Karaelmas Fen ve Müh. Derg. 6(1):121-129, 2016

Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi
Dergi web sayfası: http://fbd.beun.edu.tr

Araştırma Makalesi

Genelleştirilmiş Trapezoidal Bulanık Esnek Kümeler ve Karar Verme Problemlerinde Uygulaması

Generalized Trapezoidal Fuzzy Soft Sets and Its Application in Decision-Making Problems

Yıldıray Çelik

Ordu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Ordu, Türkiye

Öz

Bu çalışmada, kendisi de trapezoidal bulanık olan bir genelleştirilmiş parametreyi tanıtarak, genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme kavramını tanımlandık ve bu yapıya ait bazı özellikleri inceledik. Ayrıca trapezoidal bulanık esnek kümelerin karar verme problemlerindeki uygulanabilirliğini değerlendirdik ve tıp tanısı için örnek bir çalışma sunduk.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, bulanık esnek küme, trapezoidal bulanık esnek küme

Abstract

In this paper, by introducing a generalization parameter, which itself is trapezoidal fuzzy, we define generalized trapezoidal fuzzy soft sets and then examine some of their properties. Also, we evaluated the applicability of trapezoidal fuzzy soft sets in decision-making problems and presented a case study for medical diagnosis.

Keywords: Soft set, fuzzy soft set, trapezoidal fuzzy soft set

1. Giriş

Bulanık küme teorisi ilk olarak Zadeh tarafından ortaya atılmıştır (Zadeh 1965). Bulanık mantığa göre evrendeki bir nesne, o evrendeki bir kümenin mutlaka elemanıdır ama eleman olma derecesi farklıdır. Bulanık mantık, dilsel değişkenler yardımıyla biraz sıcak, ılık, uzun, çok uzun, soğuk gibi günlük hayatımızda kullandığımız kelimeler yardımıyla insan mantığına en yakın doğrulukta denetimi sağlayabilir. Bulanık mantık denetleyici kullanılarak elektrikli ev aletlerinden oto elektroniğine, gündelik kullandığımız iş makinelerinden üretim mühendisliğine, endüstriyel denetim teknolojilerinden otomasyona kadar her alanda uygulama alanı bulabilir. Belirsizliğe farklı bir yaklaşım olan esnek küme teori ise ilk olarak Molodtsov tarafından tanımlandı (Molodtsov 1999). Esnek kümeler birçok yönü ile zengin bir uygulama potansiyeline sahiptir. Bu uygulamalardan birkaç tanesi Molodtsov tarafından kendi çalışmasında incelenmiştir (Molodtsov 1999). Son yıllarda ise esnek kümeler üzerine yapılan çalışmalar hızlıca artmaktadır. Bazı araştırmacılar bulanık esnek kümeler ve bunlara ait cebirsel özellikler üzerinde çalıştılar. İlk olarak Maji vd. bulanık esnek küme kavramını verdiler ve onlar üzerinde bazı sonuçları elde ettiler (Maji vd. 2001). Maji vd. sezgisel bulanık esnek küme kavramını vererek bununla ilgili özellikleri araştırdılar (Maji vd. 2004). Roy ve Maji kesin olmayan çoklu gözlem bilgisinden yola çıkarak bir nesneyi tanımlamanın yeni bir metodunu sundular (Roy ve Maji 2007). Jin-liang vd. bulanık esnek grup kavramını verdiler ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar elde ettiler (Jin-liang vd 2008). Yang vd. interval değerli bulanık kümeleri ve esnek kümeleri birleştirerek interval değerli bulanık esnek kümeleri tanımladılar (Yang vd. 2009). Kong vd. bir karar verme problemi için bulanık esnek kümelere teorik bir yaklaşım sundular (Kong vd. 2009). Aygünoğlu ve Aygün bulanık esnek grup yapısını inceliyerek esnek fonksiyonları ve bulanık esnek homomorfileri tanımladılar (Aygünoğlu ve Aygün 2009). Xiao vd. bulanık esnek kümeler üzerinde birleştirilmiş tahmin yaklaşımları ile ilgili çalışma sundular (Xiao vd. 2009). Çağman vd. bulanık esnek kümeler üzerinde daha etkili karar verme metodunu inşa etmek için bulanık esnek birleştirme operasyonunu tanımladılar (Çağman vd. 2011). Feng vd. bulanık esnek kümeler üzerinde karar verme problemine uygulanabilir bir yaklaşım sundular (Feng

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: ycelik61@gmail.com

Geliş tarihi / Received : 14.03.2016
Kabul tarihi / Accepted : 11.04.2016

vd. 2010). Jiang vd. interval değerli sezgisel bulanık esnek kümeleri tanımladılar ve bunların bazı özelliklerini ortaya koydular (Jiang vd. 2010). Jun vd. bulanık esnek BCK/BCI cebirleri kavramını ortaya koyarak onların özelliklerini incelediler (Jun vd. 2010). Majumdar ve Samanta genelleştirilmiş bulanık esnek kümeleri tanımladılar ve onların bazı özellikleri üzerinde çalıştılar (Majumdar ve Samanta 2010). Aynı çalışmada karar verme probleminde ve tıbbi tanı probleminde genelleştirilmiş bulanık esnek kümelerin bir uygulamasını yaptılar. Yang bulanık esnek yarı gurup ve bulanık esnek ideal kavramlarını verdi (Yang 2011). Yin vd. sezgisel bulanık esnek kümelerin cebirsel yapısını incelediler ve bunlara ait yeni özellikleri ortaya koydular (Yin vd. 2012). Çelik vd. bulanık esnek kümelerin halka teorisindeki uygulamalarını incelediler ve bunlara ait yeni özellikleri elde ettiler (Çelik vd. 2013). Trapezoidal bulanık sayı, bulanık kümelerde önemli bir kavramdır. Bir trapezoidal bulanık sayının üyelik foksiyonu parçalı doğrusal ve trapezoidaldır. Xiao vd. belirsizliklerle ilgili bazı dilsel değerlendirmeler yapabilmek için esnek kümelerle trapezoidal bulanık kümeleri birleştirerek yeni bir kavram olarak trapezoidal bulanık esnek kümeleri tanımladılar (Xiao vd. 2012).

Biz bu çalışmada kendisi de trapezoidal bulanık olan bir genelleştirilmiş parametreyi kullanarak, genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme kavramını tanımlayacağız ve bu yapıya ait bazı özellikleri inceleyeceğiz. Ayrıca genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümelerin karar verme problemlerindeki uygulanabilirliğini araştıracağız ve tıp tanısı için örnek bir çalışma sunacağız.

2. Genel Bilgiler

Tanım 2.1. (Zadeh 1965) X boştan farklı bir küme ve I=[0,1]⊆ P olsun.

