sırasıyla $\{\mathrm{e}^\alpha\}$ ve $\{\mathrm{f}^a\}$ olduğuna göre, $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{h}^*$'nin bazını da (31)'deki gibi tanımlayabiliriz. Yani

$$\{\bar{\mathrm{e}}^\alpha, \bar{\mathrm{e}}^a\} \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{h}^*, \quad \bar{\mathrm{e}}^\alpha = \mathrm{e}^\alpha \oplus 0, \quad \bar{\mathrm{e}}^a = 0 \oplus \mathrm{f}^a \tag{47}$$

şeklinde tanımlanan $\{\bar{\mathrm{e}}^1, \dots, \bar{\mathrm{e}}^{N+M}\}$ kümesi, dual bazdır. Bu bazı kullandığımızda, (36) ve (40) dual dönüşümlerini yerel koordinatlarda

$$\begin{aligned}(\mu_\alpha \mathrm{e}^\alpha) \overset{*}{\lhd} (\eta^a \mathrm{f}_a) &= \mu_\alpha \eta^a L^\alpha_{a\beta} \mathrm{e}^\beta, \\ (\xi^\alpha \mathrm{e}_\alpha) \overset{*}{\rhd} \nu &= \nu_a \xi^\alpha R^a_{b\alpha} \mathrm{f}^b\end{aligned} \tag{48}$$

olarak yazabiliriz. Buradaki $L^\alpha_{a\beta}$ ve $R^a_{b\alpha}$, karşılıklı etkileri tek şekilde tanımlayan (32)'deki sabitlerdir. Öte yandan, (38) ve (42) dönüşümleri yerel koordinatlarda

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}^*_{(\xi^\alpha \mathrm{e}_\alpha)}(\mu_\alpha \mathrm{e}^\alpha) &= \mu_\alpha \xi^\beta L^\alpha_{a\beta} \mathrm{f}^a, \\ \mathfrak{a}^*_{(\eta^a \mathrm{f}_a)}(\nu_a \mathrm{e}^a) &= \nu_a \eta^b R^a_{b\alpha} \mathrm{e}^\alpha.\end{aligned} \tag{49}$$

şeklinde yazılır. Böylece, (43)'teki eşlenmiş Lie-Poisson çerçevesinin koordinatlardaki yazımı

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H},\mathcal{F}\}_{\bowtie}(\mu \oplus \nu) &= \mu_\alpha C^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu_\gamma} + \nu_a D^a_{be} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_b} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu_e} \\ &+ \mu_\alpha L^\alpha_{a\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu_\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu_a} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \right) \\ &+ \nu_a R^a_{b\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_b} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu_\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu_b} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \right)\end{aligned} \tag{50}$$

Eşlenmiş Lie-Poisson çerçevesi operasyonunu koordinatlara uyguladığımızda ise aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\begin{aligned}\{\mu_\theta, \mu_\rho\} &= \mu_\alpha C^\alpha_{\theta\rho}, \\ \{\mu_\theta, \nu_b\} &= -\mu_\alpha L^\alpha_{b\theta} - \nu_a R^a_{b\theta}, \quad \{\nu_b, \nu_e\} = \nu_a D^a_{be}.\end{aligned} \tag{51}$$

(44)'teki eşlenmiş Lie-Poisson hareket denklemlerinin koordinatlardaki yazımı ise

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_\beta}{dt} &= \mu_\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} C^\rho_{\beta\alpha} - \mu_\alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_a} L^\alpha_{a\beta} - \nu_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_b} R^a_{b\beta} \\ \frac{d\nu_e}{dt} &= \nu_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_b} D^a_{eb} + \nu_a \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} R^a_{e\alpha} + \mu_\alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} L^\alpha_{e\beta}.\end{aligned} \tag{52}$$

şeklinde olur.

Özel durumumuz olan sağ etkinin aşikar alındığı zaman Poisson çerçevesi (45) sonlu boyutta şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}\{\mu_\theta, \mu_\rho\} &= \mu_\alpha C^\alpha_{\theta\rho}, \\ \{\mu_\theta, \nu_e\} &= -\mu_\alpha L^\alpha_{e\theta}, \quad \{\nu_b, \nu_e\} = \nu_a D^a_{be}.\end{aligned} \tag{53}$$

ve hareket denklemleri (46) ise

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_\beta}{dt} &= \mu_\rho \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\alpha} C^\rho_{\beta\alpha} - \mu_\alpha \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_a} L^\alpha_{a\beta} \\ \frac{d\nu_e}{dt} &= \nu_a \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_b} D^a_{eb} + \mu_\alpha \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\beta} L^\alpha_{e\beta}.\end{aligned} \tag{54}$$

şeklinde olur.

Daha özel bir durum olarak, Lie çerçevesinin $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ üzerinde aşikar olduğunu, yani tüm $C^\rho_{\beta\alpha}$ ve D^a_{eb} yapı sabitlerini 0 kabul edelim. Bu durumda (52)'deki denklemler

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_\beta}{dt} &= -\mu_\alpha \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_a} L^\alpha_{a\beta} \\ \frac{d\nu_e}{dt} &= \mu_\alpha \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\beta} L^\alpha_{e\beta}\end{aligned} \tag{55}$$

olarak yazılır.

III. LIE-POISSON SİSTEMLERİNİN BÜKÜLMÜŞ EŞÇEVRİM GENİŞLEMESİ

3.1. Lie Cebirlerinin Bükülmüş Eşçevrim Genişlemesi

İlk olarak bir $\mathfrak{K}$ Lie cebiri ile başlayalım ve bu cebirin $\mathfrak{g}$ ile göstereceğimiz bir altcebirini göz önüne alalım. Temel lineer cebir teorisinden biliyoruz ki; $\mathfrak{K} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ direkt toplam eşitliğini sağlayacak bir $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{K}$ vektör altuzayı her zaman mevcuttur. Burada eğer $\mathfrak{h}$ altuzayı $\mathfrak{K}$ üzerindeki Lie çerçevesi altında kapalı ise, diğer bir ifade ile $\mathfrak{h}$ bir Lie altcebiri ise, $\mathfrak{K} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ toplamı bir eşlenmiş Lie cebiri olacaktır. Burada karşılıklı etkiler için $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$ hesabına başvurmak gerekir. Bu durum önceki bölümlerde incelenmişti.

