Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi, (2020), 11 (2), 528-551. *Araştırma Makalesi*
Western Anatolia Journal of Educational Sciences, (2020), 11 (2), 528-551.

Öğrenci Hata ve Yanılgıları ile Başa Çıkma Yolları: Limit Örneği[1]

The Ways to Overcome Student Errors and Misconceptions: The Case of Limit

Semiha KULA ÜNVER, Doç. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi, İzmir/TÜRKİYE, semiha.kula@deu.edu.tr

Aytuğ ÖZALTUN ÇELİK, Dr., Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Denizli/TÜRKİYE, aytug.deu@gmail.com

Esra BUKOVA GÜZEL, Prof. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi, İzmir/TÜRKİYE, esra.bukova@deu.edu.tr

Kula Ünver, S., Özaltun Çelik, A. ve Bukova Güzel, E. (2020). Öğrenci hata ve yanılgıları ile başa çıkma yolları: Limit örneği. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi, 11*(2), 528-551.

Geliş tarihi: 30.09.2020 Kabul tarihi: 21.12.2020 Yayımlanma tarihi: 28.12.2020

Öz. Bu çalışmada lise matematik öğretmeni adaylarının öğrencilerin sahip olabileceği olası hata ve yanılgıları ile başa çıkma yollarını incelemek amaçlanmaktadır. Durum çalışmasından yararlanılarak yürütülen araştırmanın katılımcılarını 40 lise matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Öğretmen adaylarından kendilerine verilen iki senaryoyu ayrıntılı bir şekilde yazılı olarak yanıtlamaları istenmiştir. Söz konusu senaryolarda, verilen fonksiyonların belli noktalardaki limit değerleri sorulmuş ve senaryolar tahtaya kalkan öğrencilerin verdiği yanıtları sınıftaki başka bir öğrencinin anlamadığı kurgusu üzerine inşa edilmiştir. Araştırmanın verileri içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Bazı öğretmen adaylarının söz konusu öğrenci hata ve yanılgılarının nedenlerini belirlemede problemler yaşadıkları ve hatta kendilerinin de kavramsal bilgilerinin yeterli düzeyde olmadığı görülmüştür. Bazı adaylar ise senaryolarda yer alan öğrenci düşüncelerine yanıt verirken günlük yaşam bağlamlı örneklerden yararlanmıştır. Bu örneklerde öğretmen adaylarının sözel ve cebirsel gösterimlerin yanı sıra tablo ve grafiksel temsillerden de yararlandıkları görülmüştür. Matematiksel yazılımlar ve grafik hesap makinesi kullanarak limiti alınan fonksiyonun grafiğini çizeceklerini belirten katılımcılar da olmuştur. Çalışmanın bulguları ışığında öğretmen adaylarının limit kavramına ilişkin olası hata ve yanılgılarının belirlenerek giderilmesine ve alan ve alan öğretimi bilgilerinin güçlendirilmesine yönelik çalışmaların yapılması önerilmektedir.
Anahtar Kelimeler: Limit kavramı, Öğrenci düşüncesi bilgisi, Öğrenci hata ve yanılgıları, Matematik öğretmeni adayı.

Abstract. In this study, it was aimed to examine the high school preservice mathematics teachers' approaches of overcoming the possible errors and misconceptions students might have. The participants of the study which was conducted by case study were forty high school preservice mathematics teachers. Preservice teachers were asked to write their responses for the two scenarios given to them. In these scenarios, it was asked what value the limit at specific points of the given functions was equal to, and these scenarios were constructed on that a student in the class did not understand another student's response. The data of the study was analyzed with a content analysis method. It was revealed that some preservice teachers had problems for determining students' errors and misconceptions and also their conceptual knowledge was insufficient. Some participants used real life examples to respond the student thinking given in the scenario. The preservice teachers used graphics and tables as well as algebraic and verbal representations. Also, some preservice teachers expressed that they could draw the graph of the function by using mathematical dynamic software and calculators. In the direction of the

[1] Bu çalışma 1st International Science, Education, Art & Technology Symposium'da sunulan sözlü bildirinin genişletilmiş halidir.

findings, it is suggested that the studies should be done to determine and respond preservice mathematics teachers' possible errors and misconceptions and to develop mathematical knowledge for teaching.
Keywords: Concept of limit, Knowledge of student thinking, Student errors and misconceptions, Preservice mathematics teachers.

Extended Abstract

Introduction. Considering and responding students' thinking is a necessary process in mathematics classes for effective mathematical learning and teaching (Stockero, Rupnow and Pascoe, 2017). In these processes, as well as students' appropriate thoughts, it becomes significant for teachers to think of student errors and misconceptions which are a part of students' thoughts as valuable components in classrooms. In the report of National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), it is emphasized that mathematical errors should be seen as "potential avenues for student learning" rather than "dead ends". However, managing the process including students' errors and misconceptions and making them catalyzers for learning are not easy for mathematics teachers. Especially novice teachers in comparison with experienced teachers have challenges in responding to students' thinking in classrooms (Jacobs, Lamb and Philipp, 2010; Levin and Richards, 2010). Thus, it is of significant importance to present the contents to define students' errors and misconceptions and to respond to them in teacher education programs. This study grounded on the students' possible errors and misconceptions while finding limits of the functions including rational expressions. Revealing preservice students' actions in relation to students' possible errors and misconceptions provides mathematics educators to assess the content of mathematics teacher education programs. In this direction, the aim of the study is to examine preservice secondary mathematics teachers' ways to determine and overcome students' possible errors and misconceptions related to the infinite limit.

Method. This study was an embedded single-case design with multiple units of analysis. The participants were forty preservice secondary mathematics teachers enrolled in the last semester of a state college of education. These preservice teachers who completed mathematics and mathematics teaching courses were given two scenarios related to students' errors and misconceptions. In the context of these scenarios, they were asked to assume that some students in their classrooms expressed the equations of $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ and $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ but that some students could not understand these responses and to explain their ways of explaining these limits and overcoming these situations in detail. The data consisted of preservice teachers' written explanations. The authors examined the data based on content analysis under two categories: the ways to determine the reasons of students' errors and misconceptions and the ways to overcome students' errors and misconceptions.

Results. The preservice mathematics teachers mostly attempted to overcome students' errors and misconceptions without determining their reasons. Only five preservice teachers mentioned what they would do to determine the reasons underlying students' errors and misconceptions. The preservice teachers' limited approaches to determine the reasons of students' possible challenges in two scenarios were estimating and questioning. They used different representations of limit to overcome students' errors and misconceptions. They explained these limits graphically and/or algebraically. Also, there were preservice teachers using table or real-life examples. Some preservice teachers attempted to overcome students' errors by using different representations together. But however, while some of them used these representations correctly, some preservice teachers used these representations inappropriately or incorrectly. Besides, some preservice teachers had inconsistent approaches in using different representations. Even if they used a representation correctly, they did not use another representation correctly as to support all representations with each other they used. Especially using a real-life example to represent these infinite limits was a challenge for the preservice teachers.

Discussion and Conclusion. The preservice mathematics teachers had limited actions in determining the reasons of students' possible errors and misconceptions. Although determining the underlying reasons of students' thinking before responding to them was valuable in the classrooms, the preservice teachers directly tended to overcome them without examining. Since they did not know how to assess students' errors and misconceptions, they might have had inadequate actions in determining their reasons. Their tendencies might lead them to not overcome students' errors effectively, thus, firstly articulating students' errors is significant. Being familiar with reasons of students' misconceptions provides a mathematics teacher to determine the reason of a student's thinking in a class and to use appropriate methods to respond to it (Tirosh, 2000). The teachers who were interested in the reasons of students' thoughts can have effective approaches in using instantly students' errors and misunderstanding as a catalyzer in the class and in planning all classes. In this study, the preservice teachers mostly used graphs and tables in order to respond students' errors and misconceptions. These representations are effective for students to understand the limit of a function at a point. Bergthold (1999) stated that using the graphs and tables and associating them with each other while finding limits of a function at a point are effective in understanding the concept of limit (cited in Özmantar and Yeşildere, 2008). Using these representations to respond students' thinking may derive from the preservice teachers' content knowledge related to the limit. However, the preservice teachers' knowledge of students' thinking is important in responding to their ideas. Thus, as well as their content knowledge, it is important that preservice teachers notice students' possible errors and misconceptions and know the ways to overcome them.

Giriş

Matematiksel öğrenme süreçlerinde öğretmenler farklı öğrenci düşünceleriyle karşılaşmaktadırlar. Bu düşünceler kimi zaman öğrencilerin kavramları anlamlı bir şekilde öğrendiklerini gösterirken kimi zaman da yanılgılarının yansıması olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin sahip oldukları yanılgılar ve yaptıkları hatalar da onların düşünme süreçlerine ve ihtiyaçlarına ilişkin kanıtlar sunmaktadır. Öğretmenler bu kanıtlara dayalı olarak öğrencilerinin matematiksel kavramları geliştirmelerine yardımcı olmak için hataların altında yatan nedenleri ele alabilirler (Brodie, 2014). Öğrencilerin hata ve yanılgılarını öğretim sürecinde bir destek olarak gören Borasi (1994), bu hata ve yanılgıları sınıf ortamında tartışmanın öğrencilere farklı düşünceleri inceleme ve eleştirme fırsatı sağlayacağını belirtmektedir. Benzer şekilde, Kazemi (1998) öğrenciler arasında hataların tartışılmasının onların matematikte daha başarılı olmalarını sağlayabileceğini ifade etmektedir. Bu sebeple, öğrencilerin matematiksel hata ve yanılgıları doğru kullanıldığı ve fırsata dönüştürüldüğü takdirde onların kavramlarla ilgili anlamalarını geliştirmekte ve bilgilerini oluşturmalarını desteklemektedir (Seifried ve Wuttke, 2010).

Hatalar ve yanılgılar öğrenme sürecini desteklemesine karşın öğretmenler hata ve yanılgıların oluşumunu engellemek için öğrencileri yönlendirmekte veya öğrencilerin sahip oldukları yanılgıları ve yaptıkları hataları görmezden gelebilmektedirler (Kula Ünver ve Bukova Güzel, 2016). Hataya doğru bir yanıt vermek farklı açıklamalarda bulunulmasını gerektirebileceğinden zor bir süreç olabilmektedir (Virvou ve Alepis, 2005). Öğrencilere etkili dönütler vererek sınıf ortamında öğrenci hatalarını ve yanılgılarını fırsata çevirmek için öğretmenlerin ilk olarak bu hata ve yanılgıların altında yatan nedenler üzerine düşünmeleri ve bunları ortaya çıkaracak eylemlerde bulunmaları gereklidir. Hata ve yanılgılara dayalı öğrencilerin yaşayabilecekleri güçlüklere öğretmenlerin aşina olmaları hem öğrenci yanılgılarının kaynaklarını hem de öğretim için uygun yöntemleri belirlemede onlara yardımcı olabilmektedir (Tirosh, 2000). Öğretmenler deneyimlerinin yanı sıra sınıf ortamında da farklı etkileşimlerle öğrencilerin hata ve yanılgılarını ortaya çıkarabilirler. Bu amaçla güçlük yaşayan öğrenciye ya da farklı öğrencilere sorular sorabilir, tartışma ortamı yaratabilir veya kendi deneyimlerine dayalı tahminlerde bulunabilirler. Sonrasında öğrencileri farklı gösterim biçimleri üzerine düşünmeye teşvik etme, güçlüğün nedeniyle ilişkili farklı örnekler üzerine çalışmalarını sağlama ya da teknoloji veya somut materyaller sunma gibi eylemlerle mevcut yanılgılarını gidererek öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini güçlendirebilirler. Ancak bu süreçleri yönetebilmek ve öğrenci hata ve yanılgılarını öğrenme için katalizör haline dönüştürebilmek kolay olmamaktadır. Özellikle deneyimsiz öğretmenler deneyimli öğretmenlere göre sınıf ortamında öğrencilerin düşüncelerine yanıt vermede daha fazla zorluk yaşamaktadırlar (Jacobs, Lamb ve Philipp, 2010; Levin ve Richards, 2010). Bu sebeple öğretmen eğitiminde öğrenci hata ve yanılgılarını tanımlamaya ve bunlara sınıf ortamında yanıt vermeye yönelik içerikler sunmak önemli hale gelmektedir. Örneğin, Son (2013), benzer dikdörtgenlerde oran ve orantı konusu kapsamında öğrencilerin yaptıkları hatalara yönelik öğretmen adaylarının yorumlamalarını ve nasıl yanıt verdiklerini incelemiştir. Çalışmada oran ve orantı konusu ile ilgili güçlü alan bilgileri olan öğretmen adayları bile öğrenci hatalarını işlemsel açıdan yorumlamışlar ve çoğu hataları ortadan kaldırmak için gösterme ve anlatma yönteminden yararlanmışlardır. Son (2013) öğretmen adaylarının anlamaları, yorumlamaları ve öğretim stratejileri arasındaki tutarsızlığın, onların kendi bilgilerindeki yetersizlikleri, kavramsal öğrenme ortamı oluşturmadaki zorlukları, işlemsel bilgi gibi kendi aşina oldukları matematiğe güvenme eğilimleri ve anlamayı sağlayacak şekilde matematik öğretmeye yönelik dirençleri ile açıklanabileceğini yorumlamıştır. Bu sonuçlara dayalı olarak da öğretmen eğitimcilerinin öğretmen adaylarına öğrenci hatalarını tam olarak fark edebilecekleri öğrenme fırsatları sunmaları ve bu doğrultuda uygun öğretimler planlamaları gerektiğini vurgulamıştır.