$\mu_A: X \to [0,1]$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen;

$A=\{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \subset X \times I$ kümesine X de bir bulanık küme denir.

Tanım 2.2. (Zadeh 1965) μ ve η bir X kümesinin bulanık alt kümeleri olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu(x) \leq \eta(x)$ ise η bulanık alt kümesi μ bulanık alt kümesini kapsıyor denir ve $\mu \subseteq \eta$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. (Çelik vd. 2011) F: A→P(U) bir dönüşüm olmak üzere (F,A) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir. Burada A kümesine esnek kümenin parametre kümesi ve $\forall x \in$ A için F(x) kümesine de x-yaklaşımlı küme denir.

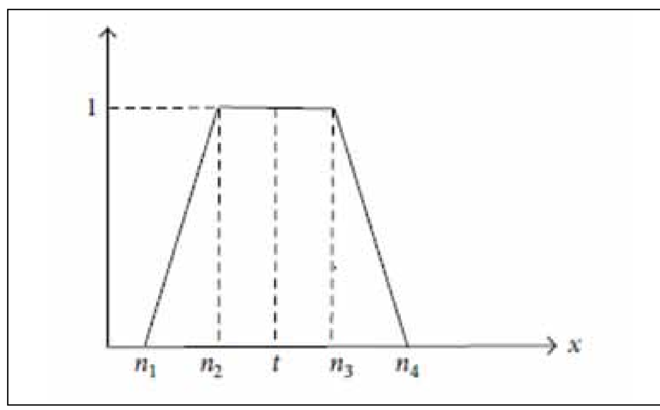
Tanım 2.4. (Maji vd. 2001) U evrensel küme, E parametreler kümesi ve A ⊆ E olsun. $\mathcal{F}$(U), U'nun bütün bulanık alt kümelerinin kümesi olmak üzere F:A→ $\mathcal{F}$(U) ile verilen (F,A) çiftine U üzerinde tanımlı bulanık esnek bir küme denir.

Tanım 2.5. (Maji vd. 2001) (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki bulanık esnek küme olsun. Eğer

i) A⊆B

ii) $\forall x \in$ A için F(x)≤G(x) oluyorsa (F,A)'ya (G,B)'nin bulanık esnek alt kümesidir denir ve bu durum (F,A)$\widetilde{\subseteq}$ (G,B) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.6. (Kaufmann ve Gupta 1991) Bir $\tilde{n}$ bulanık sayısı Şekil 1. deki gibi (n_1, n_2, n_3, n_4) dörtlüsü ile parametre edilen parçalı fonksiyon ile karakterize edilebilir. Bu trapezoidal bulanık sayının üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.



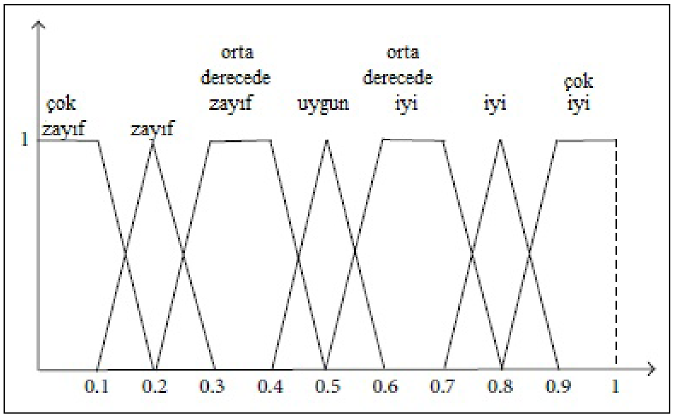
Şekil 1. $\tilde{n}$ trapezoidal bulanık sayısı.

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} 0 & x < n_1 \\ \dfrac{x-n_1}{n_2-n_1} & n_1 \leq x \leq n_2 \\ 1 & n_2 \leq x \leq n_3 \\ \dfrac{x-n_4}{n_3-n_4} & n_3 \leq x \leq n_4 \\ 0 & x > n_4 \end{cases}$$

Şekil 2. deki niteliksel değişkenler, bir trapezoidal bulanık sayının üyelik fonksiyonu yardımıyla nümerik değişkenlere aktarılabilir.

Örneğin "orta derecede zayıf" niteliksel değişkeni (0.2,0.3, 0.4,0.5) dörtlüsü tarafından ifade edilebilir ve üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir.

$$\mu_{orta\ derecede\ zayıf}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0.2 \\ \dfrac{x-0.3}{0.3-0.2} & 0.2 \leq x \leq 0.3 \\ 1 & 0.3 \leq x \leq 0.4 \\ \dfrac{x-0.5}{0.4-0.5} & 0.4 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & x > 0.5 \end{cases}$$



Şekil 2. Niteliksel değişkenler grafiği.

Tanım 2.7. (Kaufmann ve Gupta 1991) Bir veya birkaç farklı trapezoidal bulanık sayı ya da sayılar tarafından içerilen bir kümeye trapezoidal bulanık küme denir ve $\tilde{I}$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. (Kaufmann ve Gupta 1991) $\tilde{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ ve $\tilde{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ trapezoidal bulanık sayılar olsun. Bu takdirde,

i) $\tilde{m} \leq \tilde{n} \Leftrightarrow m_1 \leq n_1, m_2 \leq n_2, m_3 \leq n_3, m_4 \leq n_4$

ii) $\tilde{n}^c = (1 - n_4, 1 - n_3, 1 - n_2, 1 - n_1)$

iii) $\tilde{m} \cup \tilde{n} = (m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2, m_3 \vee n_3, m_4 \vee n_4)$

iv) $\tilde{m} \cap \tilde{n} = (m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2, m_3 \wedge n_3, m_4 \wedge n_4)$

v) $\tilde{m} \otimes \tilde{n} = (m_1 \times n_1, m_2 \times n_2, m_3 \times n_3, m_4 \times n_4)$

Tanım 2.9. (Çelik ve Yamak 2013) $\tilde{n}$ trapezoidal bulanık sayısının durulaştırılmış *t* değeri,

$t = \dfrac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{4}$ formülü yardımıyla hesaplanır.

Tanım 2.10. (Xiao vd. 2012) TB(U), U'nun bütün trapezoidal bulanık alt kümelerinin kümesi olsun. $\tilde{\mathcal{F}}$: A → TB(U) ile verilen ($\tilde{\mathcal{F}}$, A)'ya U üzerinde bir trapezoidal bulanık esnek küme denir.

Örnek 2.1. Varsayalım ki satın alınması düşünülen farklı tipteki 5 adet evin kümesi U={u_1,u_2,u_3,u_4,u_5} şeklinde ve bu evlere ait E parametre kümemsi de E={ucuzluk, güzellik, büyüklük, konum, yeşil bahçeli olup olmaması} olarak verilsin. Herhangi birisi değişik özellikleri olan bu evlere ait niteliksel değişkenleri Çizelge 1 de ki gibi ifade etsin.