Şimdi ise daha genel bir yapıyı inceleyeceğiz; $\mathfrak{K} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ dekompozisyonunda $\mathfrak{g}$ altcebir iken $\mathfrak{h}$ vektör altuzayı altcebir olmasın. Diğer bir ifade ile $\mathfrak{K}$ üzerindeki Lie çerçevesi $\mathfrak{g}$'de kapalılık özelliği gösterirken, $\mathfrak{h}$'de göstermesin. Bu durumu şu şekilde ifade edebiliriz. $\xi_1, \xi_2, \xi, \xi' \in \mathfrak{g}$ ve $\eta_1, \eta_2, \eta \in \mathfrak{h}$ olmak üzere, çerçeve işlemleri

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi \qquad [\eta_1, \eta_2] = \eta + \xi' \tag{56}$$

olarak yazılabilir. Buradaki hesaplara bağlı kalarak, Φ dönüşümünü

$$\Phi: \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}, \quad \Phi(\eta_1, \eta_2) = proj_{\mathfrak{g}}[\eta_1, \eta_2] = \xi', \tag{57}$$

κ dönüşümünü ise

$$\kappa: \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}, \quad \kappa(\eta_1, \eta_2) = proj_{\mathfrak{h}}[\eta_1, \eta_2] = \eta \tag{58}$$

olarak tanımlayalım. Burada $proj_{\mathfrak{g}}$ ve $proj_{\mathfrak{h}}$ ile $\mathfrak{K}$ uzayından sırasıyla $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ üzerine izdüşüm operatörleri ifade edilmektedir. Öte yandan,

$$[\eta, \xi] = \eta \rhd \xi + \eta \lhd \xi$$

olacak şekilde

$$\rhd: \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \tag{59}$$

ve

$$\lhd: \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \tag{60}$$

lineer dönüşümlerini kurgulayalım. Bu sayede $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ üzerindeki Lie çerçevesi

$$\begin{aligned}[(\xi \oplus \eta), (\xi' \oplus \eta')]_{\bowtie_\Phi} = ([\xi, \xi'] + \eta \rhd \xi' - \eta' \rhd \xi \\ + \Phi(\eta, \eta')) \oplus (\kappa(\eta, \eta') + \eta \lhd \xi' - \eta' \lhd \xi)\end{aligned} \tag{61}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada; (61) ile verilen çerçevenin iki-lineer ve ters simetrik oluşundan, Φ ve κ dönüşümlerinin iki-lineer ve ters simetrik oldukları açıktır. Dahası, direkt bir hesap kullanarak (61) çerçevesinin Jacobi özdeşliğini sağlamasının gerek ve yeter şartı, her $\xi, \xi' \in \mathfrak{g}$, ve her $\eta, \eta', \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathfrak{h}$ için

$$\begin{aligned}&\kappa(\eta, \eta) = 0, \qquad \Phi(\eta, \eta) = 0, \\ &\kappa(\eta, \eta') \lhd \xi = \kappa(\eta, \eta' \lhd \xi) - \kappa(\eta', \eta \lhd \xi) + \eta \lhd (\eta' \rhd \xi) - \eta' \lhd (\eta \rhd \xi), \\ &\kappa(\eta, \eta') \rhd \xi = [\xi, \Phi(\eta, \eta')] + \Phi(\eta, \eta' \lhd \xi) + \Phi(\eta \lhd \xi, \eta') + \eta \rhd (\eta' \rhd \xi) - \eta' \rhd (\eta \rhd \xi), \\ &\eta \rhd [\xi, \xi'] = [\xi, \eta \rhd \xi'] - [\xi', \eta \rhd \xi] + (\eta \lhd \xi) \rhd \xi' - (\eta \lhd \xi') \rhd \xi, \\ &\eta \lhd [\xi, \xi'] = \eta \lhd \xi \lhd \xi' - \eta \lhd \xi' \lhd \xi, \\ &\circlearrowright \Phi(\eta_1, \kappa(\eta_2, \eta_3)) + \circlearrowright \eta_1 \rhd \Phi(\eta_2, \eta_3) = 0, \\ &\circlearrowright \kappa(\eta_1, \kappa(\eta_2, \eta_3)) + \circlearrowright \eta_1 \lhd \Phi(\eta_2, \eta_3) = 0\end{aligned} \tag{62}$$

olmasıdır, [4, Thm. 3.2] ve [5, Thm. 3.1.2].

Buradaki son iki özelliğe sırasıyla Φ dönüşümünün *bükülmüş eşçevrim* (twisted cocycle) özelliği, ve κ dönüşümünün *bükülmüş Jacobi* (twisted Jacobi) özdeşliği denilir.