Bunlar doğrultusunda öğretmen eğitiminde gerek gerçek öğrenci yanıtları gerekse hazırlanan çeşitli senaryolarla öğretmen adayları farklı matematiksel kavramlarla ilgili öğrenci hata ve yanılgılarıyla karşılaştırılmalı ve bu durumlara yönelik değerlendirmeler yaparak ne gibi eylemlerde bulunabilecekleri konusunda fikirler üretmeleri istenmelidir. Bu sayede öğretmen adaylarının mesleki gelişimlerini destekleyerek kavramları derinleştirmeleri ve öğretim süreçlerine yönelik fikirler oluşturmaları sağlanabilir. Bunun yanı sıra bu gibi içeriklerle öğretmen adaylarının ilgili kavramlara ilişkin alan ve alan öğretimi bilgileri ortaya çıkarılabilir ve var olan olası eksiklikleri doğrultusunda gerekli destekler sunulabilir.

Bu çalışmada lise matematik öğretmeni adaylarının sonsuz limiti içeren durumlarda öğrencilerin sahip olabileceği olası hata ve yanılgıları belirleme ve başa çıkma yollarını incelemek amaçlanmıştır. Bu amaçla geleceğin öğretmenlerinin olası öğrenci hata ve yanılgıları karşısında sergileyecekleri eylemleri ortaya çıkarmak ve mevcut eylemlerine dayalı öğretmen yetiştirmede matematik öğretimi derslerinin içeriğinin değerlendirilmesi hedeflenmiştir. Son sınıfa gelerek alan ve alan öğretimi derslerini büyük ölçüde tamamlamış öğretmen adaylarının öğrenci düşüncelerini dikkate alma ve onlara yanıt verme ile ilgili yaklaşımları öğretmen eğitimi sürecinde yapılması gereken revizyonlara yönelik ipuçları sunacaktır. Dolayısıyla bu ipuçları, geleceğin matematik öğretmenlerinin etkili öğretimler gerçekleştirecek ve öğrencilerinin düşüncelerini ön planda tutacak şekilde öğretmen eğitimi programlarını tamamlamalarını desteklemek için öğretmen eğitimcilerine yol gösterici olabilir. Bu çalışmanın sonuçlarının öğretmen adaylarının yanı sıra deneyimli ya da göreve yeni başlamış öğretmenlerin yaklaşımlarına yönelik de fikirler sunacağı düşünülmektedir. Çünkü öğretmen adayları matematik öğrenme ve öğretme süreçlerine ilişkin pratiklerini öğretmenlik mesleğine başladıklarında da sürdürme eğilimindedirler (Hiebert, Berk, Miller, Gallivan ve Meikle, 2019). Dolayısıyla çalışmanın sonuçları doğrultusunda matematik eğitiminde öğrenme için önemli bir araç olarak görülen öğrenci hata ve yanılgılarını belirleme ve bunlara yanıt verme eylemlerine yönelik matematik öğretmenlerinin ihtiyaçları da belirlenebilir ve mesleki gelişim programlarına bu ihtiyaçlar dâhil edilebilir.

Limit kavramı ve olası yanılgılar

Limit kavramının analizin temel kavramlarından birisi olması (Nair, 2010; Salas ve Hille, 1990) ve limiti öğrenmeden süreklilik, türev ve integral kavramlarının öğrenilmesinin mümkün olmaması (Bukova, 2006; Cornu, 1991) kavramı daha da önemli hale getirmektedir. Önemi göz ardı edilemez olan limit kavramının öğretim sürecini şekillendiren farklı görüşler bulunmaktadır. Tall ve Vinner (1981) öğrencilerin x’in a’ya yaklaşmasına bağlı olarak f(x)'in c'ye yaklaşması olarak ele alınan dinamik yaklaşımı sezgisel olarak anladıklarını ve sonrasında formal tanım ile ilgili anlayışlar oluşturduklarını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin limitin bu dinamik anlayışını içeren kavram imajları bazı güçlükleri de beraberinde getirmektedir. Örneğin, limiti dinamik bir anlayışla bir sınıra yaklaşma olarak anlamlandıran bir öğrenci o sınıra asla ulaşılamayacağı (Cotrill, vd. 1996) fikriyle bir noktada limiti alınan bir fonksiyonun bir reel değere eşit olamayacağını düşünebilir. Bu çıkarım ise limitin formal tanımına ilişkin anlayışı oluşturmada öğrencinin güçlük yaşamasına neden olabilir (Tall ve Vinner, 1981). Cotrill, vd. (1996) dinamik süreçle ilişkili olarak öğrencilerin limitin sonsuz sayıda hesaplama içerdiğini anlamalarının önemli olduğuna vurgu yapmaktadırlar. Bu anlayışa dayalı olarak a'ya yakın noktalarda fonksiyonun sonlu sayıda değerini hesaplamanın ötesine geçemeyen bir öğrencinin limit kavramını içselleştiremeyeceğini ifade etmektedirler. Limitin anlaşılmasında önemli olan bu süreç yaklaşımı yığılma ve komşuluk kavramlarının anlaşılmasını da gerektirmektedir. Dolayısıyla limitin sadece belirli noktaların fonksiyonda karşılık geldiği değerler göz önüne alınarak hesaplanmasının ötesinde o noktanın komşuluğu etrafında fonksiyonun davranışı ile ilgili olduğu fikrine dayalı olduğu anlamlandırılmalıdır. Limitin formal olarak da bu kavramlar ile ilişkili olarak tanımlandığı göz önüne alındığında, öğrencilerin yığılma ve komşuluk kavramlarına ilişkin oluşturdukları anlayışlar limitin öğrenilmesinde belirleyicidir (Engelbrecht, 2010).

Limitin kavramına ilişkin farklı bir bakış açısı da Gray ve Tall’un (1994) ortaya koydukları teorik çerçeve bağlamında sunulmaktadır. Gray ve Tall (1994) *pro*cess (süreç) ve con*cept* (kavram) kelimelerinden ve bu kelimelerin anlamlarının karışımından yeni bir sözcük olarak procept kavramını türetmişlerdir. Böylelikle matematikte hem işlemi hem de süreci temsil eden gösterimlerin doğurduğu belirsizliklerin önüne geçmeyi hedeflemişlerdir. Procept, süreç-kavram amalgamı olarak hem süreç hem de kavramın aynı şekilde gösterilmesi durumlarından bahsetmektedir. Bu çalışmada ele alınan limit kavramının gösterimi açısından da benzer öğrenci güçlüklerinin yaşanması olasıdır. Çünkü $\lim_{x \to a} f(x)$ notasyonu hem yaklaşımı $(x \to a \text{ iken } f(x) \to L)$ hem de limitin değerini $(\lim_{x \to a} f(x) = L)$ ifade ettiğinden dolayı süreç-kavram amalgamıdır (procept) (Gary ve Tall, 1994). Bu anlayışa dayalı olarak öğrenciler limiti aranan noktanın komşuluğunda fonksiyonun davranışını ele almak yerine limiti aranan noktayı fonksiyonda yerine yazma gibi kısıtlı bir anlayışa sahip olabileceklerdir. Bu durumu ele alan Cornu (1991), limit değerini hesaplamada izlenebilecek açık bir işlem sırasının olmamasının bu kısıtlı anlayışa neden olabileceğini vurgulamaktadır.

Bu kavramları göz ardı eden öğretim süreçleri ya da öğrencilerin ön anlayışları limit kavramına ilişkin öğrencilerin çeşitli yanılgılara sahip olmalarına neden olabilmektedir (Cornu, 1991; Davis ve Vinner, 1986; Szydlik, 2000; Tall ve Vinner, 1981; Williams, 1991). Bu yanılgıların kaynakları psikolojik temelli olabilirken, öğretimsel süreçlerden ya da limit kavramının yapısından da kaynaklı olabilmektedir (Cornu, 1991). Cornu (1991) yaşanılan olası yanılgıların psikolojik kaynaklarını öğrencinin matematiksel alt yapısı, öğretim öncesinde limit kelimesine yüklediği anlamlar ya da bilişsel değişime karşı öğrencinin direnç göstermesi ile açıklamaktadır. Dolayısıyla günlük konuşma dilinde limite yüklenen anlam ile matematikte yüklenen anlamının farklılaşması (Jaffar ve Dindyal, 2011) sebebiyle limit kavramına ilişkin yanılgılar limit kavramının formal tanımı verilmeden çok daha önce ortaya çıkabilmektedir (Juter, 2006).

Günlük konuşma dilinden kaynaklı yanılgıların dışında öğretim sürecinde de öğrenciler limit kavramına ilişkin çeşitli yanılgılar yaşamaktadırlar. Limit alınan noktada fonksiyonun tanımlı olması, sürekli olması, limit alınan noktanın fonksiyonun tanım kümesinde yer alması ve fonksiyonun her noktada limitli olması gerektiği gibi yanılgılar (Özmantar ve Yeşildere, 2008) bunlardan bazıları olarak karşımıza çıkmaktadır. Öğrenciler fonksiyonun değeri ile limit değerinin aynı olduğu düşüncesi ile limit almayı noktayı yerine koyma olarak görebilmektedirler (Jordaan, 2005). Bu yanılgıya sahip olan öğrenciler polinom fonksiyonlar için geçerli olan ve limitin özellikleri arasında verilen noktayı fonksiyonda yerine yazma özelliğini genellemektedirler (Kula, 2011; Kula ve Bukova Güzel, 2014). Öğrenciler tanımsızlık ve belirsizlik içeren limit durumlarıyla ilgili sadece tanımsız olan noktalarda fonksiyonun limitinin olabileceği ve fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda limitinin olamayacağı düşüncelerine de sahip olabilmektedirler (Kula ve Bukova Güzel, 2014). Bu gibi yanılgılar komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının anlamlandırılmamasından kaynaklanabilmektedir (Çetin, Dane ve Bekdemir, 2012; Zengin, 2017). Bunlara ek olarak, öğretmenlerin prototip örnekler üzerinden limit kavramını öğrencilere sunmaları ve sadece işlemsel yönüne odaklanmaları da öğrencilerin kavramsal öğrenmede güçlükler yaşamalarına sebep olabilmektedir (McGuffey, 2018).

Öğrencilerin bir diğer yanılgıları da epistemolojik olarak limit ile ilgili kavramların yapısına dayanmaktadır. Bunlardan biri de öğrencilerin sonsuzluk kavramına yükledikleri anlam ile ilgilidir. Bu kapsamda bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin yanı sıra sonsuzu içeren limit durumlarını öğrenirken de çeşitli güçlükler yaşayabilmektedirler (Adams, 2013). Örneğin $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ gibi sonsuzda limit işleminin sonlu olmasını anlamak öğrenciler için güç olabilmektedir (Juter, 2006). Öğrenciler limit kavramına ilişkin dinamik anlayışları olmadığı için sonsuzda limit durumlarında x'in sonsuzluğa yaklaşmasını irdelemek yerine sonsuzluğu doğrudan x'in yerine koymakta veya sonsuzluk noktasında ne olacağı hakkında düşünmektedirler (Jones, 2015). Bunun yanı sıra, bu statik anlayışlarına dayalı olarak $\lim_{x \to a} f(x) = \mp \infty$ eşitliklerine karşılık sonsuz limit işlemlerinde de öğrenciler güçlükler yaşamaktadırlar. Sonsuz limitin söz konusu olduğu durumlardan biri de $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a}$ gibi rasyonel ifadeleri içeren durumlardır. Rasyonel ifadeler öğrencilerin süreksizlik kavramıyla karşılaştıkları ilk kavram olduğu gerekçesiyle de öğrenciler bu kavramın limiti ile ilgili güçlükler yaşamaktadırlar (Adams, 2013). Mevcut çalışma öğrencilerin rasyonel ifadeleri içeren durumların limitini belirlerken yaşadıkları olası yanılgılara dayandırılmıştır.