Şekil 2' deki niteliksel değişkenlerle nümerik değişkenler arasındaki dönüşüm yardımıyla ilgili ($\tilde{\mathcal{F}}$,A) trapezoidal bulanık esnek kümesini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\tilde{\mathcal{F}}(e_1) = \left\{ \frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.5,0.6,0.7,0.8)} \right\}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(e_2) = \left\{ \frac{u_1}{(0.8,0.9,1.0,1.0)}, \frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_3}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.2,0.3,0.4,0.5)} \right\}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(e_3) = \left\{ \frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_3}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_4}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)} \right\}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(e_4) = \left\{ \frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_2}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.7,0.8,0.8,0.9)} \right\}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(e_5) = \left\{ \frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_3}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_4}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)} \right\}$$

Örnek 2.1'de trapezoidal bulanık esnek kümeler için parametrelerin öz niteliği belirsiz ve karmaşıktır. Xiao vd. parametrelerin belirsiz niteliğinin nasıl belirteceğini ifade etmez (Xiao vd. 2012). Bu durum modelin dezavantajıdır. Bu zorluğun üstesinden gelmek için kendisi trapezoidal bulanık olan genelleştirilmiş parametreleri inceleyeceğiz ve genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeyi tanımlayacağız.

Çizelge 1. Derecelendirme çizelgesi.

U	ucuzluk	güzellik	büyüklük	konum	yeşil bahçeli
u_1	2	5	0	0	3
u_2	0	4	4	2	1
u_3	4	0	2	1	0
u_4	1	3	4	2	4
u_5	3	1	0	4	0

***0:** zayıf, **1:** orta derecede zayıf, **2:** uygun, **3:** orta derecede iyi, **4:** iyi, **5:** çok iyi.*

3. Genelleştirilmiş Trapezoidal Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 3.1. U bir evren ve E'de parametre kümesi olsun. (U,E) ikilisine bir esnek evren denir. Varsayalım ki $\tilde{\mathcal{F}}: \mathrm{E} \to \mathrm{TB(U)}$ ve $\tilde{f}: \mathrm{E} \to \tilde{I}$ olsun. Burada $\tilde{f}$, E'nin bir trapezoidal bulanık alt kümesini göstermektedir.

$\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}: \mathrm{E} \to \mathrm{TB(U)} \times \tilde{I}$ ve $\forall e \in \mathrm{E}$ için
$\tilde{\mathcal{F}}(e) \in \mathrm{TB(U)}, \tilde{f}(e) \in \tilde{I}$ olmak üzere
$\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}(e) = (\tilde{\mathcal{F}}(e), \tilde{f}(e))$ ile verilen $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}'e$ (U,E) esnek evreni üzerinde bir genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme denir. Burada her bir e_i parametresi için $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}(e_i) = (\tilde{\mathcal{F}}(e_i), \tilde{f}(e_i))$ ifadesi sadece $\tilde{\mathcal{F}}(e_i)$'de U'ya ait olan elemanların trapezoidal bulanık üyelik derecelerini vermez aynı zamanda $\tilde{f}(e_i)$ tarafından ifade edilen E'ye ait olası parametrelerin trapezoidal bulanık üyelik derecelerini de verir.

Genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme aynı zamanda bir esnek kümedir. Çünkü $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}: \mathrm{E} \to \mathrm{TB(U)} \times \tilde{I}$ bir dönüşümdür ve $\tilde{F}_{\tilde{f}}(e) = (\tilde{F}(e), \tilde{f}(e))$ olmak üzere

$$\tilde{\mathcal{F}}(e) = \left\{ \frac{u}{(\mu^1_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u), \mu^2_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u), \mu^3_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u), \mu^4_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u))} : u \in U \right\}$$

$\tilde{f}(e) = ((\mu^1_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u), \mu^2_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u), \mu^3_{\tilde{f}(e)}(u), \mu^4_{\tilde{f}(e)}(u))$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1. Varsayalım ki Bay ve Bayan X bir ev satın almak için emlakçıya gidiyor. Konum, ucuzluk ve büyüklük parametrelerinin kümesi E={e_1, e_2, e_3} olsun ve bu parametreler ile karakterize edilen farklı tipteki 5 adet evin kümesi de U={u_1, u_2, u_3, u_4, u_5} olsun. X çifti değişik nitelikteki 5 evi aşağıdaki şekilde tanımlasın.

Çizelge 2. Derecelendirme çizelgesi.

U	konum	ucuzluk	büyüklük
u_1	orta derece iyi	orta derece kötü	kötü
u_2	kötü	iyi	iyi
u_3	çok kötü	orta derece kötü	uygun
u_4	uygun	uygun	orta derecede iyi
u_5	iyi	kötü	kötü
$\tilde{f}$	uygun	orta derecede iyi	orta derecede kötü

Biz (U,E) evreni üzerindeki $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}$ genelleştirilmiş $\tilde{\mathcal{F}}$ bulanık esnek kümesini niteliksel değişkenler ve nümerik değişkenler arasında dönüşüm kuralı vasıtasıyla ifade edebiliriz. Varsayalım ki

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}(e_1) = \left(\left\{ \frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}, \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.7,0.8,0.8,0.9)} \right\}, (0.4,0.5,0.5,0.6) \right)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}(e_2) = \left(\left\{ \frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)} \right\}, (0.5,0.6,0.7,0.8) \right)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}(e_3) = \left(\left\{ \frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_3}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)} \right\}, (0.2,0.3,0.4,0.5) \right)$$

Üstteki örnekte parametrelerin niteliğinin belirsizliğini dikkate aldık. Örneğin ucuz olma niteliği kesin değildir ve (0.5,0.6,0.7,0.8) trapezoidal bulanık sayısı tarafından karakterize edilir. Fakat Örnek 2.1'de parametrelerin niteliğinin belirsizliği dikkate alınmamıştır. Trapezoidal bulanık esnek küme ve genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme arasındaki fark belirsizliğin yorumlanıp yorumlanamayacağıdır. Trapezoidal bulanık esnek küme ile kıyaslandığında genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeler niteliksel belirsizliği daha fazla anlaşılır kılmaktadır.