Özel olarak $\mathfrak{g}$'nin $\mathfrak{h}$ üzerine sağ etkisi (60) aşikar etki olarak alınırsa, ki bu durumda (61) çerçevesi

$$\begin{aligned}[(\xi \oplus \eta), (\xi' \oplus \eta')]_{\ltimes_\Phi} = ([\xi, \xi'] + \eta \rhd \xi' - \eta' \rhd \xi \\ + \Phi(\eta, \eta')) \oplus \kappa(\eta, \eta')\end{aligned} \tag{63}$$

halini alır. Diğer yandan, Φ dönüşümü aşikar olarak alınırsa, (61) çerçevesi

$$\begin{aligned}[(\xi \oplus \eta), (\xi' \oplus \eta')]_{\bowtie} = ([\xi, \xi'] + \eta \rhd \xi' - \eta' \rhd \xi) \\ \oplus (\kappa(\eta, \eta') + \eta \lhd \xi' - \eta' \lhd \xi)\end{aligned} \tag{64}$$

olur. Bu son durumda, (62) içerisindeki son özelliğe bakılarak κ dönüşümünün

$$\circlearrowright \kappa(\eta_1,\kappa(\eta_2,\eta_3)) = 0,$$

yani Jacobi özelliğini sağlayacağı, ve dolayısıyla $\mathfrak{h}$ üzerinde bir Lie çerçevesi belirleyeceği görülebilir. Diğer yandan, eğer $\mathfrak{h}$ bir Lie cebiri (κ dönüşümü Lie çerçevesi olmak üzere), ve (59) dönüşümü de bir Lie cebiri sol etkisi ise, (62) içerisinde sondan bir önceki özellik Φ dönüşümünün $\mathfrak{h}$ Lie cebiri üzerinde $\mathfrak{g}$ katsayılı bir 2-eşçevrim (2-cocycle) olması şeklinde yorumlanabilir.

Toplam uzayında, aşikar olamayan bir bükülmüş eşçevrim mevcut ise, rahatlıkla fark edilebileceği üzere, $\mathfrak{h}$ Lie altcebiri olamayacak, bu durumda da $\mathfrak{h}$'nin $\mathfrak{g}$ üzerinde etkisi gerçek bir Lie cebiri etkisi olamayacaktır. Bu gerçeği akılda tutarak, makale boyunca bu dönüşüme yeni bir terminoloji yaratmamak için etki demeye devam edeceğiz.

Sonlu Boyut - Koordinatlar. Önceki bölümlerdeki seçimlerimize sadık kalalım: $\mathfrak{g}$'nin bazı $\{\mathrm{e}_\alpha\}$ $\alpha = 1,\dots N$ ve $\mathfrak{h}$'nin bazı $\{\mathrm{f}_j\}$, $j = 1,\dots M$ olsun. Denklem (57)'de verilen Φ bükülmüş eşçevrim dönüşümü

$$\Phi(f_a,f_b) = \Phi_{ab}^{\alpha} e_\alpha \tag{65}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada Φ_{ab}^{α} ile verilen sayılar Φ dönüşümünü tek şekilde belirler. Denklem (61)'de verilen Lie çerçevesini ise bazlar üzerinde şu şekilde yazabiliriz:

$$[\mathrm{e}_\alpha,\mathrm{e}_\beta] = C_{\alpha\beta}^{\theta}\mathrm{e}_\theta \qquad [\mathrm{f}_a,\mathrm{f}_b] = D_{ab}^{j}\mathrm{f}_j + \Phi_{ab}^{\alpha}\mathrm{e}_\alpha. \tag{66}$$

Önceki bölümlerle uyumlu olmak adına $C_{\alpha\beta}^{\theta}$ ve D_{ab}^{j} *yapı sabitleri* olarak ifade edilecektir.

Biliyoruz ki, (31) şeklinde tanımlanmış $\{\bar{\mathrm{e}}_1,\dots,\bar{\mathrm{e}}_{N+M}\}$, $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ için bir bazdır. (32) ve (66) eşitliklerinden yararlanarak, (61) çerçevesinin yapı sabitlerini bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
[\bar{\mathrm{e}}_\beta,\bar{\mathrm{e}}_\alpha]_{\bowtie_\Phi} &= \bar{C}_{\beta\alpha}^{\gamma}\bar{\mathrm{e}}_\gamma + \bar{C}_{\beta\alpha}^{a}\bar{\mathrm{e}}_a\\
&= [\mathrm{e}_\beta\oplus 0,\mathrm{e}_\alpha\oplus 0]_{\bowtie_\Phi} = C_{\beta\alpha}^{\gamma}\mathrm{e}_\gamma\oplus 0\\
[\bar{\mathrm{e}}_\beta,\bar{\mathrm{e}}_a]_{\bowtie_\Phi} &= \bar{C}_{\beta a}^{\gamma}\bar{\mathrm{e}}_\gamma + \bar{C}_{\beta a}^{j}\bar{\mathrm{e}}_j\\
&= [\mathrm{e}_\beta\oplus 0,0\oplus \mathrm{f}_a]_{\bowtie_\Phi} = -L_{a\beta}^{\gamma}\mathrm{e}_\gamma\oplus(-R_{a\beta}^{j}\mathrm{f}_j)\\
[\bar{\mathrm{e}}_b,\bar{\mathrm{e}}_a]_{\bowtie_\Phi} &= \bar{C}_{ba}^{\gamma}\bar{\mathrm{e}}_\gamma + \bar{C}_{ba}^{j}\bar{\mathrm{e}}_j\\
&= [0\oplus \mathrm{f}_b,0\oplus \mathrm{f}_a]_{\bowtie_\Phi} = \Phi_{ba}^{\gamma}\mathrm{e}_\gamma\oplus D_{ba}^{j}\mathrm{f}_j.
\end{aligned} \tag{67}$$

Yani, bükülmüş eşçevrim genişlemesiyle elde edilen eşlenmiş Lie cebirinin yapı sabitleri şu şekilde olur:

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{\beta\alpha}^{\gamma} &= C_{\beta\alpha}^{\gamma}, \quad \bar{C}_{\beta\alpha}^{a} = 0, \quad \bar{C}_{\beta a}^{\gamma} = -L_{a\beta}^{\gamma}\\
\bar{C}_{\beta a}^{j} &= -R_{a\beta}^{j}, \quad \bar{C}_{ba}^{\gamma} = \Phi_{ba}^{\gamma}, \quad \bar{C}_{ba}^{j} = D_{ba}^{j}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Eğer özel durum (63)'te verildiği şekilde sağ etki aşikar alınırsa, $R_{a\beta}^{d}$ sayılarının hepsi hem çerçeve işlemleri (67)'de hem de yapı sabitleri (68)'de sıfır olarak hesap edilecektir.