Kuramsal çerçeve

Bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının öğrencilerin sahip olabileceği olası hata ve yanılgılarını belirleme ve başa çıkma yolları öğrenci düşüncesi bilgisi üzerine temellendirilmiştir. Öğrenci düşüncesi bilgisi öğrencilerin belirli bir kavram hakkında ne bildikleri, kavramı nasıl düşündükleri ve nasıl öğrendiklerine ilişkin bilgi ile alan bilgisinin bütünleştirilmesi olarak ifade edilen *alan ve öğrenci bilgisinin* bir bileşeni olarak ele alınmaktadır (Hill, Ball ve Schilling 2008). Öğrenci düşüncesi bilgisi, matematiği öğretme süreçlerine öğrencilerin matematiksel fikirlerini dayanak alıp onları geliştirme, matematiği öğrenmeye ve düşünmeye teşvik etme, farklı çözüm stratejilerine odaklanma ve öğrencilerin güçlük, hata ve yanılgılarını dikkate alma gibi eylemler olarak yansımaktadır (An, Kulm ve Wu, 2004; Brendefur, Thiede, Strother, Bunning ve Peck, 2013; Özaltun, 2014).

Öğrenci düşüncesi bilgisi öğrencilerin matematikteki temel fikirleri öğrenmelerini sağlamak için uygun öğretmen eylemlerini içeren matematik öğretme bilgisi ile doğrudan ilişkilidir (Anthony, Hunter ve Hunter, 2015; Hill, Ball ve Schilling, 2008). Matematik derslerini etkili bir şekilde planlama ve öğretme sürecini öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini sağlayacak şekilde yürütebilmede öğretmenlerin öğrenci düşüncesi bilgisine sahip olmaları önemlidir (Stockero, Rupnow ve Pascoe, 2017). Bu bilgiye sahip olan öğretmenlerin öğrencilerin düşünce ve fikirlerini açığa çıkarabilecekleri, matematiksel düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirebilecekleri, öğrencileri farklı gösterim şekillerini birbirleriyle ilişkilendirmeye teşvik edecekleri (Wicks ve Janes, 2006) söylenebilir. Bunlara ek olarak, öğrencilerinin hatalarını, kavram yanılgılarını, öğrenme sürecindeki olası potansiyellerini ve kavramla ilgili fikirlerini anlayacakları (Empson ve Junk, 2004), öğrencilerinin ihtiyaçlarını dikkate alarak onların matematiksel anlamalarını geliştirmek için fırsatlar yaratabilecekleri (Asquith, Stephens, Knuth ve Alibali, 2007) ifade edilebilir.

Sınıf etkileşimlerinin büyük bir kısmının genellikle öğretmenin bir soru sorması, öğrencinin bu soruya yanıt vermesi ve öğretmenin de bu yanıtı doğru ya da yanlış şeklinde değerlendirmesini içerdiği (Michaels ve O'Connor, 2015) göz önüne alındığında, matematik öğretmenlerinin öğretim süreçlerini öğrencilerinin düşüncelerini dikkate alarak gerçekleştirmeleri büyük önem taşımaktadır. Bir başka deyişle, öğretmenlerin bilgiyi doğrudan transfer etmeleri yerine öğrencilerin düşüncelerini yansıtabildikleri, açıklamalar ve gerekçelendirmeler yaparak hatalarından öğrenebildikleri ve birbirlerinin fikirleri ile ilgilenerek kendi düşüncelerini geliştirebilecekleri fırsatlar yaratmaları beklenmektedir (Son ve Sinclair, 2010). Öğrenmeyi destekleyecek fırsatları yaratabilmek, öğrencilerin düşüncelerini sadece doğru ya da yanlış olarak değerlendirmenin ötesinde bu düşüncelerin altında yatan fikirleri ortaya çıkarmakla sağlanabilir (Levin, 2008). Bunun yanı sıra öğrencilerin sadece uygun matematiksel fikirlerini değil hata ve yanılgılarının da öğretmenler tarafından öğrenme süreçleri için değerli görülerek ele alınması önemlidir. Amerika Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM, 2000) de matematiksel hataların çıkmaz sokak olarak değil potansiyel öğrenme yolları olarak görülmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Öğrenci hata ve yanılgıları onların düşünceleri ile ilgili öğretmenlere fikir vermekte ve bu sayede öğrenci anlamalarını geliştirmede yol gösterici olmaktadır (Ball, 1991). Öğretmenler öğrenci düşüncesi bilgileri doğrultusunda öğrenci hata ve yanılgılarını göz önüne almaktadırlar. Bunları belirlemek için sorular sorabilir veya tahminlerde bulunabilirken, var olan öğrenci hata ve yanılgılarını gidermek için ise farklı gösterimlerden yararlanabilirler ve kavramlara, kurallara ve işlemlere odaklanabilirler (Özaltun, 2014). Bu çalışma kapsamında bu eylemlerden öğrencilerin olası hata ve yanılgılarını bilme veya tahmin etme, bunları önleme ve giderme eylemlerine odaklanılmıştır.

Yöntem

Lise matematik öğretmeni adaylarının, limit konusuna ilişkin öğrencilerin sahip olabilecekleri olası hata ve yanılgılarını belirleme ve başa çıkma yollarını incelemek amacıyla nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması deseninden yararlanılmıştır. Durum çalışmaları, özellikle değerlendirme süreçleri gibi birçok alanda kullanılan, araştırmacının bir durumu, programı, olayı, eylemi, süreci ya da bir veya daha fazla bireyi derinlemesine analiz ettiği bir araştırma desenidir (Creswell, 2003). Durum çalışması deseni, mevcut durumu ortaya çıkarırken analiz birimlerini detaylı incelemeye olanak sağladığı için çalışmanın amacına hizmet etmektedir. İç içe geçmiş tek durum desenine dayalı yürütülen bu çalışmadaki durum, öğretmen adaylarının hata ve yanılgılarını belirleme ve başa çıkma yollarını inceleme yaklaşımlarıdır. Bu durumu detaylı olarak sunmak için odaklanılan ve incelenen analiz birimleri ise çalışmaya katılan her bir öğretmen adayının yaklaşımıdır.

Katılımcılar

Çalışma bir devlet üniversitesinde eğitim-öğretim yılının bahar döneminde son sınıfta öğrenim görmekte olan 40 lise matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Katılımcı öğretmen adayları eğitimleri kapsamındaki alan ve alan öğretimi derslerini tamamlamışlardır. Çalışma öncesinde öğretmen adaylarına araştırmanın kapsamı hakkında bilgi verilmiş ve kendilerine verilen iki senaryoyu ayrıntılı olarak yanıtlamalarının önemli olduğu vurgulanmıştır. Çalışmada katılımcı öğretmen adaylarının isimleri gizli tutulmuş ve ÖA_1, ÖA_2, …, Ö_{40} kodlaması ile bulgular sunulmuştur.

Veri toplama aracı

Bu çalışmanın veri toplama aracı limit öğretimine ilişkin iki senaryoyu içeren formdur. Söz konusu senaryolar öğretmen adaylarının sınıf ortamında karşılaşabilecekleri olası durumlar karşısındaki yaklaşımlarını belirlemek amacıyla yazarlar tarafından tasarlanmıştır. Her iki senaryoda da öğretmen adaylarından limit öğretimini gerçekleştiren bir lise matematik öğretmeni olduklarını varsaymaları istenmiştir. Sınıflarındaki öğrencilere $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ve $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ değerlerinin neye eşit olduğunu sordukları ve tahtaya kalkan öğrencilerin $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ cevaplarını verdikleri ancak sınıftaki başka bir öğrencinin bu yanıtı anlamadığı senaryolarda belirtilmiştir. Öğretmen adaylarından böyle iki durumla karşılaşmaları halinde öğrencilerine nasıl bir açıklama yapacaklarını ve onları ikna etme yaklaşımlarının neler olacağını ayrıntılı bir şekilde yazmaları istenmiştir (bkz. Şekil 1).

Senaryo 1:
Lise 4 düzeyinde öğretmenlik yaptığınızı düşünün. Limit kavramını oluşturmaya yönelik çalışmalar yapıyorsunuz. Öğrencilerinize $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ değerinin neye eşit olacağını soruyorsunuz. Bir öğrenciniz bu limit değerinin $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ olduğunu söylüyor. Başka bir öğrenciniz ise bu yanıtı anlamadığını ifade ediyor.
Bu durumda sizin öğrencilerinize açıklama yapmada veya onları ikna etmedeki yaklaşımlarınız neler olur. Ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.

Senaryo 2:
Lise 4 düzeyinde öğretmenlik yaptığınızı düşünün. Limit kavramını oluşturmaya yönelik çalışmalar yapıyorsunuz. Öğrencilerinize $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ değerinin neye eşit olacağını soruyorsunuz. Bir öğrenciniz bu limit değerinin $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ olduğunu söylüyor. Başka bir öğrenciniz ise bu yanıtı anlamadığını ifade ediyor.
Bu durumda sizin öğrencilerinize açıklama yapmada veya onları ikna etmedeki yaklaşımlarınız neler olur. Ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.

Şekil 1. Limit öğretiminde karşılaşılabilecek iki senaryo

Çalışma kapsamında öğretmen adaylarının olası öğrenci hata ve yanılgıları ile başa çıkma yollarını belirlerken limit kavramından yararlanılmıştır. Bu amaçla limit kavramı bir örnek olarak ele alınmış ve bu sebeple kavram ile ilgili tüm yanılgılara yer verilmemiştir. Senaryolar oluşturulurken yaygın olarak sahip olunan limiti aranan noktayı fonksiyonda yerine koyma ve sonsuz limite ilişkin yanılgılar ele alınmıştır. Bu senaryolara öğretmen adaylarının verecekleri yanıtların onların herhangi bir kavram ile ilgili öğrenci hata ve yanılgılarında ne gibi eylemlerde bulunacaklarına dair mevcut durumu ortaya koyacağı varsayılmıştır. Öğretmen adaylarından bir sınıf ortamında bu senaryoları bireysel olarak yanıtlamaları istenmiş ve hangi senaryodan yanıtlamaya başlayacakları konusunda herhangi bir yönlendirme yapılmamıştır. Ayrıca katılımcılara ihtiyaçları doğrultusunda senaryoları yanıtlama süresi verilmiştir. Öğretmen adaylarının yazılı yanıtları çalışmanın verilerini oluşturmuştur.

Verilerin analizi

Öğretmen adaylarının senaryolara verdikleri yanıtlar öğrencilerin hata ve yanılgılarının nedenlerini belirleme ve bunları giderme yaklaşımları kategorileri altında incelenmiştir. Bu incelemeler iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Birinci aşamada ilk iki yazar tüm verileri bireysel olarak içerik analizine tabi tutmuştur. Tüm verilerin analizinin tamamlanmasının ardından üç yazar bir araya gelerek ortaya çıkan yaklaşımlar üzerine tartışmışlar ve fikir ayrılıklarını gidermişlerdir. İkinci aşamada ise ilk iki yazar tekrar bir araya gelerek tüm verileri analiz sürecinin birinci aşamasında ortaya çıkan yaklaşımlar doğrultusunda yeniden analiz etmişlerdir. Verilerin analizinden elde edilen bulgular tablolarla temsil edilmiştir. Tablolarda katılımcılar tarafından kullanılan yaklaşımlara yer verilirken her bir öğretmen adayı için atanan 1-40 arası numaralar kullanılmıştır. Tablo 1'de öğretmen adaylarının öğrenci hata ve yanılgılarının nedenini belirleme yaklaşımları her iki senaryo için ayrı ayrı ele alınırken, Tablo 2'de bunları gidermede kullandıkları gösterim şekillerine ilişkin yaklaşımları doğru ve yanlış olarak Senaryo 1 ve Senaryo 2 için ayrı ayrı incelenmiştir. Öğretmen adaylarının yazılı yanıt kağıtlarından alınan kesitler ile bulgular desteklenmiştir.

Bulgular

Lise matematik öğretmeni adaylarının öğrenci hata ve yanılgıları ile başa çıkma yaklaşımları, nedenlerini belirleme ve bunları giderecek yaklaşımlarda bulunma olarak iki kategoride sunulmaktadır. Öğretmen adayları çoğunlukla öğrencilerin hata ve yanılgılarının nedenlerini belirlemeden bunları gidermeye yönelik yaklaşımlarda bulunmuşlardır. Hata ve yanılgıların nedenlerini belirlemeye çalışan öğretmen adaylarının yaklaşımlarının ise sınırlı olduğu ortaya çıkarılmıştır (bkz. Tablo 1).