Tanım 3.2. $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}$ ve $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}'$ya $\tilde{G}_{\tilde{g}}$'nin bir genişletilmiş trapezoidal bulanık esnek alt kümesi denir $\Leftrightarrow$

ι) $\forall e \in E$ için $\tilde{f}(e) \leq \tilde{g}(e)$ yani

$$\mu^1_{\tilde{f}(e)} \leq \mu^1_{\tilde{g}(e)}, \mu^2_{\tilde{f}(e)} \leq \mu^2_{\tilde{g}(e)}, \mu^3_{\tilde{f}(e)} \leq \mu^3_{\tilde{g}(e)}, \mu^4_{\tilde{f}(e)} \leq \mu^4_{\tilde{g}(e)}$$

ιι) $\forall e \in \mathrm{E}$ için $\tilde{F}(e) \leq \tilde{G}(e)$ yani

$$\mu^1_{\tilde{F}}(e) \leq \mu^1_{\tilde{G}(e)}, \mu^2_{\tilde{F}(e)} \leq \mu^2_{\tilde{G}(e)}, u^3_{\tilde{F}(e)} \leq \mu^3_{\tilde{G}(e)}, \mu^4_{\tilde{F}(e)} \leq \mu^4_{\tilde{G}(e)}$$

Bu durum $\tilde{F}_{\tilde{f}} \sqsubseteq \tilde{G}_{\tilde{g}}$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek **3.2.** Varsayalım $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}$, (U,E) üzerinde genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesi Örnek 3.1'deki gibi olsun. $\tilde{G}_{\tilde{g}}$, (U,E) üzerinde başka bir genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme aşağıdaki gibi olsun.

$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_1) = \left(\left\{ \frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_2}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}, \frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}, \frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.5,0.6,0.7,0.8)} \right\}, (0.2,0.3,0.4,0.5) \right)$$

$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_2) = \left(\left\{ \frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)} \right\}, (0.0,0.1,0.1,0.2) \right)$$

$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_3) = \left(\left\{ \frac{u_1}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}, \frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)} \right\}, (0.2,0.3,0.4,0.5) \right)$$

Açıkça görülüyor ki $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}} \sqsubseteq \tilde{G}_{\tilde{g}}$ dir.

Tanım 3.3. $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}$ ve $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Eğer $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}} \sqsubseteq \tilde{G}_{\tilde{g}}$ ve $\tilde{G}_{\tilde{g}} \sqsubseteq \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}$ ise $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}$ ve $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeleri eşittir denir ve $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}$ ile gösterilir.

Tanım 3.4. $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}$ ve $\tilde{G}_{\tilde{g}}$, (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Bu iki kümenin birleşimi $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}} \sqcup \tilde{G}_{\tilde{g}}$ şeklinde gösterilip $\widetilde{H}_{\tilde{h}}: \mathrm{E} \to \mathrm{TB}(\mathrm{U}) \times \tilde{I}$ dönüşümü ile ifade edilir. Burada $\forall u \in \mathrm{U}$ için $\widetilde{H}_{\tilde{h}}(e) = (\widetilde{H}(e), \tilde{h}(e))$ şeklinde olup

$$\tilde{H}(e) = \tilde{\mathcal{F}}(e) \sqcup \tilde{G}(e) = \left\{\frac{u}{\mu_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u) \cup \mu_{\tilde{G}(e)}(u)} : u \in \mathrm{U}\right\}$$
$$= \left\{\frac{u}{(\mu^1_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u) \vee \mu^1_{\tilde{G}(e)}(u), \mu^2_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u) \vee \mu^2_{\tilde{G}(e)}(u), \mu^3_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u) \vee \mu^3_{\tilde{G}(e)}(u), \mu^4_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u) \vee \mu^4_{\tilde{G}(e)}(u))} : u \in \mathrm{U}\right\}$$
$$\tilde{h}(e) = \tilde{f}(e) \cup \tilde{g}(e) =$$
$$(\mu^1_{\tilde{f}(e)}(u) \vee \mu^1_{\tilde{g}(e)}(u), \mu^2_{\tilde{f}(e)}(u) \vee \mu^2_{\tilde{g}(e)}(u), \mu^3_{\tilde{f}(e)}(u) \vee \mu^3_{\tilde{g}(e)}(u), \mu^4_{\tilde{f}(e)}(u) \vee \mu^4_{\tilde{g}(e)}(u))$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.5. $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}$ ve $\tilde{G}_{\tilde{g}}$, (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Bu iki kümenin kesişimi $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}} \sqcap \tilde{G}_{\tilde{g}}$ şeklinde gösterilip $\tilde{H}_{\tilde{h}}: \mathrm{E} \to \mathrm{TB}(\mathrm{U}) \times \tilde{I}$ dönüşümü ile ifade edilir. Burada $\forall u \in U$ için $\tilde{H}_{\tilde{h}}(e) = (\tilde{H}(e), \tilde{h}(e))$ şeklinde olup

$$\tilde{H}(e) = \tilde{\mathcal{F}}(e) \sqcup \tilde{G}(e) = \left\{\frac{u}{\mu_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u) \cup \mu_{\tilde{G}(e)}(u)} : u \in \mathrm{U}\right\}$$
$$= \left\{\frac{u}{(\mu^1_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u) \wedge \mu^1_{\tilde{G}(e)}(u), \mu^2_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u) \wedge \mu^2_{\tilde{G}(e)}(u), \mu^3_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u) \wedge \mu^3_{\tilde{G}(e)}(u), \mu^4_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}(u) \wedge \mu^4_{\tilde{G}(e)}(u))} : u \in \mathrm{U}\right\}$$
$$\tilde{h}(e) = \tilde{f}(e) \cap \tilde{g}(e) =$$
$$(\mu^1_{\tilde{f}(e)}(u) \wedge \mu^1_{\tilde{g}(e)}(u), \mu^2_{\tilde{f}(e)}(u) \wedge \mu^2_{\tilde{g}(e)}(u), \mu^3_{\tilde{f}(e)}(u) \wedge \mu^3_{\tilde{g}(e)}(u), \mu^4_{\tilde{f}(e)}(u) \wedge \mu^4_{\tilde{g}(e)}(u))$$

ile tanımlanır.

Örnek 3.3. $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesi Örnek 3.1'deki gibi olsun. (U,E) üzerinde başka bir $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesini aşağıdaki gibi ele alalım.