3.2. Lie-Poisson Sistemlerin Bükülmüş Eşçevrim Genişlemesi

$\eta,\eta'\in\mathfrak{h}$, $\nu\in\mathfrak{h}^*$ ve $\mu\in\mathfrak{g}^*$ olmak üzere, ilk olarak aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$\kappa_\eta:\mathfrak{h}\to\mathfrak{h} \qquad \kappa_\eta(\eta') := \kappa(\eta,\eta') \tag{69}$$

Bu lineer dönüşümün (eksi) dualini

$$\kappa_\eta^*:\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{h}^* \quad \langle\kappa_\eta^*\nu,\eta'\rangle = \langle\nu,-\kappa_\eta(\eta')\rangle = -\langle\mu,\kappa(\eta,\eta')\rangle \tag{70}$$

olarak yazarız. Benzer şekilde tanımlayacağımız

$$\Phi_\eta:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g} \qquad \Phi_\eta(\eta') := \Phi(\eta,\eta') \tag{71}$$

dönüşümünün dualini ise

$$\begin{aligned}
&\Phi_\eta^*:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{h}^* \qquad \langle\Phi_\eta^*\mu,\eta'\rangle = \langle\mu,-\Phi_\eta(\eta')\rangle\\
&= -\langle\mu,\Phi(\eta,\eta')\rangle
\end{aligned} \tag{72}$$

olarak yazarız.

Önceki bölümdeki lineer dönüşümler ve yeni tanımladığımız (70) ve (72) dönüşümleri kullanılarak bükülmüş eşçevrim genişlemesiyle elde edilen eşlenmiş çerçeve

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H},\mathcal{F}\}_{\bowtie_\Phi}(\mu\oplus\nu) &= \left\langle\mu,\left[\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu},\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mu}\right]\right\rangle + \left\langle\nu,\kappa\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu},\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\nu}\right)\right\rangle\\
&+ \underbrace{\left\langle\mu,\Phi\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu},\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\nu}\right)\right\rangle}_{\text{A: Bükülmüş eşçevrimden gelen terim}}\\
&+ \underbrace{\left\langle\mu,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}\rhd\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mu}\right\rangle - \left\langle\mu,\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\nu}\rhd\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}\right\rangle}_{\text{B: }\mathfrak{h}\text{'nin }\mathfrak{g}\text{ üzerindeki sol etkisinden gelen terim}}\\
&+ \underbrace{\left\langle\nu,\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}\lhd\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mu}\right\rangle - \left\langle\nu,\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\nu}\lhd\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}\right\rangle}_{\text{C: }\mathfrak{g}\text{'nin }\mathfrak{h}\text{ üzerindeki sağ etkisinden gelen terim}}
\end{aligned} \tag{73}$$

olarak hesaplanır. Bu tanımın geçerli olabilmesi için, $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ uzaylarının sırasıyla $\mathfrak{g}^{**}$ ve $\mathfrak{h}^{**}$ uzaylarını içermeleri gerekmektedir. $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\mu,\nu)$ Hamilton fonksiyonuyla üretilmiş eşlenmiş Lie-Poisson hareket denklemleri ise

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{d\mu}{dt} = ad_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}}^{*}(\mu)}_{\mathfrak{g}^*\text{ Lie–Pois.denk.}} &- \underbrace{\mu\overset{*}{\lhd}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}_{\mathfrak{h}\text{'nin etkisi}} - \underbrace{\mathfrak{a}_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}^{*}\nu}_{\mathfrak{g}\text{'nin etkisi}}\\
\frac{d\nu}{dt} = \kappa_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}^{*}(\nu) &+ \underbrace{\Phi_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}^{*}(\mu)}_{\text{bük.eşçevrim geniş.}} + \underbrace{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}\overset{*}{\rhd}\nu}_{\mathfrak{g}\text{'nin etkisi}} + \underbrace{\mathfrak{b}_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}}^{*}\mu}_{\mathfrak{h}\text{'nin etkisi}}
\end{aligned} \tag{74}$$

olarak yazılır.

Özel olarak $\mathfrak{g}$'nin $\mathfrak{h}$'ye sağ etkisini aşikar kabul edelim. Bu durumda $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{h}$ uzayının duali üzerinde sol yarı direkt çarpım olacak şekilde denklem (73)'te verilen çerçevede C ile kodlanmış terimler sıfır gelecektir ve çerçeve

$$\{\mathcal{H},\mathcal{F}\}_{\ltimes_\Phi}(\mu \oplus \nu) = \left\langle \mu, \left[\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mu}\right]\right\rangle + \left\langle \nu, \kappa\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\nu}\right)\right\rangle$$
$$+ \underbrace{\left\langle \mu, \Phi\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\nu}\right)\right\rangle}_{\text{A: Bükülmüş eşçevrimden gelen terim}}$$
$$+ \underbrace{\left\langle \mu, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu} \rhd \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mu}\right\rangle - \left\langle \mu, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\nu} \rhd \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}\right\rangle}_{\text{B: } \mathfrak{h}\text{'nin } \mathfrak{g} \text{ üzerindeki sol etkisinden gelen terim}} \quad (75)$$

şeklinde indirgenecektir. Bu özel durumda eşlenmiş hareket denklemleri (74)'te sağ etkiden gelen terimler düşecek ve

$$\frac{d\mu}{dt} = \underbrace{ad^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}}(\mu)}_{\mathfrak{g}^* \text{ Lie-Pois.denk.}} - \underbrace{\mu \overset{*}{\lhd} \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}_{\mathfrak{h}\text{'nin etkisi}}$$
$$\frac{d\nu}{dt} = \kappa^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}(\nu) + \underbrace{\Phi^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}(\mu)}_{\text{bük.eşçevrim geniş.}} + \underbrace{\mathfrak{b}^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}}\mu}_{\mathfrak{h}\text{'nin etkisi}} \quad (76)$$

olarak elde edilecektir.