Tablo 1.
Öğretmen adaylarının öğrenci hata ve yanılgılarının nedenlerini belirleme yaklaşımları

	Senaryo 1	%	Senaryo 2	%
Tahmin etme	2-26	5	26	3
Sorgulama	2-22-40	8	1	3

Tablo 1 incelendiğinde, sadece beş öğretmen adayı öğrenci hata ve yanılgılarının altında yatan sebepleri belirlemeye çalışmıştır. Her iki senaryo için de öğretmen adayları tahmin etme veya sorgulama yaklaşımında bulunmuşlardır. Öğretmen adaylarından sadece biri ($ÖA_{26}$) her iki senaryo için de öğrenci yanılgısının nedeni belirlemeye yönelik açıklamalar yapmış ve bu açıklamalarını kendi tahminlerine dayandırmıştır. Bununla birlikte, $ÖA_2$ birinci senaryo için, öğrencilerin yanılgılarının nedeni ile ilgili hem tahminlerde bulunmuş hem de bu nedenleri ortaya çıkaracak sorgulamalar yapacağını ifade etmiştir.

Senaryo 1 için tahmin etme ve sorgulama yaklaşımlarında bulunan $ÖA_2$'nin öğrenci hata ve yanılgılarını belirlerken kullandığı ifadeler aşağıdaki gibidir:

A öğrencisi, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ olduğunu söylesin.
B öğrencisi ise yanıtı anlamadığını ifade etsin.
Sorumuz, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$
Doğru cevabımız $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ve $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, yani limit yoktur.
Bu soruya yanlış cevap veren öğrenci sağdan ve soldan yaklaşım hakkında biraz
bilgiye sahiptir, ancak bu alt kavramları tam olarak anlamamıştır.
Bu soruya verilen yanıttan bir şey anlamayan B öğrencisi ise A öğrencisinden daha
az bilgiye sahip olabilir veya sağdan ve soldan yaklaşımı bilmemektedir.
A öğrencisini tahtaya kaldırıp çözdürürüm.
Böyle bir durumda öncelikle birlikte inceleriz ve sorgularız
Hatalarını tüm sınıfla

$ÖA_2$ hem yanıt veren öğrencisinin hem de bu yanıtı anlamayan öğrencisinin yaşamış olabilecekleri hata ve yanılgısına ilişkin tahminde bulunmuştur. Öğretmen adayı $x \to 0$ için $f(x) = \frac{1}{x}$'in limitine yönelik öğrencisinin yanlış yanıt vermesinin küçük ve büyük değerlerden yaklaşma fikrine ilişkin eksik bilgilerinden kaynaklı olduğunu varsaymıştır. Söz konusu çözümü anlamayan öğrencinin de bu limit ile ilişkili güçlük yaşadığını düşünmüş ve bu güçlüğün nedenini benzer şekilde limite ilişkin eksik bilgilerinin olması ya da küçük ve büyük değerlerden yaklaşmayı bilmemesi olarak yorumlamıştır. Bu öğrenci, $x \to 0$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun belli bir değere yaklaşmaması sebebiyle limitinin olmadığını bildiği için arkadaşının verdiği yanlış yanıtı anlamamış olabilir. Dolayısı ile senaryodaki öğrenci limiti sadece bir süreç olarak görmüyor olarak yorumlandığında öğretmen adayının bu hususa değinmediği görülmüştür. Ancak öğretmen adayı bu durumu değerlendirmeyip bu öğrencinin de güçlüklerinin olduğunu varsaymıştır. Bunun yanı sıra $ÖA_2$ mevcut hata ve yanılgının nedenini tam olarak anlayabilmek için özellikle yanlış yanıt veren öğrencisini tahtaya kaldırıp soruyu çözdüreceğini ve hatalarını tüm sınıf ile inceleyeceklerini ve sorgulayacaklarını belirtmiştir. Tahmin etmenin yanı sıra sorgulama yaklaşımını kullanması da öğretmen adayının kendi düşüncelerinden farklı öğrenci düşüncelerinin olabileceğini göz önüne aldığının kanıtı olarak yorumlanabilir.

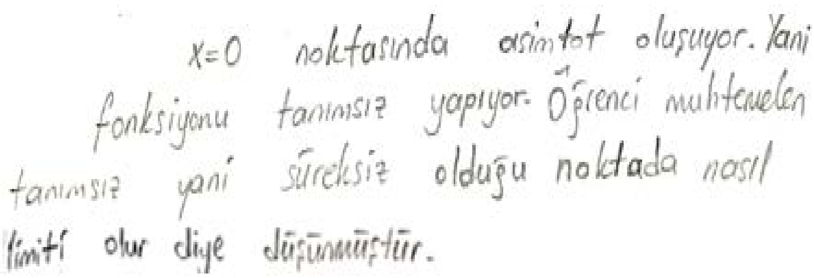
Senaryo 1 için öğrenci hata ve yanılgısının nedenini belirlerken sorgulama yaklaşımını kullanan $ÖA_{22}$'nin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ olduğunu belirtiyor, öncelikle, öğrencilerin ön öğrenmelerini
test etmek için limit neydi diye bir soru yöneltirim, limitin bir yaklaşım
olduğunu hatırlamalarını sağlarım.

$ÖA_{22}$ öğrencinin $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ eşitliğini yazarken ne düşündüğünü anlamak için öncelikle limitin anlamını sorarak öğrencilerinin limitle ilgili ön öğrenmelerini belirleyeceğini ifade etmiştir. Öğrencilerin bu hata veya yanılgılarının sebebinin fonksiyonun bir noktadaki limitine yükledikleri anlamla ilişkili olduğunu düşünerek, onların sahip oldukları limit anlamını sorgulamayı amaçlamıştır. Bu sorgulama

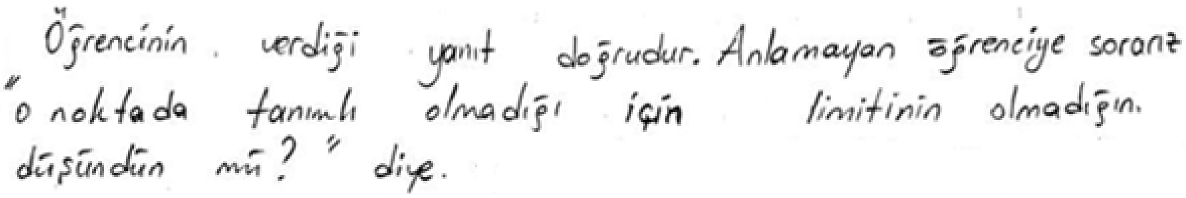
$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki limitinin fonksiyonun bu noktadaki değeri yerine $x \to 0$ için $f(x)$ fonksiyonun yaklaştığı değer olarak düşünüp düşünmediklerini ortaya çıkarmada etkili olabilir. Öğrencilerin bu düşünceleri ortaya çıkarılarak $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ notasyonu bağlamında limit kavramına ilişkin bakışları procept açısından da değerlendirebilir. Öğretmen adayının bu ifadeleri öğrencilerin hata ve yanılgılarını gidermeye yönelik yaklaşımlarıyla da tutarlıdır. Kullandığı grafik ve tablo gösterimleri ile öğrencilerinin limitin yaklaşım olduğunu anlamlandırmalarını sağlayarak bu güçlüğü gidermeye çalışmıştır. Sorular sorarak öğrencilerinin ön öğrenmelerini belirlemeyi amaçlaması öğretmen adayının süreç içerisindeki yaklaşımlarını öğrencilerin düşüncelerine göre şekillendireceği şeklinde yorumlanabilir.

Bunların yanı sıra Senaryo 1'de hatalı öğrenci ifadesinin altında yatan neden ile ilgili herhangi bir söylemde bulunmayan ya da bu hatanın nedenini belirlemeye yönelik yaklaşımı olmayan ÖA_{26} arkadaşının $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ yanıtını anlamayan öğrencinin düşüncesine yönelik aşağıdaki tahminde bulunmuştur:


x=0 noktasında asimtot oluşuyor. Yani fonksiyonu tanımsız yapıyor. Öğrenci muhtemelen tanımsız yani süreksiz olduğu noktada nasıl limiti olur diye düşünmüştür.

ÖA_{26} öğrencinin limiti tanımsızlık ve süreksizlik ile ilişkilendirerek arkadaşının belirtmiş olduğu $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ eşitliğini anlamadığını varsaymıştır. Varsayımına bakıldığında ÖA_{26}, öğrencisinin bir noktada fonksiyonun limitini fonksiyonun o noktada tanımlı/sürekli olması ile ilişkilendirdiğini düşünmektedir. Ancak öğretmen adayı, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ eşitliğinin yanlış olduğuna yönelik bir fikre sahip olmadan öğrencinin doğru ifadeyi bildiğini varsayarak bir açıklama yapmıştır.

ÖA_{26} Senaryo 2 için arkadaşının yanıtını anlamakta güçlük yaşayan öğrencinin düşüncesini ortaya çıkarmaya yönelik aşağıdaki gibi bir yaklaşımda bulunacağını ifade etmiştir:


Öğrencinin verdiği yanıt doğrudur. Anlamayan öğrenciye sorarız "o noktada tanımlı olmadığı için limitinin olmadığını düşündün mü?" diye.

ÖA_{26} öğrencinin $x \to 0$ için $f(x) = \frac{1}{x^2} \to \infty$ olduğunu anlamamasının nedeninin fonksiyonun $x = 0$ noktasında tanımsız olduğunu düşünmesine dayandığına yönelik tahminde bulunmuştur. Öğretmen adayının bu tahminine bakarak anlamayan öğrencisinin senaryoda yer alan limit durumunu süreç olarak ele aldığını düşündüğü ifade edilebilir. Her ne kadar bunu öğrenciye soracağını dile getirse de öğretmen adayının ifadesinden yola çıkarak bu sorunun sadece kendi tahminine odaklı olduğu ve öğrencinin bu yanıtı anlamamasının nedenini sorgulama amacı taşımadığı söylenebilir.

Öğretmen adayları senaryolardaki öğrenci hata ve yanılgılarıyla karşılaştıklarında bunları gidermek için farklı gösterimleri içeren yaklaşımlarda bulunmuşlardır. Katılımcıların kullandıkları gösterim şekillerine ilişkin bulgular doğru ya da yanlış kullanımlarını gösterecek şekilde Tablo 2'de sunulmuştur.

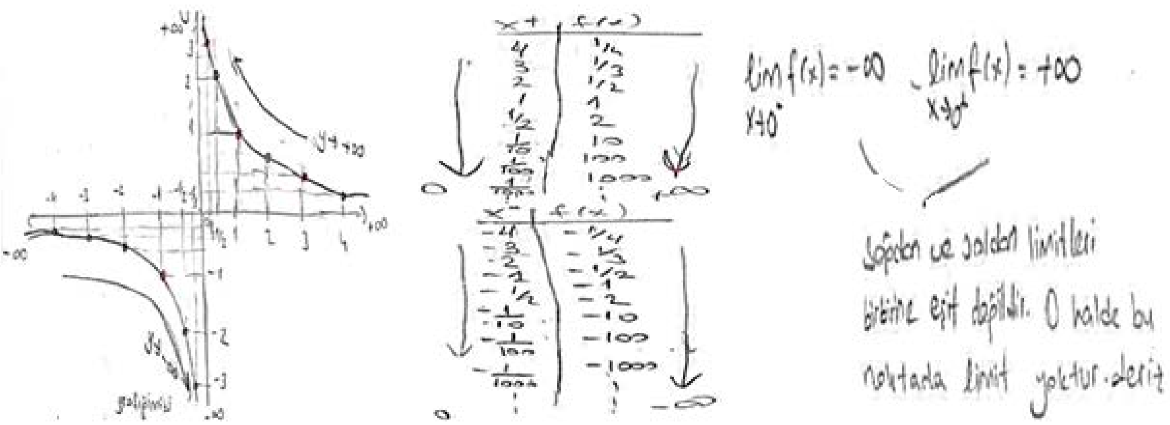
Tablo 2.
Öğretmen adaylarının öğrenci hata ve yanılgılarını gidermede kullandıkları gösterim şekilleri

		Senaryo 1	%	Senaryo 2	%
Grafiksel gösterim	Doğru	1-2-3-4-5-6-8-9-10-12-16-17-18-19-20-21-22-23-24-26-28-29-30-32-33-34-35-36-37-38-39-40	80	1-2-3-4-5-6-8-9-10-12-17-18-19-20-21-22-24-26-27-28-29-30-32-33-34-35-36-38-39-40	75
	Yanlış	7-11-15	8	7-11-15-23-37	13
Tablo gösterimi	Doğru	2-3-4-7-8-13-17-18-19-21-22-24-29-30-31-32-33-35-37-38-40	53	2-3-4-5-6-8-9-13-17-18-19-21-22-24-27-28-29-30-31-32-33-36-37-38-39	63
	Yanlış	16-23-25-27	10	7-11-15-23-25	13
Cebirsel gösterim	Doğru	2-6-8-9-12-17-18-19-21-24-26-28-29-30-31-33-34-35-36-37-38-39-40	58	1-3-5-6-8-9-10-14-17-18-21-26-28-29-30-31-33-34-35-36-38-39-40	58
	Yanlış	7-10-23	8	7-10	5
Gerçek yaşam örneği	Doğru	22	3	-	0
	Yanlış	1-11-27	8	1-7-22-38	10

Öğretmen adayları öğrenci hata ve yanılgılarını gidermeye yönelik grafiksel gösterim, cebirsel gösterim, tablo ile gösterim ve gerçek yaşam örneği olmak üzere dört farklı gösterim şeklinden yararlanmışlardır. Kimi öğretmen adayları birden fazla gösterim şekli kullanarak bu durumun üstesinden gelmeye çalışmışlardır. Gösterim şekillerini doğru kullanan öğretmen adaylarının yanı sıra yanlış olarak kullanan öğretmen adayları da olmuştur. Bunun yanı sıra bir öğretmen adayı bir gösterim şeklini güçlüğü gidermede doğru bir şekilde kullanırken bir diğer gösterim şeklini yanlış kullanarak tutarsız yaklaşımlar sergilemiştir. Dolayısıyla bazı öğretmen adaylarının kendilerinin de söz konusu yanılgıya sahip oldukları belirlenmiştir.