$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_1) = \left(\left\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}, \frac{u_3}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.8,0.9,0.9,1.0)}\right\}, (0.5,0.6,0.7,0.8)\right)$$
$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_2) = \left(\left\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_3}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\right\}, (0.2,0.3,0.4,0.5)\right)$$
$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_3) = \left(\left\{\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_3}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}\right\}, (0.7,0.8,0.8,0.9)\right)$$

Tanım 3.4'den

$$(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}} \sqcup \tilde{G}_{\tilde{g}})(e_1) = \left(\left\{\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}\right\}, (0.5,0.6,0.7,0.8)\right)$$
$$(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}} \sqcup \tilde{G}_{\tilde{g}})(e_2) = \left(\left\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_3}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\right\}, (0.5,0.6,0.7,0.8)\right)$$
$$(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}} \sqcup \tilde{G}_{\tilde{g}})(e_3) = \left(\left\{\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_3}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}\right\}, (0.7,0.8,0.8,0.9)\right)$$

Tanım 3.5'den

$$(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}} \sqcap \tilde{G}_{\tilde{g}})(e_1) = \left(\left\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}, \frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}, \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}\right\}, (0.4,0.5,0.5,0.6)\right)$$
$$(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}} \sqcap \tilde{G}_{\tilde{g}})(e_2) = \left(\left\{\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\right\}, (0.5,0.6,0.7,0.8)\right)$$
$$(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}} \sqcap \tilde{G}_{\tilde{g}})(e_3) = \left(\left\{\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_3}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\right\}, (0.2,0.3,0.4,0.5)\right)$$

Tanım 3.6. Bir genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeye genelleştirilmiş boş trapezoidal bulanık esnek küme denir $\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}: \mathrm{E} \to \mathrm{TB}(\mathrm{U}) \times \tilde{I}$ olmak üzere $\forall e \in \mathrm{E}$ için $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}(e) = (\tilde{\mathcal{F}}(e), \tilde{f}(e)), \tilde{\mathcal{F}}(e) = \left\{\frac{u}{(0,0,0,0)} : u \in U\right\}$ ve $\tilde{f}(e) = (0,0,0,0)$ dir. Bu durum ϕ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.7. Bir genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeye genelleştirilmiş tam trapezoidal bulanık esnek küme denir $\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}: \mathrm{E} \to \mathrm{TB}(\mathrm{U}) \times \tilde{I}$ olmak üzere $\forall e \in \mathrm{E}$ için $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}(e) = (\tilde{\mathcal{F}}(e), \tilde{f}(e)), \tilde{\mathcal{F}}(e) = \left\{\frac{u}{(1,1,1,1)} : u \in U\right\}$ ve $\tilde{f}(e) = (1,1,1,1)$ dir. Bu durum $\tilde{\mathrm{U}}$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.8. $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}, A)$ ve $(\tilde{G}_{\tilde{g}}, \mathrm{B}), (\mathrm{U}, \mathrm{E})$ üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. $\forall(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ için $\tilde{H}_{\tilde{h}}(\alpha, \beta), \tilde{h}(\alpha, \beta))$ olmak üzere

$$\tilde{H}(\alpha,\beta) = \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) \sqcap \tilde{G}(\beta) =$$
$$\left\{\frac{u}{\mu_{\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)}(u) \cap \mu_{\tilde{G}(\beta)}(u)} : u \in \mathrm{U}\right\} ve$$
$$\tilde{h}(\alpha,\beta) = \mu_{\tilde{f}(\alpha)} \cap \mu_{\tilde{g}(\beta)}$$

ile verilen $(\tilde{H}_{\tilde{h}}, \mathrm{A} \times \mathrm{B})$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesine $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}, \mathrm{A})$ ve $(\tilde{G}_{\tilde{g}}, \mathrm{B})$nin $\wedge$ arakesiti denir ve $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}, \mathrm{A}) \wedge (\tilde{G}_{\tilde{g}}, \mathrm{B}) = (\tilde{H}_{\tilde{h}}, \mathrm{A} \times \mathrm{B})$ ile gösterilir.

Tanım 3.9. $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}, \mathrm{A})$ ve $(\tilde{G}_{\tilde{g}}, \mathrm{B}), (\mathrm{U}, \mathrm{E})$ üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. $\forall(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ için $\tilde{H}_{\tilde{h}}(\alpha, \beta) = (\tilde{H}(\alpha, \beta), \tilde{h}(\alpha, \beta))$ olmak üzere

$$\tilde{H}(\alpha,\beta) = \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) \sqcup \tilde{G}(\beta) =$$
$$\left\{\frac{u}{\mu_{\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)}(u) \cup \mu_{\tilde{G}(\beta)}(u)} : u \in \mathrm{U}\right\} ve$$
$$\tilde{h}(\alpha,\beta) = \mu_{\tilde{f}(\alpha)} \cup \mu_{\tilde{g}(\beta)}$$

ile verilen $(\tilde{H}_{\tilde{h}}, \mathrm{A} \times \mathrm{B})$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesine $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}, \mathrm{A})$ ve $(\tilde{G}_{\tilde{g}}, \mathrm{B})$nin $\vee$ birleşimi denir ve $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{f}}, \mathrm{A}) \vee (\tilde{G}_{\tilde{g}}, \mathrm{B}) = (\tilde{H}_{\tilde{h}}, \mathrm{A} \times \mathrm{B})$ ile gösterilir.

Grup karar problemlerinde parametrelerin nitelikleri belirsiz ve kesin değilken genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeler, trapezoidal bulanık esnek kümelere göre daha gerçekçi kararlar vermemizi sağlar. Aşağıdaki örnekte bu durumu açıklayalım.

Örnek 3.4. Örnek 3.1 dikkate alınırsa aynı evin belirsiz nitelikleri serisinde herkes farklı fikre sahiptir. Bayan X'e göre niteliksel değişkenlerle değişik özellikteki 5 evin özellikleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 3. Derecelendirme çizelgesi

U	konum	ucuzluk	büyüklük
u_1	iyi	uygun	orta derece kötü
u_2	orta derece kötü	kötü	orta derece iyi
u_3	çok kötü	orta derece kötü	uygun
u_4	orta derece iyi	iyi	iyi
u_5	uygun	kötü	çok kötü
$\tilde{g}$	iyi	uygun	iyi

Örnek 3.1'e benzer şekilde bir $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_1)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.7,0.8,0.8,0.9)},\frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},\\ \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_5}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}\end{array}\right\},(0.7,0.8,0.8,0.9)\right)$$

$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_2)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\\ \frac{u_4}{(0.7,0.8,0.8,0.9)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\end{array}\right\},(0.4,0.5,0.5,0.6)\right)$$

$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_3)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_3}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\\ \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\end{array}\right\},(0.7,0.8,0.8,0.9)\right)$$

Evli çiftler ev tercihlerinde farklı düşündüğünde biz operatörünü kullanmalıyız. Dolayısıyla Tanım 3.9 yardımıyla aşağıdaki genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeyi elde ederiz.

$$\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_1,e_1)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},\\ \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_5}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}\end{array}\right\},(0.4,0.5,0.5,0.6)\right)$$

$$\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_1,e_2)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},\\ \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\end{array}\right\},(0.4,0.5,0.5,0.6)\right)$$

$$\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_1,e_3)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},\\ \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\end{array}\right\},(0.4,0.5,0.5,0.6)\right)$$

$$\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_2,e_1)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},\\ \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\end{array}\right\},(0.5,0.6,0.7,0.8)\right)$$

$$\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_2,e_2)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\\ \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\end{array}\right\},(0.4,0.5,0.5,0.6)\right)$$

$$\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_2,e_3)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\\ \frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\end{array}\right\},(0.5,0.6,0.7,0.8)\right)$$

$$\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_3,e_1)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},\\ \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\end{array}\right\},(0.2,0.3,0.4,0.5)\right)$$

$$\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_3,e_2)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\\ \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\end{array}\right\},(0.2,0.3,0.4,0.5)\right)$$

$$\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_3,e_3)=\left(\left\{\begin{array}{l}\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_3}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\\ \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\end{array}\right\},(0.2,0.3,0.4,0.5)\right)$$

Burada elde edilen verilerin durulaştırılmış değer çizelgesi ve derece çizelgesi Çizelge 4, 5'deki gibidir.