Sonlu Boyut - Koordinatlar. Eşlenmiş Lie-Poisson çerçevesinin koordinatlardaki yazımını şu şekilde buluruz:

$$\{\mathcal{H},\mathcal{F}\}_{\bowtie_\Phi}(\mu \oplus \nu) = \mu_\alpha C^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\beta}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mu_\gamma} + \nu_a D^a_{be}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_b}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\nu_e}$$
$$+\mu_\alpha\Phi^\alpha_{be}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_b}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\nu_e} + \mu_\alpha L^\alpha_{a\beta}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_a}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mu_\beta} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\nu_a}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\beta}\right)$$
$$+\nu_a R^a_{b\beta}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_b}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mu_\beta} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\nu_b}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\beta}\right). \quad (77)$$

Eşlenmiş Lie-Poisson çerçevesi operasyonunu koordinatlara uyguladığımızda ise aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\{\mu_\theta,\mu_\rho\} = \mu_\alpha C^\alpha_{\theta\rho}, \quad \{\mu_\theta,\nu_b\} = -\mu_\alpha L^\alpha_{b\theta} - \nu_a R^a_{b\theta},$$
$$\{\nu_b,\nu_e\} = \mu_\alpha\Phi^\alpha_{be} + \nu_a D^a_{be}. \quad (78)$$

Eşlenmiş Lie-Poisson hareket denklemlerinin koordinatlardaki yazımı aşağıdaki gibi hesap edilir:

$$\frac{d\mu_\beta}{dt} = \mu_\rho\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\alpha}C^\rho_{\beta\alpha} - \mu_\alpha\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_a}L^\alpha_{a\beta} - \nu_a\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_b}R^a_{b\beta}$$
$$\frac{d\nu_e}{dt} = \mu_\alpha\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_b}\Phi^\alpha_{eb} + \nu_a\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_b}D^a_{eb} + \nu_a\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\alpha}R^a_{e\alpha} + \mu_\alpha\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\beta}L^\alpha_{e\beta}. \quad (79)$$

Özel durumumuz olan sağ etkinin aşikar alındığı zaman Poisson çerçevesi (75) sonlu boyutta şu şekilde yazılır:

$$\{\mu_\theta,\mu_\rho\} = \mu_\alpha C^\alpha_{\theta\rho}, \qquad \{\mu_\theta,\nu_d\} = -\mu_\alpha L^\alpha_{d\theta},$$
$$\{\nu_d,\nu_e\} = \mu_\alpha\Phi^\alpha_{de} + \nu_a D^a_{de}. \quad (80)$$

Hareket denklemleri (79) ise

$$\frac{d\mu_\beta}{dt} = \mu_\rho\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\alpha}C^\rho_{\beta\alpha} - \mu_\alpha\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_a}L^\alpha_{a\beta}$$
$$\frac{d\nu_e}{dt} = \mu_\alpha\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_b}\Phi^\alpha_{eb} + \nu_a\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_b}D^a_{eb} + \mu_\alpha\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\beta}L^\alpha_{e\beta} \quad (81)$$

şeklinde olur.

Daha özel bir durum olarak, Lie çerçevesinin $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ üzerinde aşikar olduğunu, yani tüm $C^\rho_{\beta\alpha}$ ve D^a_{eb} yapı sabitlerini 0 kabul edelim. Bu durumda (79)'daki denklemler

$$\frac{d\mu_\beta}{dt} = -\mu_\alpha\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_a}L^\alpha_{a\beta}$$
$$\frac{d\nu_d}{dt} = \mu_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_c}\Phi^\alpha_{dc} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\beta}L^\alpha_{d\beta}\right) \quad (82)$$

olarak yazılır.

IV. KOMPARTMAN MODELLERİNİN ANALİZLERİ

4.1. SIR Modeli

SIR (1) modelinin Hamilton analizi giriş bölümünde sunulmuş, Poisson çerçevesi (6)'da gösterilmişti. Şimdi bu çerçeve tanımının, eşlenmiş Lie-Poisson çerçevesi (43)'ün özel bir durumu olan ve sağ etkinin aşikar alındığı, sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson çerçevesi (45) olduğunu göstereceğiz. Bu durumda da sonuç olarak SIR (1) denklemlerinin, eşlenmiş Lie-Poisson denklemlerinin (44) özel bir durumu olarak sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson denklemleri (46) olduğunu elde etmiş olacağız. Bu geometriyi görünür kılmak için öncelikle Lie cebiri yapısı ile başlayalım.

Bu bölümde $\mathfrak{g}$ Lie cebiri 2 boyutlu olsun ve $\{e_1, e_2\}$ baz takımı ile donanmış olsun. $\mathfrak{h}$ Lie cebiri ise 1 boyutlu olsun ve baz olarak $\{f = f_1\}$ seçilmiş olsun. Bu iki Lie cebirinin de aşikar Lie cebiri yapısına sahip olduklarını kabul edelim. Bu durumda denklem (30)'da tanımladığımız altcebirler için tüm yapı sabitleri 0 olacaktır. Eğer etkiler düşünülmese toplam cebir üzerinde de yapı sabitleri sıfır olacaktır. Ama burada iki cebiri etki tepki ilişkisi içinde kabul edeceğiz. Etkilerden gelen yapı sabitlerini tanımlamadan önce dual uzayları belirleyelim. $\mathfrak{g}^*$ için $\{e^1, e^2\}$ dual bazını alalım ve her $\mu \in \mathfrak{g}^*$ için $\mu = Se^1 + Ie^2$ olacak şekilde, $\mathfrak{h}^*$ için $\{f^1\}$ dual bazını aldığımızda her $\nu \in \mathfrak{h}^*$ için $\nu = Rf^1$ olacak şekilde koordinatları belirleyelim. Dolayısıyla, $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{h}^*$ uzay üzerinde koordinatlar $\{S, I, R\}$ şeklindedir.