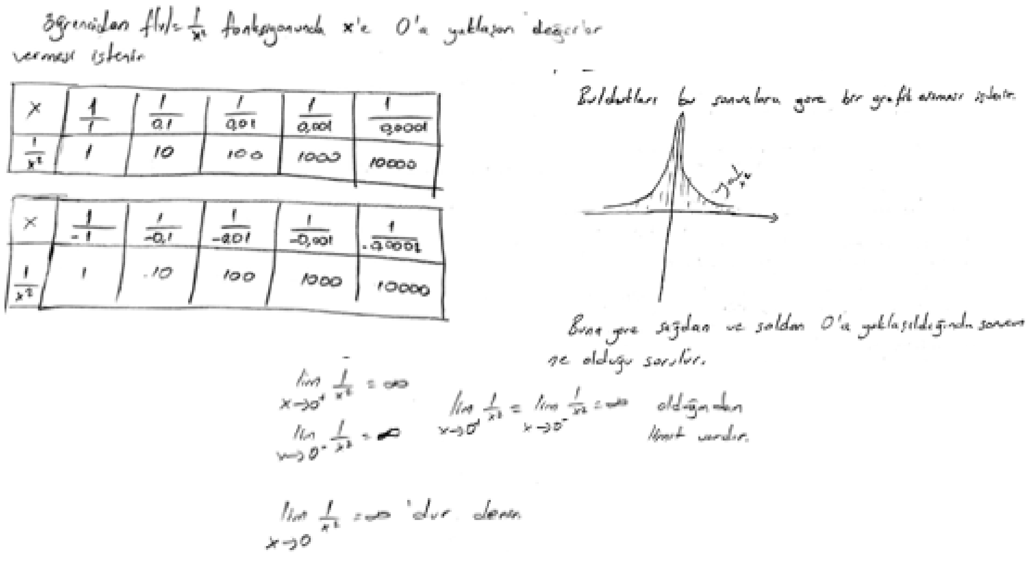
Tablo 2'de görülebileceği gibi, öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu (%88) her iki senaryo için de grafiksel gösterimi kullanmayı tercih etmiştir. Bu öğretmen adaylarından üçü ilk senaryo, beşi de ikinci senaryo için grafiksel gösterimi yanlış kullanmıştır. Ayrıca ilk senaryoda doğru bir grafiksel gösterim kullanan iki öğretmen adayının ($ÖA_{23}$ ve $ÖA_{37}$) ikinci senaryoda yanlış olarak kullandığı görülmüştür. Grafiksel gösterimin yanı sıra tablo gösterimi ve cebirsel gösterimin de sıklıkla kullanılmasının yanı sıra gerçek yaşam örneğinden altı öğretmen adayının yararlandığı belirlenmiştir. Ancak gerçek yaşam örneğinin sadece bir öğretmen adayı ($ÖA_{22}$) tarafından doğru kullanıldığı ortaya çıkarılmıştır.

Öğrenci hata ve yanılgılarını gidermeye hizmet eden uygun gösterim şekillerinin öğretmen adayları tarafından benzer şekilde kullanıldığı görülmüştür. Bu sebeple uygun gösterim şekillerini içeren bir kanıtın öğretmen adaylarının yaklaşımlarını açıklamada yeterli olacağı düşünülmüştür. Bu öğretmen adaylarından biri olan $ÖA_{40}$'ın kağıdından alınan kesitle gösterim şekillerinin doğru bir şekilde nasıl kullanıldığı örneklendirilmiştir. Senaryo 1'de yer alan $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ eşitliğini anlamayan öğrencisine yardımcı olmak için $ÖA_{40}$ üç farklı gösterim şeklinden aşağıdaki gibi yararlanmıştır:



ÖA40 öncelikle $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çizmiş, ardından $x \to 0$ için fonksiyonun aldığı değerleri tablo ile göstermiştir. Öğretmen adayının bu iki gösterimi incelendiğinde, x=0 noktasına büyük ve küçük değerlerden yaklaşılması durumunda fonksiyonun farklı değerlere yaklaştığını vurguladığı görülmüştür. Bu gösterimlere dayalı olarak da cebirsel olarak $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ve $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ olduğu sonucunu yazmış ve limitin olmadığını ifade etmiştir.

Senaryo 2'de yer alan $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ limitinin değerine ilişkin açıklamalar yaparken tablo, grafik ve cebirsel gösterimi doğru bir şekilde bir arada kullanan öğretmen adaylarından biri olan ÖA17 öncelikle tablo gösteriminden ardından da grafiksel ve cebirsel gösterimden aşağıdaki kesitte görüldüğü gibi yararlanmıştır.



ÖA17 öğrencilerinden $x \to 0$ değerleri için f fonksiyonun alacağı değerleri bir tablo ile göstermelerini isteyeceğini belirtmiştir. Öğrencilerin buldukları x ve y değerlerini kullanarak fonksiyonun grafiğini çizmelerini beklemiştir. Fonksiyonun grafiğini çizdikten sonra öğrencilerine 0'a küçülen ve büyüyen değerlerle yaklaşıldığında sonucun ne olacağını soracağını ifade eden katılımcı, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$ ve $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$ olduğunu vurgulayarak $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}$ değerinin ∞ olduğunu belirtmiştir.

Grafiksel gösterimi kullanan beş öğretmen adayı öğrenci hata ve yanılgılarını giderirken farklı matematiksel yazılımlardan yararlanacaklarını belirtmişlerdir. Bu öğretmen adaylarından $ÖA_{29}$, $ÖA_{30}$, $ÖA_{36}$ ve $ÖA_{38}$'in ifadeleri aşağıdaki gibidir:

> "*Değerleri daha da küçültüp f(x) değerini göstermek için MatLab, Derive'da bir gösteri hazırlanıp öğrenci ikna edilir*." ($ÖA_{29}$)
>
> "*Öncelikle f(x)=1/x in grafiğini Derive gibi bir programla tahtaya yansıtırım. Bu programla grafik üzerinde bir nokta aldığımızda sol altta bu noktanın koordinatları görülür. (..., ...) şeklinde. Noktayı grafik üzerinde hareket ettirebiliyoruz ve hareket ettirdikçe noktanın koordinatları da doğal olarak değişir. Grafik üzerinde x'leri her iki taraftan 0'a yaklaştırdığımızda değişen f(x) değerleri incelettirilir ve sonuca varmaları istenir*." ($ÖA_{30}$)
>
> "*Bu değerin neye olacağını görmek lise düzeyindeki öğrenciler için ilk adımda zordur. Bu yüzden ifadeyi somutlaştırmak gerekir. Bunu ya kendimiz tahtaya ya da bilgisayar kullanıyorsak derive, sketch gibi bir programda çizip, yansıtmak öğrenciler için daha anlaşılır olacaktır*." ($ÖA_{36}$)
>
> "*Verileri (tablo ile vermiş olduğu değerlerden bahsediyor) bilgisayar üzerinde matematik programı yardımıyla grafikte ifade edip gösterme (sketchpad gibi)*." ($ÖA_{38}$)

Bu katılımcılar grafiklerini MatLab, Derive, Sketchpad gibi matematiksel yazılımlardan yararlanarak çizebileceklerini ve bu şekilde öğrencilerini ikna etme yoluna gideceklerini ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının açıklamaları doğrultusunda, çok küçük x değerleri için fonksiyonun değerinin incelenebilirliğini sağlamak, yazılımların dinamikliğinden yararlanarak fonksiyonun değişimini takip edebilirliğini desteklemek ya da limiti somutlaştırmak amacıyla bu yazılımları kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür.

Bazı öğretmen adaylarının kullandıkları gösterim şekillerini birbirleri ile ilişkilendirmedikleri dolayısıyla da aynı limit değerini bulurken doğru ve yanlış kullanımlarının olduğu çalışmanın bulguları arasındadır. Örneğin Senaryo 1 için $ÖA_7$'nin tablo, grafiksel ve cebirsel gösterime ilişkin kullanımları aşağıdaki gibidir:

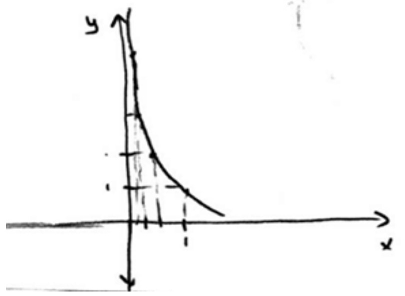
$\lim_{x\to 0} 1/x = \infty$ olduğunu kavrayamayan bir öğrenciden aynı şekilde tahtaya kalkıp grafiği çizmesi istenir. Tablo yaparken öğrenciden, limitin de verildiği üzere 0'a yakın x'ler alması istenir

x	1	1/2	1/3	1/4	1/5	...	1/42
f(x)	1	2	3	4	5	...	42

negatif yaklaşırsa

x	-1	-1/2	-1/3	-1/4	...	-1/56
f(x)	-1	-2	-3	-4	...	-56

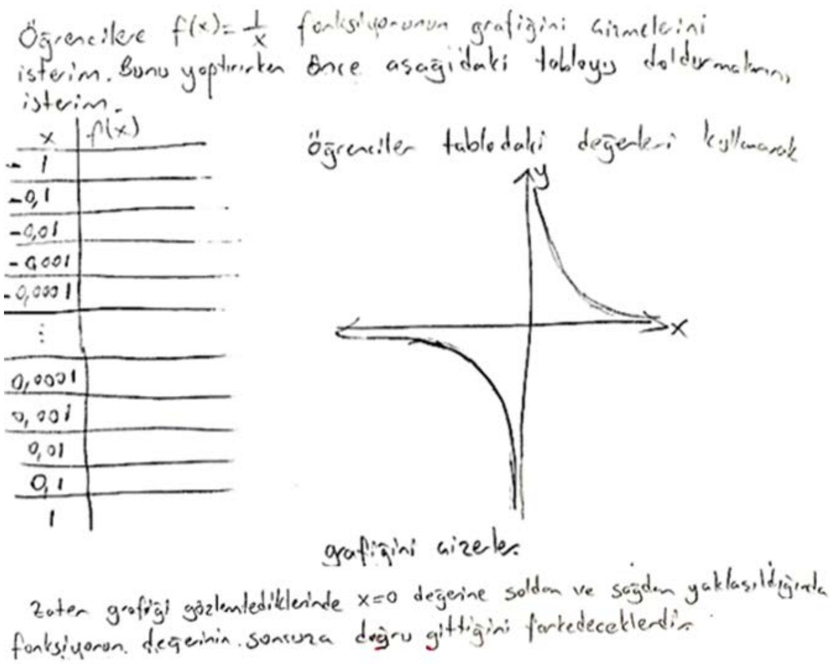
olduğunu görür, grafiği çizdiğinde



grafikten göreceğinden $\lim_{x\to 0} 1/x = \infty$ olduğu kavramına ulaşabilir.