Görüldüğü gibi $\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_i,e_j)$'nin her elemanı bulanık matris olarak elde edilir. Bu şekilde evli bir çiftin ihtiyacı olan en iyi evi tanımlayabiliriz. Bunu yaparken son satır hariç her bir sütundaki en yüksek nümerik değeri işaretleriz. Son satır parametre çiftlerinin her birine karşı olası derecelerin her bir evin değeri ile ilgili olası (λ) durulaştırma derecesi ile bu nümerik değerlerin çarpımının toplamı alınarak hesaplanır. Yüksek skora sahip ev istenilen evdir. Burada (e_i, e_j) şeklindeki çiftlerin değerlerini almayız. Çünkü her iki parametrede aynıdır. Skor işlemi aşağıda verilmiştir.

Skor(u_1)=0.50.5=0.25

Skor(u_2)=0.650.65=0.42

Skor(u_4)=0.50.5+0.50.5+0.50.65+0.650.35+0.650.35=1.28

Bu sonuca göre u_4 evi satın alınır.

Örnek 3.4 de görüldüğü gibi bir karar verme problemi uygulamasında genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme, trapezoidal bulanık esnek kümeden daha gerçekçidir. Çünkü aynı evin belirsiz nitelikleri üzerinde değişik fikirlere sahiptir. Örneğin bay X bir evin orta derecede zayıf olmasını daha iyi olduğunu düşünürken, bayan X böyle düşünmez. Çünkü bayan X bir evin en iyi büyüklüğünün iyi olmasını düşünür. Parametrelerin özellikleri belirsiz ve karmaşık olduğu zaman genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme karar verme probleminde daha etkilidir. Bu durum genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümelerin karar vermede gerçeği yansıtması açısından daha tercih edilen bir yöntem olduğunu gösterir.

4. Genelleştirilmiş Trapezoidal Bulanık Esnek Kümelerin Tıp Tanısında Uygulaması

Bu kısımda Çelik vd. tarafından verilen tanı metodundan (Çelik ve Yamak 2013) da yola çıkarak genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme teorisi yardımıyla tıp tanısı için bir yöntem sunacağız.

Çizelge 4. Durulaştırılmış değer çizelgesi.

U	(e_1, e_1)	(e_1, e_2)	(e_1, e_3)	(e_2, e_1)	(e_2, e_2)	(e_2, e_3)	(e_3, e_1)	(e_3, e_2)	(e_3, e_3)
u_1	0.65	0.50	0.35	0.35	0.35	0.35	0.20	0.20	0.20
u_2	0.20	0.20	0.20	0.43	0.20	0.65	0.35	0.20	0.65
u_3	0.10	0.10	0.10	0.10	0.35	0.35	0.10	0.35	0.50
u_4	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.65	0.65	0.65
u_5	0.50	0.20	0.10	0.20	0.20	0.10	0.20	0.20	0.10
λ	0.50	0.50	0.50	0.65	0.50	0.65	0.50	0.35	0.35

Çizelge 5. Durulaştırılmış derece çizelgesi.

U	(e_1, e_1)	(e_1, e_2)	(e_1, e_3)	(e_2, e_1)	(e_2, e_2)	(e_2, e_3)	(e_3, e_1)	(e_3, e_2)	(e_3, e_3)
U_i	u_1	u_1, u_4	u_4	u_4	u_4	u_2	u_4	u_4	u_2, u_4
Y.D.*	-	0.50	0.50	0.50	-	0.65	0.65	0.65	-
O.D.*	-	0.50	0.50	0.65	-	0.65	0.35	0.35	-

Y.D.: Yüksek derece, **O.D.***: Olası derece.*

Esnek kümeler ilk kez Molodstov tarafından ifade edilmesinden bu yana (Molodtsov 1999) esnek küme ve onun değişik uygulamaları problemlere uygulandı. Özellikle bulanık esnek küme teorisinin tıp tanısındaki uygulamaları birçok araştırmacı tarafından çalışıldı. De vd. sezgisel bulanık kümeyi kullanarak tıp tanısı metodu üzerine çalıştı (De vd. 2001). Saikia vd. sezgisel bulanık küme teoriyi kullanarak genişletti (Saika vd. 2003). Chetia ve Das, Sanchez'in (Sanchez 1976) yaklaşımını interval değerli bulanık esnek kümelerle değerlendirdi (Chetia ve Das 2010). Fakat yukarıda bahsedilen tıp tanısı yaklaşımları kaçınılmaz sınırlamalara sahiptir. Örneğin mevcut yaklaşımlarda bir hastanın ne kadar baş ağrısı çektiğini kesin üyelik derecesi ile ifade edemeyiz. Fakat genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme de biz bu sorunu çözebiliriz. Mesela bir doktora başının çok fazla ağrıdığını söyleyen bir hastanın baş ağrısının derecesini (0.8,0.9,0.9,1.0) trapezoidal bulanık sayısı yardımıyla ile karakterize edebilir. Üstelik bir trapezoidal bulanık sayının üyelik fonksiyonu, niteliksel değişkenlerin nümerik değişkenlere dönüşümü yöntemi yardımıyla belirsiz bilgiyi ifade edebilir. Bu nedenle, tıp tanısında mevcut olan niteliksel değerlendirmedeki belirsizliği ortaya koymak için, genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeleri tıp tanısına uygulayacağız.

Varsayalım D={d_1, d_2, d_3....,d_k} k tane hastalıkların kümesi, S={s_1, s_2, s_3....,s_n} n tane belirtilerin kümesi ve P={p_1, p_2, p_3....,p_m} m tane hastanın oluşturduğu kümeler olsun.