Sağ etki aşikar olsun ve $\mathfrak{h}$'nin $\mathfrak{g}$'ye sol etkisi ise

$$\mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_1 = rI\mathrm{e}_1, \qquad \mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_2 = -rI\mathrm{e}_1 + a\mathrm{e}_2 \quad (83)$$

olarak belirlenirse sol etki sabitleri

$$L^1_{11} = rI, \quad L^2_{11} = 0, \quad L^1_{12} = -rI, \quad L^2_{12} = a \quad (84)$$

olarak yazılır. Burada a ve r reel sabitlerdir. Sol etki sabitlerini sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson çerçevesi (45) içine yerleştirdiğimizde direkt bir hesap sonucu SIR (1) modeli için tanımlanan çerçeveye (6) ulaşmış oluruz. Ayrıca, Hamilton fonksiyonunu $\mathcal{H}(S,I,R) = S + I + R$ ve sol etki sabitlerini (84) (55)'te yerine koyduğumuzda SIR (1) denklemlerine ulaşırız.

4.2. SEIR Modeli

SEIR (2) modeli için Poisson çerçevesi (8)'de verilmişti. SIR modelinde yaptığımız geometrizasyon SEIR modeli için de geçerli olacak. SEIR modeli için tanımlanan Poisson çerçevesinin, sağ etkinin aşikar alındığı, sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson çerçevesi (45) olduğunu ve sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson denklemlerinin (46) SEIR modelini verdiğini göstereceğiz.

Aşikar Lie cebiri $\mathfrak{h}$ bir boyutlu olmaya devam etsin ve fakat aşikar Lie cebiri $\mathfrak{g}$ bu durum için 3 boyutlu olsun ve $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazı ile donatılsın. $\mathfrak{g}^*$ için $\{e^1, e^2, e^3\}$ dual bazını aldığımızda her $\mu \in \mathfrak{g}^*$ için $\mu = Se^1 + Ee^2 + Ie^3$ koordinatları tanımlı olsun. Benzer şekilde, $\mathfrak{h}^*$ için $\{f^1\}$ dual bazını aldığımızda her $\nu \in \mathfrak{h}^*$ için $\nu = Rf^1$ alalım. $\mathfrak{h}$'nin $\mathfrak{g}$'ye sol etkisi bazlar cinsinden

$$\mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_1 = rI\mathrm{e}_1, \quad \mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_2 = -rI\mathrm{e}_1 + \epsilon\mathrm{e}_2, \quad \mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_3 = -\epsilon\mathrm{e}_2 + a\mathrm{e}_3 \tag{85}$$

olarak belirlenirse sıfırdan farklı olan sol etki sabitleri

$$L_{11}^1 = rI, \quad L_{12}^1 = -rI, \quad L_{12}^2 = \epsilon, \quad L_{13}^2 = -\epsilon, \quad L_{13}^3 = a \tag{86}$$

olarak elde edilir. Burada a, r ve ϵ reel sabitlerdir. Sol etki sabitlerini, Lie-Poisson çerçevesi (45) içine yerleştirdiğimizde SEIR (2) modeli için tanımlanan çerçeveye (8) ulaşmış oluruz. Ayrıca, Hamilton fonksiyonunu $\mathcal{H}(S,I,R) = S + E + I + R$ göz önüne aldığımızda ve sol etki sabitleri (86)'yı (55) içine yerleştirdiğimizde SEIR (1) denklemlerine ulaşırız.

4.3. 2-SIR Modelinin Eşlenmiş Yapısı

2-SIR (3) modelinin Poisson çerçevesi (10)'da verilmişti. Şimdi bu çerçeve tanımının, sağ etkinin aşikar alındığı, bükülmüş eşçevrim genişlemesiyle elde edilen sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson çerçevesi (75) olduğunu göstereceğiz. Bu durumda da sonuç olarak 2-SIR (3) denklemlerinin sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson denklemleri (82) olduğunu elde etmiş olacağız. Bunun için öncelikle Lie cebiri yapısı ile başlayalım.

$\mathfrak{g}$ Lie cebiri 4 boyutlu olsun ve $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ baz takımı ile donanmış olsun. $\mathfrak{h}$ ise bir Lie altcebiri olmasın, 2 boyutlu bir altuzay olsun ve baz olarak $\{f_1, f_2\}$ seçilmiş olsun. $[\bullet,\bullet]$ $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ üzerinde bir Lie çerçevesi ise, her $\xi, \xi' \in \mathfrak{g}$ için $[\xi, \xi'] = 0$ ve her $\eta, \eta' \in \mathfrak{h}$ için $proj_{\mathfrak{h}}[\eta, \eta'] = 0$ kabul edelim. Bu durumda denklem (66)'da tanımladığımız tüm yapı sabitleri 0 olacak, yalnızca bükülmüş eşçevrim sabitleri sıfırdan farklı olabilecektir. Burada $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$'yi etki tepki ilişkisi içinde kabul edeceğiz.

4.1 ve 4.2 altbölümlerinde olduğu gibi, koordinatları belirleyebilmek için dual uzaylardan bahsetmemiz gerekir. $\mathfrak{g}^*$ için $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ dual bazını alalım ve $\mu \in \mathfrak{g}^*$ için $\mu = S_1e^1 + S_2e^2 + I_1e^3 + I_2e^4$ olacak şekilde, $\mathfrak{h}^*$ için $\{f^1, f^2\}$ dual bazını aldığımızda ise her $\nu \in \mathfrak{h}^*$ için $\nu = R_1f^1 + R_1f^2$ olacak şekilde koordinatları belirleyelim. Dolayısıyla, $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{h}^*$ uzayı üzerinde koordinatlar $\{S_1, S_2, I_1, I_2, R_1, R_2\}$ şeklindedir.