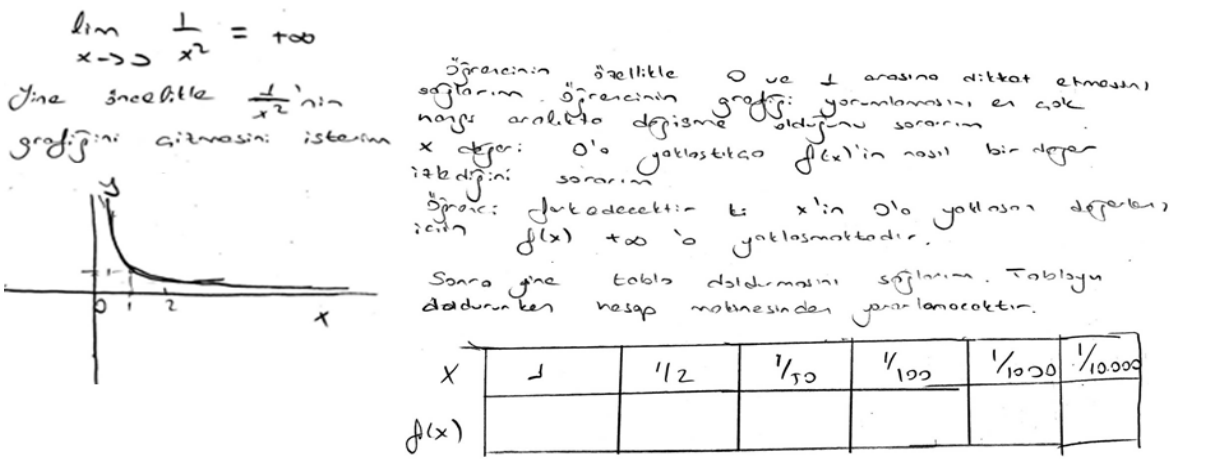
$ÖA_7$ öncelikle Senaryo 1'de konu edinilen öğrencinin hatalı yanıtını doğru kabul ederek bunu diğer öğrencinin anlamasını sağlamayı amaçlamıştır. Bu amaçla anlamayan öğrencinin $x = 0$ noktasına yakın değerler belirleyerek tablo oluşturmasını ve bu tabloya bağlı olarak fonksiyonun grafiğini çizmesini istemiştir. Tablo gösteriminde x'e küçük değerlerle ve büyük değerlerle yaklaşarak f fonksiyonunun alacağı değerleri belirlemiş ancak grafiği sadece pozitif x değerleri için çizmiştir. Grafiği tabloya dayalı çizmesine rağmen negatif değerleri grafiksel gösterimde göz ardı etmesi öğretmen adayının iki farklı gösterim şeklini ilişkilendirmediğini göstermiştir. Limit değerini ifade ederken de grafiksel gösterimi göz önüne bulundurmuş ve öğrencinin güçlüklerini gidermede başarısız olmuştur. Öğretmen adayının $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ değerini bulmada 0 noktasının komşuluğunda $\frac{1}{x}$ fonksiyonun davranışını incelemek yerine limiti aranan noktayı fonksiyonda yerine yazması limite ilişkin bakışının süreç anlamında olduğu ve kavramsal anlayıştan dolayısı ile de procept kavramından uzak olduğu görülmektedir.

ÖA$_{32}$ ise tablo ve grafik üzerinden doğru yaklaşımı sergilemiş olmasına karşın Senaryo 1'de yer alan öğrencinin hatalı düşüncesinin doğru olduğunu aşağıdaki gibi belirtmiştir:



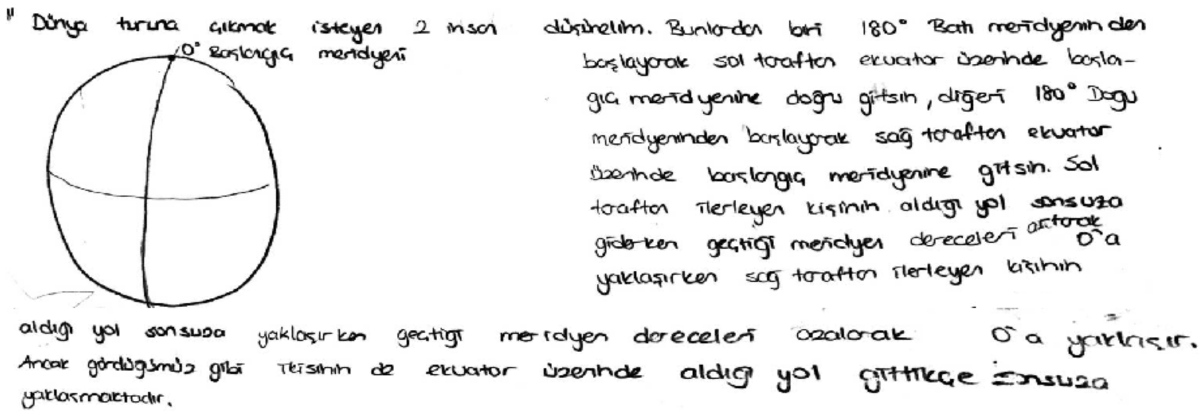
ÖA$_{32}$ de ÖA$_7$'ye benzer şekilde öğrencilerin ilk olarak x'in farklı değerleri için $f(x)$ değerlerini gösteren tablo oluşturmalarını ve bu tabloya dayalı grafikler çizmelerini sağlayarak limit değerini yorumlayabileceklerini ifade etmiştir. Öğretmen adayının her iki gösterimi de $x = 0$ noktasına yaklaşmayı içermesine karşın bu gösterimleri yanlış yorumlamış ve fonksiyonun sonsuza yaklaştığını belirtmiştir. Bu ifadelerinden öğretmen adayının $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ eşitliğini doğru olarak kabul ettiği görülmüştür. Uygun şekilde kullandığı gösterim şekilleri ile ÖA$_7$ $x = 0$ noktasında limitin olmadığını anlamaları için öğrencilerini destekleyecek gibi görünürken, limitin sonsuz olduğuna yönelik ifadesi aslında kendisinin de bu noktada eksikliklerinin olduğunu ortaya çıkarmıştır. Dolayısıyla öğretmen adayının Senaryo 1'de yer alan öğrenci yanılgısını gidermede yetersiz olduğu söylenebilir.

Öğretmen adaylarının bazıları öğrenci hata ve yanılgısını gidermek için kullandıkları tüm gösterim şekillerinde hatalar yapmışlardır. Örneğin, ÖA$_{23}$ Senaryo 2 için grafiksel ve tablo gösteriminden aşağıdaki gibi yararlanmıştır:

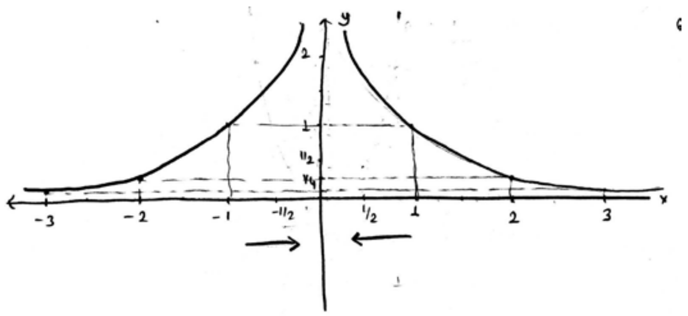


ÖA$_{23}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ eşitliğini anlamakta güçlük çeken öğrencinin öncelikle $f(x)=\frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çizmesini ve ardından x'in 1'den 0'a doğru yaklaşması durumunda f(x)'in alacağı değerleri tablo olarak incelemesini isteyeceğini dile getirmiştir. Kullandığı iki gösterim şeklinde de öğretmen adayı sadece $x=0$'a küçülen değerlerle yaklaşımı göz önüne almıştır. Bu fonksiyonun limiti için sadece küçülen değerlerin dikkate alınması sonucu değiştirmese de öğrencinin bir fonksiyonun limitini incelerken ilgili noktaya sadece tek yönden yaklaşmanın yeterli olduğu fikrini geliştirmesine neden olacaktır. Dolayısıyla ÖA$_{23}$ öğrenciyi ikna ettiğini düşünse de limiti aranan noktaya küçük ve büyük değerlerle yaklaşmayı içermeyen bu gösterimleriyle öğrencilerin limite ilişkin yanlış anlayışlar oluşturmalarına neden olacaktır. Bu yaklaşımı kendisinin limite ilişkin bilgisinde eksiklerinin göstergesi olarak yorumlanabilir ve öğrencilerin güçlüklerini gidermeye çalışırken kavramları işlemsel olarak ele aldığına da işaret edebilir.

Öğretmen adaylarından bazıları öğrencilerin sahip olabilecekleri olası hata ve yanılgılarını gidermek amacıyla gerçek yaşam örneği vermişlerdir. Örneğin ÖA$_1$ dünya turuna çıkma isteyen 2 kişiyi konu edindiği gerçek yaşam örneğinde limit kavramına ilişkin hatalı bir yaklaşım sergilemiştir. Çizdiği dünya şekli üzerinden $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ olduğunu aşağıdaki ifadelerle anlatmaya çalışmıştır:



ÖA$_1$ vermiş olduğu gerçek yaşam örneğinde ekvator üzerinde ilerleyen kişilerin aldıkları yolun gittikçe sonsuza yaklaştığını ifade etmiştir. Oysaki ekvator uzunluğunun sonlu olduğu düşünüldüğünde, öğretmen adayının sonsuz kavramını gerçek yaşam durumuyla ilişkilendirmede problemler yaşadığı söylenebilir. Ayrıca öğretmen adayı bu bağlamda x'i kişinin bulunduğu konum ve $\frac{1}{x^2}$'yi de kişinin ekvator üzerinde aldığı yol olarak düşünmüştür. Gerçek yaşam kapsamında niceliklere yüklediği anlamlar matematiksel olarak $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ eşitliğini açıklamamaktadır. Dolayısıyla ÖA$_1$'in öğrencilerin bu limit değerini anlamalarını destekleyecek bir gerçek yaşam durumu oluşturamadığı görülmüştür. Buna karşın $ÖA_1$ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ olduğunu grafiksel olarak aşağıdaki gibi göstermiştir:



$ÖA_1$ çizmiş olduğu grafik ile $x = 0$ noktasına küçük ve büyük değerlerden yaklaşılması halinde fonksiyonun $+\infty$'a yaklaştığını göstererek $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ eşitliğinin doğruluğunu açıklama yoluna gitmiştir. Ayrıca cebirsel olarak da uygun bir şekilde ifade etmiştir. Tablo 2 incelendiğinde $ÖA_1$'in Senaryo 2'de olduğu gibi Senaryo 1 için de verdiği gerçek yaşam örneğinin hatalı olduğu ancak diğer tüm gösterimlerinin doğru olduğu görülmektedir. Buradan hareketle öğretmen adaylarının farklı gösterimleri kullanarak kavramları uygun şekillerde açıklayabilmelerine rağmen gerçek yaşam örneği ile ilişkilendirmede problemler yaşayabilecekleri söylenebilir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada limit öğretimine ilişkin hazırlanan iki senaryo ile matematik öğretmeni adaylarının öğrenci hata ve yanılgıları ile başa çıkma yolları belirlenmiştir. Bu süreçte ilk olarak söz konusu öğrenci düşüncelerinin altında yatan nedenleri belirlemeye ve sonrasında bunlara etkili yanıtlar vererek hata ve yanılgılarını ortadan kaldırmaya yönelik yaklaşımları olmuştur. Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu olası hata ve yanılgıların nedenini belirlemeye çalışmak yerine kendi varsayımlarına dayalı verdikleri kararlar doğrultusunda öğrenci düşünceleriyle ilgilenmişlerdir. Bu da katılımcıların yeterli düzeyde öğrenci düşüncesi bilgilerinin olmadığının bir göstergesidir. Öğretmen adayları öğrenci düşüncelerinin farklılaşabileceğini ve öğrencilerin farklı nedenlerle bu hata ve yanılgılara sahip olabileceklerini düşünmemelerinden dolayı bunları göz ardı etmiş olabilirler. Öğretmen adaylarının çoğunun hata ve yanılgıların nedenlerini belirlemeye yönelik yaklaşımda bulunmamalarının bir diğer sebebi ise bu hata ve yanılgıları nasıl değerlendireceklerini bilmemeleri olabilir. Öğrenci düşüncelerinin altında yatan nedenlerle ilgilenmediklerinde bunlara yönelik uygun dönütler veremeyeceklerdir. Oysaki bir öğretmenin öğrenci yanıtlarında var olan hataların sebepleriyle ilgilenmesi hem öğrenci yanılgılarının kaynaklarını hem de öğretim için uygun yöntemleri belirlemede kendisine yardımcı olabilmektedir (Tirosh, 2000). Hataların kaynakları üzerine düşünen ve bunları belirleyebilen bir öğretmen hem derslerini planlamada hem de ders esnasında anlık olarak öğrenci düşüncelerine yanıt vermede etkili yaklaşımlarda bulunabilecektir. Dolayısıyla öğrencilerin düşüncelerinin dayanaklarının farklılaşabileceğine ve olası bir hatanın farklı nedenlerle ortaya çıkabileceğine yönelik farkındalıklar kazanmaları için öğretmen eğitiminde çalışmalar yapılması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu çalışmalar kapsamında, gerçek sınıf ortamından kesitler sunularak öğretmen adaylarının bir kavrama ilişkin farklı öğrenci düşüncelerini irdelemelerini ve bunlara yönelik değerlendirmeler yaparak nedenlerini tartışmalarını sağlayan uygulamalara yer verilebilir.