İlk olarak S üzerinde $\tilde{F}\colon \mathrm{P} \to \mathrm{TB}(\mathrm{S})$ dönüşümü ile resmedilen $(\tilde{F}, \mathrm{P})$ trapezoidal bulanık esnek kümesini inşa edelim. Bu $(\tilde{F}, \mathrm{P})$ trapezoidal bulanık esnek kümesi bize hasta-belirti matrisi olan Q ilişki matrisini verir. Matristeki trapezoidal bulanık sayılar

$$\tilde{a}_{i,j} = \{a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3, a_{ij}^4\}, 1 \le i \le m \text{ ve } 1 \le j \le n$$

şeklinde ifade edilir ve Q matrisinde aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} s_1 & \quad & s_2 \end{array} \\ Q = & \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & ⁝⁝⁝ & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

İkinci olarak D üzerinde $\tilde{G}_{\tilde{g}}\colon \mathrm{S} \to \mathrm{TB}(\mathrm{D}) \times \tilde{I}$ dönüşümü ile resmedilen $(\tilde{G}_{\tilde{g}}, \mathrm{S})$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesini inşa edelim. Bu genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme bize belirti-hastalık matrisi olan R ilişki matrisini verir. Matristeki trapezoidal bulanık sayılar

$$\tilde{b}_{i,j} = \{b_{ij}^1, b_{ij}^2, b_{ij}^3, b_{ij}^4\}, 1 \le i \le n \text{ ve } 1 \le l \le k+1$$

şeklinde ifade edilir ve R matrisinde aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} d_1 & d_2 & & d_k & \tilde{g} \end{array} \\ R = & \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \cdots\cdots & \tilde{b}_{1k+1} & \tilde{b}_{1k+1} \\ \vdots & & ⁝⁝⁝ & & \vdots \\ \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2} & \cdots\cdots & \tilde{b}_{nk} & \tilde{b}_{nk+1} \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriste son satıra kadar olan kısım i. Satır vektörü $\tilde{G}_{\tilde{g}}(s_i)$ 'yi, i. sütun vektörü d_i'yi ve son sütunda S üzerinde bir trapezoidal bulanık küme olan $\tilde{g}$'yı temsil eder.

Üçüncü olarak Q ve R matrislerini çarptığımızda hasta-teşhis matrisi olan D ilişki matrisini elde ederiz. Bu matriste aşağıdaki gibidir.

$$D=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & \quad\quad d_k & \tilde{g} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} \ldots\ldots & \tilde{c}_{1k+1} & \tilde{c}_{1k+1} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & & \vdots \\ \tilde{c}_{m1} & \tilde{c}_{m2} \ldots\ldots & \tilde{c}_{mk} & \tilde{c}_{mk+1} \end{bmatrix} \end{array}$$

Bu matrisin her bir elemanı

$$\tilde{c}_{il}=\left\{\sum_{j=1,}^{n} a_{ij}^{1} b_{ij}^{1}, \sum_{j=1,}^{n} a_{ij}^{2} b_{ij}^{2}, \sum_{j=1,}^{n} a_{ij}^{3} b_{ij}^{3}, \sum_{j=1,}^{n} a_{ij}^{4} b_{ij}^{4}\right\},$$
$$1 \le i \le m, 1 \le l \le k+1$$

şeklindedir. Dördüncü olarak durulaştırma işlemi ile bulanık teşhis matrisini elde ederiz. Bu matrisin genel formu aşağıdaki gibidir.

$$D^{*}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & \quad\quad d_k & \tilde{g} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} \ldots\ldots & \tilde{v}_{1k+1} & \tilde{v}_{1k+1} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & & \vdots \\ \tilde{v}_{m1} & \tilde{v}_{m2} \ldots\ldots & \tilde{v}_{mk} & \tilde{v}_{mk+1} \end{bmatrix} \end{array}$$

Elde edilen sonuçla $v_{il} \ge v_{ik+1}, 1 \le i \le m, 1 \le l \le k$ oluyor ise p_i hastası d_i hastalığına yakalanmıştır denir.

Algoritma:

ι) $(\tilde{F}, \mathrm{P})$ trapezoidal bulanık esnek kümesi hasta-belirti matrisi olan Q matrisine aktarılır.

ιι) $(\tilde{G}_{\tilde{g}}, \mathrm{S})$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesi belirti-hastalık matrisi olan R matrisine aktarılır.

ιιι) Hasta-teşhis matrisi olan D matrisi $\mathrm{Q} \otimes \mathrm{R}$ işlemi ile bulunur.

ιϖ) Durulaştırma işlemi ile D^{*} matrisi elde edilir.

ϖ) En yüksek skora bakılarak sonuç yorumlanır.

Örnek Çalışma

Konunun daha iyi anlaşılması amacıyla nümerik bir örnek verelim.

P={p_1, p_2, p_3} hastaların kümesi,

S={s_1, s_2, s_3, s_4} belirtiler kümesi {ateş, baş ağrısı, öksürük, karın ağrısı}

D={d_1, d_2, d_3} hastalıklar kümesi {yüksek ateş, tifo, sıtma} şeklinde olsun.

Doktor üç hasta ile konuştuktan sonra çizelge 6'yı hazırlıyor.

Öncelikle Şekil 2 de verilen dilsel değişkenlerle nümerik değişkenler arasındaki dönüşüm kuralı yardımıyla S evreni üzerinde $(\tilde{F}, \mathrm{P})$ trapezoidal bulanık esnek kümesini oluştururuz. Bu trapezoidal bulanık esnek küme hasta belirti matrisi olarak adlandırılan Q matrisine aşağıdaki gibi aktarılır.

$$\mathrm{Q}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (0.4,0.5,0.5,0.6) & (0.5,0.6,0.7,0.8) & (0.5,0.6,0.7,0.8) & (0.8,0.9,0.9,1.0) \\ (0.4,0.5,0.5,0.6) & (0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.5,0.6,0.7,0.8) & (0.1,0.2,0.2,0.3) \\ (0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.1,0.2,0.2,0.3) & (0.4,0.5,0.5,0.6) & (0.8,0.9,0.9,1.0) \end{bmatrix} \end{array}$$

Şimdi $\tilde{G}_{\tilde{g}}: \mathrm{S} \to \mathrm{TB}(\mathrm{D}) \times \tilde{I}$ dönüşümü ile resmedilen $(\tilde{G}_{\tilde{g}}, \mathrm{S})$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesini inşa edelim. Burada $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesi dört belirtinin ve üç hastalığın yaklaşık ifadesini verir. Bu küme aşağıdaki gibi R ilişki matrisine aktarılır.

$$\mathrm{R}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (0.8,0.9,0.9,1.0) & (0.5,0.6,0.7,0.8) & (0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.5,0.6,0.7,0.8) \\ (0.2,0.3,0.4,0.5) & (0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.4,0.5,0.5,0.6) \\ (0.4,0.5,0.5,0.6) & (0.2,0.3,0.4,0.5) & (0.0,0.1,0.1,0.2) & (0.2,0.3,0.4,1.5) \end{bmatrix} \end{array}$$

Daha sonra Q ve R matrisleri çarpılırsa aşağıdaki hasta – teşhis matrisi olan D matrisi elde edilir.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & \tilde{g} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (0.62,1.02,1.17,1.68) & (1.21,1.68,1.91,2.50) & (1.03,1.48,1.66,2.22) & (1.06,1.50,1.70,2.26) \\ (0.66,1.01,1.14,1.59) & (0.86,1.28,1.43,1.96) & (0.82,1.22,1.25,1.75) & (0.65,1.04,1.19,1.69) \\ (0.74,1.12,1.14,1.61) & (1.06,1.51,1.64,2.19) & (0.96,1.39,1.48,2.00) & (1.03,1.45,1.58,2.10) \end{bmatrix} \end{array}$$

Buradan da durulaştırma işlemi ile aşağıdaki matris elde edilir.