Sağ etki aşikar olsun ve $\mathfrak{h}$'nin $\mathfrak{g}$'ye sol etkisi ise

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}_1 \rhd \mathbf{e}_2 = r_2I_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_1 \rhd \mathbf{e}_3 = -r_1I_1\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_3, \\ &\mathbf{f}_2 \rhd \mathbf{e}_1 = r_1I_1\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{f}_2 \rhd \mathbf{e}_4 = -r_2I_2\mathbf{e}_2 + a_2\mathbf{e}_4 \end{aligned} \tag{87}$$

ve kalanı 0 olarak belirlenirse sıfırdan farklı olan sol etki sabitleri

$$\begin{aligned} &L_{12}^2 = r_2I_2, \quad L_{13}^1 = -r_1I_1, \quad L_{13}^3 = a_1, \\ &L_{21}^1 = r_1I_1, \quad L_{24}^2 = -r_2I_2, \quad L_{24}^4 = a_2 \end{aligned} \tag{88}$$

olarak yazılır. Burada a_1, a_2 ve r_1, r_2 reel sabitlerdir. Ayrıca, bükülmüş eşçevrim dönüşümü

$$\Phi(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = r_1I_1\mathbf{e}_1 - r_2I_2\mathbf{e_2} \tag{89}$$

olsun. Bükülmüş eşçevrimin sıfırdan farklı olan sabitlerini

$$\Phi_{12}^1 = -\Phi_{21}^1 = r_1I_1, \quad \Phi_{12}^2 = -\Phi_{21}^2 = -r_2I_2 \tag{90}$$

şeklinde buluruz. (88) ve (90)'da verilen sabitleri, bükülmüş eşçevrim genişlemesiyle elde edilen sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson çerçevesi (75)'te yerine koyduğumuzda 2-SIR (3) modeli için tanımlanan çerçeveye (10) ulaşmış oluruz. Ayrıca, Hamilton fonksiyonunu $\mathcal{H}(S_1, S_2, I_1, , I_2, R_1, R_2) = S_1 + S_2 + I_1 + I_2 + R_1 + R_2$ ve (88)'deki sabitleri (55)'te yerine koyduğumuzda 2-SIR (1) denklemlerine ulaşırız.

4.4. 2-SEIR Modelinin Eşlenmiş Yapısı

2-SEIR (3) modelinin Poisson çerçevesi (13)'te verilmişti. Bu çerçeve tanımının, sağ etkinin aşikar alındığı, bükülmüş eşçevrim genişlemesiyle elde edilen sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson çerçevesi (75) olduğunu göstereceğiz. Bu durumda da sonuç olarak 2-SEIR (4) denklemlerinin sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson denklemleri (82) olduğunu elde etmiş olacağız.

$\mathfrak{h}$ vektör altuzayı ve ona ait baz, 4.3 altbölümünde olduğu gibi olsun. $\mathfrak{g}$ Lie cebiri ise 6 boyutlu ve $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ baz takımı ile donanmış, ayrıca aşikar Lie cebiri yapısına sahip olsun. Burada da $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$'yi etki tepki ilişkisi içinde kabul edeceğiz. Dual uzayların bazlarını da bir önceki bölüme benzer şekilde yazalım. $\mathfrak{g}^*$ için $\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6\}$ dual bazını alalım ve $\mu \in \mathfrak{g}^*$ için $\mu = S_1e^1 + S_2e^2 + E_1e^3 + E_2e^4 + I_1e^{,5} + I_2e^6$ olacak şekilde, $\mathfrak{h}^*$ için $\{f^1, f^2\}$

dual bazını aldığımızda her $\nu \in \mathfrak{h}^*$ için $\nu = R_1 f^1 + R_1 f^2$ olacak şekilde koordinatları belirleyelim. Dolayısıyla, $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{h}^*$ uzayı üzerinde koordinatlar $\{S_1, S_2, E_1, E_2, I_1, I_2, R_1, R_2\}$ şeklindedir.

Sağ etki aşikar olsun ve $\mathfrak{h}$'nin $\mathfrak{g}$'ye sol etkisi ise

$$\begin{aligned}
&\mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_1 = r_1 I_1 e_1, \quad \mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_2 = r_2 I_2 e_2,\\
&\mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_3 = \epsilon_1 \mathrm{e}_3, \quad \mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_4 = -r_2 I_2 e_2,\\
&\mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_5 = -\epsilon_1 e_3 + a_1 e_5, \quad \mathrm{f}_1 \rhd \mathrm{e}_6 = -\epsilon_2 e_4,\\
&\mathrm{f}_2 \rhd \mathrm{e}_3 = -r_1 I_1 e_1, \quad \mathrm{f}_2 \rhd \mathrm{e}_4 = \epsilon_2 \mathrm{e}_4,\\
&\mathrm{f}_2 \rhd \mathrm{e}_6 = a_2 \mathrm{e}_6
\end{aligned} \tag{91}$$

olarak belirlenirse sıfırdan farklı olan sol etki sabitleri

$$\begin{aligned}
&L_{11}^1 = r_1 I_1, \quad L_{12}^2 = r_2 I_2, \quad L_{13}^3 = \epsilon_1\\
&L_{14}^2 = -r_2 I_2, \quad L_{15}^3 = -\epsilon_1, \quad L_{15}^5 = a_1,\\
&L_{16}^4 = -\epsilon_2, \quad L_{23}^1 = -r_1 I_1, \quad L_{24}^4 = \epsilon_2,\\
&L_{26}^6 = a_2
\end{aligned} \tag{92}$$

olarak yazılır. Burada $a_1, a_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ ve r_1, r_2 reel sabitlerdir. Ayrıca, bükülmüş eşçevrim dönüşümü

$$\Phi(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = -r_1 I_1 \mathbf{e}_1 + \epsilon_2 \mathbf{e}_4 \tag{93}$$

olsun. Bu durumda bükülmüş eşçevrimin sıfırdan farklı olan sabitleri şu şekildedir:

$$\Phi_{12}^1 = -\Phi_{21}^1 = -r_1 I_1, \quad \Phi_{12}^4 = -\Phi_{21}^4 = \epsilon_2. \tag{94}$$