Limit kavramına ilişkin öğrencilerin yaşayabilecekleri hata ve yanılgıların nedenlerini belirlemeye çalışan beş öğretmen adayı ise tahmin etme veya sorgulama yaklaşımlarını sergilemişlerdir. Öğretmen adaylarının senaryolarda yer alan öğrenci hata ve yanılgılarını tahmin etmelerinin dahası sorgulayarak ortaya çıkarmaya çalışmalarının değerli olduğu düşünülmektedir.

Öğretmen adaylarından çok azı soru sorarak öğrenci hata ve yanılgılarının altında yatan nedenleri belirleme eğiliminde olmuşlardır. Öğrencilerin çözüm yollarına ve yorumlarına ilişkin, "ne düşünerek öyle söyledin?", "nereden biliyorsun?", "neden böyle düşünüyorsun?" gibi sorular sormak onların düşüncelerine ilişkin bilgi sahibi olmak için önemlidir (Cengiz, Kline ve Grant, 2011). Benzer şekilde Wick ve Janes (2006) de sorgulama sayesinde öğrencilerin düşüncelerinin ve fikirlerinin açığa çıkarılabileceğini belirtmektedirler. Yapılacak etkili bir sorgulama süreci sayesinde öğretmenler benzer yanılgılara sahip diğer öğrencilerin de düşüncelerini gözden geçirme imkânı bulmaktadırlar. Bu süreçte sorulan soruların etkililiğini öğretmenlerin soru sorma yaklaşımları belirlemektedir. Manouchehri ve Lapp (2003), öğretmenlerin öğrencilerin düşüncelerini değerlendirecek şekilde sorular sormaları gerektiğini vurgulamaktadırlar. Buna karşın, çalışmadaki katılımcı öğretmen adayları öğrencilerin limite ilişkin yaşadıkları güçlüklerin yığılma noktası, komşuluk, informal sezgiler vb. nedenlerden kaynaklanıp kaynaklanmadığını sorgulamamışlardır. Bu soru sorma yaklaşımlarının da öğrencilerin sonsuz limite ilişkin düşüncelerini derinlemesine ve kavramsal bir şekilde ortaya çıkaracak nitelikte olmadığı görülmüştür.

Tahmin etme yaklaşımını sergileyen az sayıdaki öğretmen adayının bu yaklaşımlarının da oldukça sınırlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu öğretmen adaylarının tahminlerini şekillendiren durumlar, limiti öğrenme süreçlerinde kendi yapmış oldukları hatalar ya da sınırlı deneyim süreçlerinde gözlemledikleri öğrenci hataları olabilir. Çünkü öğretmen adayları öğrencilerle öğretmen olarak etkileşim kurana kadar öğrenci olarak deneyimlerine dayalı inançları doğrultusunda eylemlerde bulunurlar (Levin, Hammer ve Coffey, 2009). Öğretim sürecindeki deneyimlerin öğrenci düşüncelerine ilişkin çıkarımlarda etkisi göz önüne alındığında, öğretmen adaylarının gerçek sınıf ortamlarında daha fazla öğretim uygulamaları yapmalarına olanak sağlanmalıdır. Mümkün olmadığı durumlarda da öğrenci yanıtlarını içeren video analizleri, öğrenci yazılı yanıtlarının incelenmesi gibi uygulamalarla limite ilişkin öğrenci düşüncelerini daha etkili tahmin etmeleri yönünde gelişimleri desteklenmelidir.

Öğretmen adayları öğrencilerin hata ve yanılgılarını gidermede limit durumunun grafiksel gösterimi, cebirsel gösterimi, tablo ile gösterimi, gerçek yaşam örneği olmak üzere dört farklı gösteriminden yararlanmışlardır. Öğretmen adaylarının tercih ettikleri gösterim şekilleri ve bu gösterim şekillerine ilişkin açıklamaları bir yandan onların limite ilişkin kavram bilgilerine yönelik fikirler sunarken bir yandan da limitin öğretimine yönelik bilgilerinin yansımasıdır. Bazı katılımcılar bu gösterim şekillerinden sadece birini kullanmayı tercih ederken bazıları da iki veya daha fazla gösterim şeklinden yararlanmıştır. Alan yazında limit kavramı için grafik, cebir, tablo, gerçek yaşam örneği gösterimlerinin yanı sıra reel sayı doğrusu ve şekil gösterimi de kullanılmaktadır (Elia, Gagatsis, Panaoura, Zachariades ve Zoulinaki, 2009; Kula Ünver ve Bukova Güzel, 2019). Ancak çalışmadaki öğretmen adayları reel sayı doğrusu ve şekilsel gösterimden yararlanmamışlardır. Öğretmen adaylarının en çok tercih ettiği gösterim şekli ise grafiksel gösterim olmuştur. Verilen limit durumlarının daha kolay bir şekilde anlaşılabileceği düşüncesiyle öğretmen adayları grafiksel gösterimleri tercih etmiş olabilirler. Alan yazında da fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda limit değeri aranırken grafiklerden yararlanılması gerektiğine vurgu yapılmaktadır (Baştürk ve Dönmez, 2011). Grafiksel gösterimin x'in 0'a yaklaşması durumunda sonsuz sayıda noktayı inceleme imkânı sunması nedeniyle öğrencilerin limitin dinamik süreç anlayışlarını destekleyeceği düşünülmektedir.

Öğretmen adayları özellikle bir noktaya büyük değerlerden ve küçük değerlerden yaklaşımı göstermek için grafiksel gösterimin yanı sıra tablo gösterimini de kullanmışlardır. Bergthold (1999) verilen noktada limit aranırken fonksiyona ilişkin grafik ve tablodan yararlanıp aralarında ilişki kurulmasının limit kavramının anlaşılmasında etkili olduğunu belirtmektedir (akt. Özmantar ve Yeşildere, 2008). Bu doğrultuda katılımcı öğretmen adaylarının bu iki gösterim şeklinden birbirileri ile ilişkili bir şekilde yararlanarak öğrencilerin güçlüklerinin üstesinden gelmeleri önemlidir. Ancak genellikle ilişkilendirmede problemler yaşadıkları ve birbirlerini destekleyici olarak kullanmadıkları görülmüştür. Buna ek olarak, öğretmen adaylarından bazılarının senaryolarda yer alan fonksiyonların grafiklerini ya da tablolarını çizerken hatalar yaptıkları bazılarının ise doğru bir şekilde çizdiği grafiği ya da oluşturduğu tabloyu yanlış yorumladıkları görülmüştür. Duru (2011) da 95 matematik öğretmeni ile yaptığı çalışmada katılımcılarının büyük çoğunluğunun bir fonksiyonun limitini grafik kullanarak yorumlamada güçlük yaşadıklarını ortaya çıkarmıştır. Buna ek olarak cebirsel olarak yorumlamada daha fazla güçlükler yaşadıkları sonucuna da ulaşmıştır. Benzer şekilde bu çalışmada da öğretmen adaylarının çoğu limiti aranan noktada fonksiyonun değerini cebirsel olarak göstermek yerine öncelikle fonksiyonun grafiğini çizerek noktaya büyük ya da küçük değerlerden yaklaşmayı tercih etmişlerdir. Buna karşın doğru ifade etmiş olsalar bile grafik ya da tabloyu yanlış yorumladıkları için cebirsel olarak hatalı sonuçlara ulaşmışlardır. Limit kavramının farklı gösterimlerle nasıl ifade edileceğinin yanında farklı gösterim şekilleri arasında ilişki kurma ve bu gösterim şekillerini doğru bir şekilde yorumlama da oldukça önemlidir. Dreyfus (1990) öğrenme sürecinin (a) tek bir gösterim şeklini kullanma, (b) birden fazla gösterim şeklini kullanma, (c) gösterim şekilleri arasında ilişki kurma ve (d) gösterim şekillerini birbirine entegre etme ve aralarında geçişler yapma olmak üzere dört basamak boyunca gerçekleştiğini ifade etmektedir. Dolayısıyla bir kavramın öğretim sürecinde tek bir gösterim şeklinin kullanılması kavramın oluşturulması için oldukça sığ kalacaktır. Öyle ki matematiksel kavramların oluşturulmasında birden fazla gösterim şeklini etkili ve ilişkili bir şekilde kullanmak doğru bir matematiksel anlayış geliştirmede önemli bir role sahiptir (Duval, 2002; Elia, Panaoura, Eracleous ve Gagatsis, 2007'den akt. Elia vd., 2009). Bu doğrultuda bu çalışmanın bulguları öğretmen adaylarının limite ilişkin kavram bilgilerinin geliştirilmesi gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Oehrtman (2009) da analiz derslerinde öğrencilerin informal kavrayışları, inançları, limite yükledikleri anlamlar gibi birçok kaynağa dayalı olarak güçlükler yaşadıklarını ifade etmiştir. Matematik öğretmeni adaylarının bu güçlüklerinin kaynakları ayrıntılı olarak farklı araştırmalar kapsamında incelenebilir. Buna ek olarak bulgulardan hareketle matematik öğretmeni adaylarının öncelikle limit kavramına ilişkin tüm gösterimleri birbirleriyle ilişkili bir şekilde öğrenmelerinin bunları öğretim süreçlerinde kullanabilmeleri için önemli olduğu söylenebilir.

Katılımcı öğretmen adaylarından bazıları öğrencilerini ikna edebilmek için dinamik matematik yazılımlarından yararlanacaklarını belirtmişlerdir. Bu yazılımları, fonksiyonun limit değerini araştırırken, limiti aranan noktaya küçük ve büyük değerlerden yaklaşımı göstermede etkili olacağı ve böylece öğrenciler için daha somut bir hale geleceği düşüncesiyle kullanacaklarını dile getirmişlerdir. Zengin (2017) limit kavramının ele alınmadan önce komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının GeoGebra yazılımında inşa edilmesinin kavramın daha iyi anlaşılmasını sağlayabileceğini ifade etmiştir. Öğrencilerin limiti ve ilgili kavramları anlayabilmeleri için GeoGebra gibi dinamik matematik yazılımlarından öğrencilerin zihinsel eylemlerini destekleyen ortamlar sunacak şekilde yararlanılması önemlidir. Ancak bu yazılımları kullanacaklarını belirten katılımcı öğretmen adayları yazılımları kullanırken öğrencilerinin değil kendilerinin aktif bir rol oynadığını içeren ifadelere yer vermişlerdir. Bu ise matematiksel kavramların öğrenilmesi için uygun bir yaklaşım olarak düşünülmemektedir.

Çalışmada az sayıda öğretmen adayının ilgili limit durumlarını içeren gerçek yaşam örneklerinden yararlandığı görülmüştür. Limit kavramını gerçek yaşamla ilişkilendirememeleri öğretmen adaylarının limite ilişkin derinlemesine bilgiye sahip olmadıkları şeklinde yorumlanabilir. Çünkü kavramsal bilgiye sahip olan öğretmenler kavramları örnekleyen durumları da daha kolay bir şekilde oluşturabilirler. Dahası öğretmen adaylarının verdikleri gerçek yaşam durumlarına ilişkin örneklerin çoğunun kavramın anlamını içermediği ve öğrencilerde yanılgı oluşturabileceği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının limit öğretme süreçlerini inceleyen Kula Ünver ve Bukova Güzel (2014) de bu süreçlerde kullanılan gerçek yaşam örneklerinin lise öğrencilerinde yanılgılara neden olduğunu belirlemişlerdir. Öğretmen adaylarının öğretim süreçlerinden bağımsız olarak günlük yaşamlarında limite yükledikleri anlamlar gerçek yaşam durumlarıyla limiti ilişkilendirme süreçlerindeki yanılgılar ortaya çıkabilir (Cornu, 1991; Jaffar ve Dindyal, 2011). Bu gibi sebeplerle öğretmenlerin gerçek yaşam örneklerinin öğrencilerde yanılgılara neden olabileceği göz önünde bulundurulduğunda, öğretmen eğitimi programlarında öğretmen adaylarının matematiksel kavramları gerçek yaşam durumları ile uygun bir şekilde ilişkilendirmeleri desteklenmelidir.