Çizelge 6. Derecelendirme çizelgesi.

U	s_1 (ateş)	s_2 (baş ağrısı)	s_3 (öksürük)	s_4 (karın ağrısı)
p_1	uygun	orta derece iyi	orta derece iyi	çok iyi
p_2	uygun	iyi	orta derece iyi	kötü
p_3	iyi	kötü	uygun	çok iyi

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & \tilde{g} \end{array} \\ \mathrm{D}^* = & \begin{bmatrix} 1.12 & 1.83 & 1.60 & 1.63 \\ 1.10 & 1.38 & 1.26 & 1.14 \\ 1.15 & 1.60 & 1.46 & 1.54 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elde edilen sonuca göre p_1 ve p_3 hastaları d_2 hastalığına (tifoya), p_2 hastası ise d_2 (tifo) ve d_3 (sıtma) hastalıklarına yakalanmıştır.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada Xiao vd. tarafından tanımlanan trapezoidal bulanık esnek küme kavramını (Xiao vd. 2012) genelleştirilerek, genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme kavramını verdik. Çalışmada ele alınan karar verme problemlerinde de, bu genelleştirmenin niteliksel değerlendirmedeki belirsizliği daha anlaşılır kıldığını gördük. Ayrıca genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeler üzerinde bir takım yeni işlemler tanımlayarak onlara ait özellikleri inceledik. Üstelik genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümelerin karar verme problemlerinde ve özellikle de tıp tanısında sağladığı katkıyı örnek bir çalışma üzerinde değerlendirdik.

6. Kaynaklar

Aygünoğlu, A., Aygün, H. 2009. Introduction to fuzzy soft groups. *Comput. Math. Appl.,* 58: 1279-1286.

Chetia, B, Das, PK. 2010. An application of interval valued fuzzy soft set in medical diagnosis. *Int. J. Contemp. Math. Sci.,* 5(38): 1887-1894.

Çağman, N., Enginoğlu, S., Çıtak, F. 2011. Fuzzy soft set theory and its applications. *Iranian J. Fuzzy Syst.,* 8(3): 137-147.

Çelik, Y., Ekiz, C., Yamak, S. 2011. A new view on soft rings. *Hacet. J. Math. Stat.,* 40(2): 273-286.

Çelik, Y., Yamak, S. 2013. Fuzzy soft set theory applied to medical diagnosis using fuzzy arithmetic operations. *J. of Ineq. Appl.,* 1(82): 1-9.

Çelik Y., Ekiz C., Yamak, S. 2013. Applications of fuzzy soft sets in ring theory. *Ann. Fuzzy Math. Inf.,* 5(3): 451-462.

De, SK., Biswas, R., Roy, AR. 2001. An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis. *Fuzzy Set. Syst.,* 117(2): 209-213.

Feng, F., Jun, YB., Liu X., Li, L. 2010. An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making. *J. Comput. Appl. Math.,* 234: 10-20.

Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Liu, H., Tang, J. 2010. Interval valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties. *Comput. Math. Appl.,* 60: 906-918.

Jin-liang, L., Rui-xia, Y., Bing-xue, Y. 2008. Fuzzy Soft Sets and Fuzzy Soft Groups. Chinese Control and Decision Conference, China, 2626-2629.

Jun Y.B., Lee, KJ., Park, CH. 2010. Fuzzy soft set theory applied to BCK/BCI-algebras. *Comput. Math. Appl.,* 59: 3180-3192.

Kaufmann, A., Gupta, MM. 1991. Introduction to Fuzzy Arithmetic:Theory and Applications. Van Nostrand Reinhold, New York, USA.

Kong, Z., Gao, L., Wang, L. 2009. Comment on "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems". *J. Comput. Appl. Math.,* 223: 540-542.

Maji, PK., Biswas, R., Roy, AR. 2001. Fuzzy soft sets. *J. Fuzzy Math.,* 9(3): 589-602.

Maji, PK., Roy, AR., Biswas R. 2004. On Intuitionistic Fuzzy soft sets. *J. Fuzzy Math.,* 12(3): 669-683.

Majumdar, P., Samanta, S.K. 2010. Generalised fuzzy soft sets. *Comput. Math. Appl.*, 59: 1425-1432.

Molodtsov, D. 1999. Soft set theory-first results. *Comput. Math. Appl.,* 37(1): 19-31.

Roy, A.R., Maji, PK. 2007. A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems. *J. Comput. Appl. Math.,* 20(1): 412-418.

Saikia, BK., Das, PK., Borkakati, AK. 2003. An Application of Intuitionistic fuzzy soft sets in medical diagnosis. *Bio Sci. Res. Bullet.,* 19(2): 121-127.

Sanchez, E. 1976. Resolution of composite fuzzy relation equations, *Inf. Cont.* 30: 38 – 48.

Xiao, Z., Gong, K., Zou, Y. 2009. A combined forecasting approach based on fuzzy soft sets. *Comput. Math. Appl.,* 228: 326-333.

Xiao, Z., Xia, S., Gong, K., Li, D. 2012. The trapezoidal fuzzy soft set and its application in MCDM. *Appl. Math. Modell.,* 36(12): 5844–5855.

Yang, X., Lin, TY., Yang, J., Li, Y., Yu, D. 2009. Combination of interval-valued fuzzy set and soft set. *Comput. Math. Appl.,* 58: 521-527.

Yang, CF. 2011. Fuzzy soft semigroups and fuzzy soft ideals. *Comput. Math. Appl.,* 61: 255–261.

Yin, Y., Li, H., Jun, YB. 2012. On algebraic structure of intuitionistic fuzzy soft sets, *Comput. Math. Appl.,* 64: 2896-2911.

Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy Sets. *Inf. Cont.*, 8: 338–353.