(92) ve (94)'te verilen sabitleri sol yarı direkt çarpım Lie-Poisson çerçevesi (75)'te yerine koyduğumuzda 2-SEIR (4) modeli için tanımlanan çerçeveye (13) ulaşmış oluruz. Ayrıca, Hamilton fonksiyonunu $\mathcal{H}(S_1, S_2, E_1, E_2, I_1,, I_2, R_1, R_2) = S_1 + S_2 + E_1 + E_2 + I_1 + I_2 + R_1 + R_2$ ve (92)'deki sabitleri (82)'de yerine koyduğumuzda 2-SEIR (4) denklemlerine ulaşırız.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, TÜBITAK'ın 117F426 numaralı "Eşlenmis Lagrange ve Hamilton Sistemleri" isimli projesinin bir parçasıdır. Desteği için TÜBITAK'a teşekkür ederiz.

KAYNAKLAR

[1] Abbey, H. (1952). An examination of the Reed-Frost theory of epidemics. *Human biology*, *24*(3), 201.

[2] Abou-Ismail, A. (2020). Compartmental Models of the COVID-19 Pandemic for Physicians and Physician-Scientists. *Sn Comprehensive Clinical Medicine*, 1.

[3] Abraham, R., Marsden, J. E., & Marsden, J. E. (1978). *Foundations of mechanics* (Vol. 36). Reading, Massachusetts: Benjamin/Cummings Publishing Company.

[4] Agore, A. L., & Militaru, G. (2014). Extending structures for Lie algebras. *Monatshefte für Mathematik*, *174*(2), 169-193.

[5] Agore, A., & Militaru, G. (2019). *Extending Structures: Fundamentals and Applications*. CRC Press.

[6] Anderson, R. M. (2013). *The population dynamics of infectious diseases: theory and applications*. Springer.

[7] Arnol'd, V. I. (2013). *Mathematical methods of classical mechanics* (Vol. 60). Springer Science & Business Media.

[8] Ay, A., Gürses, M., & Zheltukhin, K. (2003). Hamiltonian equations in R 3. *Journal of mathematical physics*, *44*(12), 5688-5705.

[9] Ballesteros, A., Blasco, A., & Gutierrez-Sagredo, I. (2020). Hamiltonian structure of compartmental epidemiological models. *arXiv preprint arXiv:2006.00564*.

[10] Brauer, F., Castillo-Chavez, C., & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology* (Vol. 2, p. 508). New York: Springer.

[11] Esen, O., Grmela, M., Gümral, H., & Pavelka, M. (2019). Lifts of symmetric tensors: fluids, plasma, and grad hierarchy. *Entropy*, *21*(9), 907.

[12] Esen, O., Pavelka, M., & Grmela, M. (2017). Hamiltonian coupling of electromagnetic field and matter. *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics*, *9*(1), 3-20.

[13] Esen, O., & Sütlü, S. (2016). Hamiltonian dynamics on matched pairs. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, *13*(10), 1650128.

[14] Esen, O., & Sütlü, S. (2020). Matched pair analysis of the Vlasov plasma. *arXiv preprint arXiv:2004.12595*.

[15] Hethcote, H. W. (2000). The mathematics of infectious diseases. *SIAM review*, *42*(4), 599-653.

[16] Bäuerle, G. G., Kerf, E. A., & ten Kroode, A. P. E. (1997). *Finite and infinite dimensional Lie algebras and applications in physics* (Vol. 2). Elsevier.

[17] Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, *115*(772), 700-721.

[18] Majid, S. (1990). Matched pairs of Lie groups associated to solutions of the Yang-Baxter equations. *Pacific Journal of Mathematics*, *141*(2), 311-332.

[19] Marsden, J. E., Misiołek, G., Perlmutter, M., & Ratiu, T. S. (1998). Symplectic reduction for semidirect products and central extensions. *Differential Geometry and its Applications*, *9*(1-2), 173-212.

[20] Marsden, J. E., & Ratiu, T. S. (2013). *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.

[21] Marsden, J. E., Ratiu, T. S., & Weinstein, A. (1984). Reduction and Hamiltonian structures on duals of semidirect product Lie algebras. *Cont. Math. AMS*, *28*, 55-100.

[22] Murray, J. D. (2007). *Mathematical biology: I. An introduction* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.
[23] Nakamura, G. M., & Martinez, A. S. (2019). Hamiltonian dynamics of the SIS epidemic model with stochastic fluctuations. *Scientific reports*, *9*(1), 1-9.
[24] Nutku, Y. (1990). Bi-Hamiltonian structure of the Kermack-McKendrick model for epidemics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *23*(21), L1145.
[25] Oliveira, G. (2020). Refined compartmental models, asymptomatic carriers and COVID-19. *arXiv preprint arXiv:2004.14780*.
[26] Olver, P. J. (2000). *Applications of Lie groups to differential equations* (Vol. 107). Springer Science & Business Media.
[27] Schottenloher, M. (2008). *A mathematical introduction to conformal field theory* (Vol. 759). Springer.
[28] Șuhubi, E. S. (2008). *Dış form analizi*. Türkiye Bilimler Akademisi.
[29] Vaisman, I. (2012). *Lectures on the geometry of Poisson manifolds* (Vol. 118). Birkhäuser.
[30] Weinstein, A. (1983). The local structure of Poisson manifolds. *Journal of differenti*