Öğretmen adaylarının sergiledikleri yaklaşımlar ışığında, benzer hata ve yanılgılara sahip oldukları belirlenmiştir. Örneğin Senaryo 1'de $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ değeri ele alınmış ve bazı öğretmen adaylarının fonksiyonda x yerine 0 yazdığı belirlenmiştir. Bu durum Thabane (1998) ve Laridon (1992) tarafından fonksiyonun değerini limitin değeri olarak görme yanılgısı şeklinde ifade edilmiştir (akt. Jordaan, 2005). Bu yanılgıda öğrenciler polinom fonksiyon için verilen limiti aranan noktayı fonksiyonda yerine yazma özeliğini genelleyerek hataya düşmektedirler (Kula ve Bukova Güzel, 2014). Dolayısı ile öğretmen adayları limit kavramına ilişkin sahip oldukları yanılgılar ya da alan bilgilerindeki eksiklikler nedeniyle hatayı kendileri fark edememişlerdir. Öğretmen adaylarının bu yanılgılarının altında yatan durum limit kavramına ilişkin anlayışlarının süreç aşamasından kavram aşamasına geçememiş olmasından kaynaklanıyor olabilir. Limit kavramını süreç olarak görmeleri nedeniyle limiti aranan noktayı fonksiyonda yerine yazma yoluna giderek kavramsal boyutunu göz ardı etmişlerdir. Oysaki limiti aranan noktanın komşuluğunda fonksiyonun davranışlarını incelemiş olsalardı söz konusu hatalı durumları fark edebileceklerdi. Bu hatalı yaklaşımlarının temelinde Gray ve Tall'un (1994) ortaya koydukları limit kavramının hem yaklaşma süreci hem de limitin değerinin aynı sembollerle gösterilmesi yatıyor olabilir. Mevcut çalışmada öğretmen adaylarının kendi hata ve yanılgılarının kaynakları ele alınmamıştır. Ancak geleceğin matematik öğretmenlerinin limit kavramına ilişkin sahip oldukları yanılgıları ortaya koymak ve gidermeye yönelik çalışmalar yapmak önemlidir. Bu nedenle procept teorisi bağlamında öncelikle öğretmen adaylarının limit kavramının gösterimine ilişkin anlayışlarını ortaya koymaya yönelik çalışmalar yapılabilir. Öğretmen adaylarının limite ilişkin anlayışlarının belirlenmesinin ardından olası hata ve yanılgılarının belirlenerek alan bilgilerinin güçlendirilmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Boz (2004) da bu duruma dikkat çekerek, öğrenci hatalarını tespit etmede ve nedenlerini irdelemede, alan bilgisinin önemli bir etken olduğunu belirtmektedir. Alan bilgisi zayıf olan öğretmen adaylarının alan öğretimi bilgileri de eksik kalacaktır. Bunun için öğretmen eğitiminde alan derslerinin öğretmen adaylarından beklenen bir öğretimi yansıtacak şekilde gerçekleştirilmesi önemlidir. Alan derslerinde öğretmen adaylarına kavramları doğrudan aktarmak onların kavramları öğrenmelerinin önüne geçecektir. Aksine öğretmen adaylarının kendi öğrenme süreçlerinden sorumlu oldukları alan derslerinde, öğretmen adayları kavramları öğrenci gözüyle deneyimleme imkânı kazanacaklar ve sonraki öğretim süreçlerine bu deneyimlerini yansıtacaklardır. Bu doğrultuda öğretmen eğitimi sürecinde alan ve alan öğretimine yönelik derslerde öğretmen adaylarından bekleneni öncelikle öğretmen eğitimcilerinin uygulamaları önemlidir.

Bu çalışma kapsamında öğretmen adaylarının öğrenci düşüncesine ilişkin sahip oldukları bilgileri ortaya koymada öğrenci hata ve yanılgılarını içeren limit ile ilgili iki senaryodan yararlanılmıştır. Çok sayıda öğretmen adayının öğrencilerin düşünceleri ile başa çıkma yolları belirlenmek istendiğinden senaryolar bu amaca hizmet eden bir veri toplama aracı olmuştur. Ancak gerçek sınıf ortamında yaşanabilecek bu gibi öğrenci hata veya yanılgılarına ilişkin öğretmen adaylarının yaklaşımlarını belirlemede sınırlı kalmaktadır. Bu nedenle gerçek sınıf ortamlarında öğretmen adaylarının öğrenci düşüncelerine nasıl yanıt verdiklerini inceleyen çalışmaların yaygınlaştırılması önerilmektedir. Ek olarak, öğretmen adaylarına sunulan senaryoların limit kavramına ilişkin yaygın hata ve yanılgılara yönelik olacak şekilde çeşitlendirilmesi, öncelikle senaryolara konu edinen limitlerin öğretmen adaylarınca yorumlanması sağlanarak daha sonra senaryoların sunulması öğretmen adayının kavramsal bilgilerine yönelik daha kapsamlı bir bakış sunacaktır. Bu tasarımdaki bir çalışma hem öğretmen adaylarının mevcut kavram yanılgılarını hem de bu kavram yanılgılarıyla başa çıkma yollarını yorumlama imkânı sunacaktır. Çalışmamızda yazılı olarak yanıt aldığımız senaryoların sözü edilen kapsamda daha az sayıda öğretmen adayıyla mülakat yaparak gerçekleştirilmesi öğretmen adaylarının düşünce ve eylemlerinin procept kavramı açısından limit anlayışlarını analiz etmede katkı sunacaktır.

Kaynakça

Adams, M. S. (2013). *Students' conceptual knowledge of limits in calculus: A two-part constructivist case study* (Unpublished doctoral dissertation). The University of North Carolina, Chapel Hill, NC.

An, S., Kulm, G. ve Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(2), 145–172.

Anthony, G., Hunter, J. ve Hunter, R. (2015). Supporting prospective teachers to notice students' mathematical thinking through rehearsal activities. *Mathematics Teacher Education and Development*, *17*(2), 7-24.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J. ve Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249-272.

Ball, D. L. (1991). What's all this talk about "discourse"?. *The Arithmetic Teacher, 39*(3), 44-48.

Baştürk, S. ve Dönmez, G. (2011). Mathematics student teachers' misconceptions on the limit and continuity concepts. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education, 5*(1), 225-249.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as" springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208.

Boz, N. (2004, Temmuz). *Öğrencilerin hatasını tespit etme ve nedenlerini irdeleme*. XIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı toplantısında sunulan bildiri, İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Malatya.

Brendefur, J. L., Thiede, K., Strother, S., Bunning, K. ve Peck, D. (2013). Developing mathematical thinking: Changing teachers' knowledge and instruction. *Journal of Curriculum and Teaching, 2*(2), 62-75.

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 221-239.

Bukova, E. (2006). *Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramların ilişkilendirilmesinde karşılaştıkları güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme* (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Cengiz, N., Kline, K. ve Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(5), 355-374.

Cornu, B. (1991). Limits. D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (s. 153-166) içinde. Boston: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. ve Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Creswell, J. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative and mixed methods approaches* (2. baskı). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Çetin, Ö. F., Dane, A. ve Bekdemir, M. (2012). Yığılma noktası kavramı ve kullanımı. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 6*(2), 217-233.

Davis, R. B. ve Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavior, 5*(3), 281-303.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. P. Nesher ve J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 113–134) içinde. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Duru, A. (2011). Pre-service teachers' perception about the concept of limit. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *11*(3), 1710-1715.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T. ve Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(4), 765-790.

Empson, S. B. ve Junk, D. (2004). Teachers' knowledge of children's mathematics after implementing a student-centered curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(2), 121-144.

Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(2), 143-154.

Gray, E. M. ve Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Hiebert, J., Berk, D., Miller, E., Gallivan, H. ve Meikle, E. (2019). Relationships between opportunity to learn mathematics in teacher preparation and graduates' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(1), 23-50.

Hill, H. C., Ball, D. L. ve Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. ve Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Jaffar, S. M. ve Dindyal, J. (2011). Language-related misconceptions in the study of limits. J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer ve S. Thornton (Ed.), *Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia and the 23rd biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers, Alice Springs* (s. 390-397) içinde. Adelaide, SA: Aamt & Merga.

Jones, S. R. (2015). Calculus limits involving infinity: The role of students' informal dynamic reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(1), 105-126.

Jordaan, T. (2005). *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students* (Unpublished doctoral dissertation). University of South Africa, Pretoria.

Juter, K. (2006). *Limits of functions: University students' concept development* (Unpublished doctoral dissertation). Luleå Tekniska Universitet, Luleå.

Kazemi, E. (1998). Discourse that promotes conceptual understanding. *Teaching Children Mathematics, 4*(7), 410–414.

Kula, S. (2011). *Matematik öğretmen adaylarının dörtlü bilgi modeli ile alan ve alan öğretimi bilgilerinin incelenmesi: Limit örneği* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Kula, S. ve Güzel, E. B. (2014). Misconceptions emerging in mathematics student teachers' limit instruction and their reflections. *Quality & Quantity, 48*(6), 3355-3372.

Kula Ünver, S. ve Bukova Güzel, E. (2016). Conceptualizing pre-service mathematics teachers' responding to students' ideas while teaching limit concept [Özel sayı]. *European Journal of Education Studies*, 33-55.

Kula Ünver, S. ve Bukova Güzel, E. (2019). Prospective mathematics teachers' choice and use of representations in teaching limit concept. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 5*(1), 134-156.

Kung, D. ve Speer, N. (2009). Mathematics teaching assistants learning to teach: Recasting early teaching experiences as rich learning opportunities. *Journal of Graduate and Professional Student Development, 12*, 1-23.

Levin, D. M. (2008). *What secondary science teachers pay attention to in the classroom: Situating teaching in institutional and social systems* (Unpublished doctoral dissertation). University of Maryland, College Park.

Levin, D. M., Hammer, D. ve Coffey, J. E. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education, 60*(2), 142-154.

Levin, D. M. ve Richards, J. (2010, Ocak). Exploring how novice teachers learn to attend to students' thinking in analyzing case studies of classroom teaching and learning. *Proceedings of the 9th International Conference of the Learning Sciences, 1,* 41-48.

Manouchehri, A. ve Lapp, D. A. (2003). Unveiling student understanding: The role of questioning in instruction. *Mathematics Teacher, 96*(8), 562-566.

McGuffey, W. (2018). *Insights from College Algebra Students' Reinvention of Limit at Infinity* (Unpublished doctoral dissertation). Columbia University, NY.

Michaels, S. ve O'Connor, C. (2015). Conceptualizing talk moves as tools: Professional development approaches for academically productive discussion. L. B. Resnick, C. S. C. Asterhan ve S. N. Clarke (Ed.), *Socializing intelligence through academic talk and dialogue* (s. 347–362) içinde. Washington, DC: American Educational Research Association.

Nair, G. S. (2010). *College students' concept images of asymptotes, limits, and continuity of rational functions* (Unpublished doctoral dissertation). The Ohio State University, Columbus, OH.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM Publications.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(4) 396-426.

Özaltun, A. (2014). *Matematik öğretmenlerinin mesleki gelişimleri: Öğrenci düşüncesi bilgisinin öğretime yansıması* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Özmantar, M. F. ve Yeşildere, S. (2013). Limit ve süreklilik konularında kavram yanılgıları ve çözüm arayışları. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (s. 181–221) içinde. Ankara: Pegem Akademi.

Salas, S. L. ve Hille, E. (1990). *Calculus: One and several variables: Complex variables, differential equations supplement*. J. Wiley and Sons.

Seifried, J. ve Wuttke, E. (2010). Student errors: How teachers diagnose them and how they respond to them. *Empirical Research in Vocational Education and Training, 2*(2), 147-162.

Son, J. W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational studies in mathematics*, *84*(1), 49-70.

Son, J. W. ve Sinclair, N. (2010). How preservice teachers interpret and respond to student geometric errors. *School Science and Mathematics*, *110*(1), 31-46.

Stockero, S. L., Rupnow, R. L. ve Pascoe, A. E. (2017). Learning to notice important student mathematical thinking in complex classroom interactions. *Teaching and Teacher Education*, *63*, 384-395.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(3), 258-276.

Tall, D. ve Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 5-25.

Virvou, M. ve Alepis, E. (2005). Mobile educational features in authoring tools for personalised tutoring. *Computers & Education*, *44*(1), 53-68.

Wicks, R. ve Janes, R. (2006). Uncovering children's thinking about patterns: Teacher-researchers improving classroom practices. S. Z. Smith, D. S. Mewborn ve M. E. Smith (Ed.), *Teachers engaged in research: Inquiry into mathematics classrooms, grades pre-k-2* (s. 211–236) içinde. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 219-236.

Zengin, Y. (2017). Komşuluk ve yığılma noktası kavramlarının dinamik matematik ortamında keşfedilmesi üzerine bir araştırma. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 43*, 302-333.