Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi
Dergi web sayfası: http://fbd.beun.edu.tr
DOI: 10.7212/zkufbd.v6i1.197

Derleme

Ters ve Kötü Konulmuş Problemler Teorisinin Bilim ve Teknolojideki Bazı Uygulamaları

Some Applications of the Theory of Inverse and Ill-Posed Problems in Science and Technology

İsmet Gölgeleyen, Özlem Kaytmaz

Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Zonguldak, Türkiye

Öz

Son yıllarda özellikle uzaktan algılama ve tahribatsız değerlendirme yöntemlerindeki gelişmelere paralel olarak büyük önem kazanan ters ve kötü konulmuş problemler teorisi başta tıp ve endüstri olmak üzere birçok alanda çeşitli problemin çözümü için yeni bir matematiksel bakış açısı oluşturmuştur. Bu çalışmada diferensiyel denklemler için ters ve kötü konulmuş problem kavramları ele alınmış, bilim ve teknolojideki çeşitli uygulamalarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Endüstriyel matematik, Ters ve kötü konulmuş problem, Uzaktan algılama ve tahribatsız değerlendirme

Abstract

The theory of inverse and ill-posed problems has gained a considerable importance especially in parallel with the recent advances in the fields of remote sensing and nondestructive evaluation. It has become a new mathematical perspective for the solution of many problems in various areas, particularly in medicine and industry. In this article, the concepts of inverse and ill-posed problems for differential equations are discussed and a variety of their applications in science and technology is presented.

Keywords: Industrial mathematics, Inverse and ill-posed problem, Remote sensing and nondestructive evaluation

1. Giriş

Ters problemler teorisi, 20. yüzyılın ortalarından başlayarak her geçen gün bilim ve teknolojide daha popüler hale gelmiştir. Bu tür problemlerin; fizik, jeofizik, tıp ve astronomi gibi matematiğin kullanıldığı pek çok sahada önemli uygulamaları vardır. Zira bu problemlerin çözümleri, incelenen ortama ait yoğunluk, dalga yayılım hızı, elastisite parametreleri, iletkenlik, elektriksel ve manyetik geçirgenlik gibi önemli fiziksel özellikler hakkında bilgi vermektedir.

Direkt problem; var olan bir sebepten ortaya çıkabilecek sonuçların bulunması problemi iken ters problem mevcut sonuçlardan sebebin belirlenmesi problemi olarak ifade edilebilir. Örneğin, grip olan bir hastada ortaya çıkabilecek belirtilerin neler olduğunun saptanması bir direkt problemdir, diğer taraftan yüksek ateş, burun akıntısı ve halsizlik şikayetleri olan bir kişinin hastalığının teşhisi ise bir ters problemdir. Bu belirtiler farklı sağlık sorunlarından kaynaklanabileceğinden böyle bir problemin çözümünün tek olmadığı açıktır. Matematiksel fizikte direkt problem; denklem, bölge ve koşullar verildiğinde denklemi ve koşulları sağlayan çözümün bulunması problemi olarak tanımlanır. Burada amaç, belli bir anda bölgenin belli bir noktasındaki fiziksel alanı veya süreci tanımlayan (elektromanyetik, akustik, sismik vb.) bir fonksiyonun bulunmasıdır. Ayrıca bu problemlerde ortamın özelliklerinin, fiziksel sürecin başlangıç anındaki durumunun ve/veya sınırda sağlanan özelliklerin bilindiği kabul edilir. Diğer yandan sıklıkla ortamın özelliklerinin bilinmediği durumlarla da karşılaşılmaktadır. Bu da direkt problemin çözümü hakkında verilen ek bilgi yardımıyla ilgili denklemin katsayılarının belirlenmesi ters problemi olarak karşımıza çıkmaktadır, (Amirov 2001).

2. Ters Problemler Teorisinin Bazı Uygulama Alanları

Bilim ve teknolojinin farklı alanlarında ortaya çıkan çeşitli ters problemlere örnekler aşağıda sunulmuştur.

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: ismet.golgeleyen@beun.edu.tr

Geliş tarihi / Received : 01.02.2016
Kabul tarihi / Accepted : 24.02.2016

2.1. Endüstrideki Ters Problemler

Bilindiği gibi nükleer güç santralleri diğer enerji kaynaklarına göre nispeten daha ucuz, daha verimli ve karbon-nötr bir enerji üretimi sağlamaktadır. Bununla birlikte bu tesislerde büyük facialara yol açabilecek kazaların yaşanması ihtimali az da olsa her zaman vardır. Uluslararası Atom Enerjisi Kurumu büyük nükleer kazaları, planlı ve uzun süreli önlemlerin uygulanmasını gerektiren, geniş alana yayılmış sağlık ve çevresel etkileri olan, önemli miktarda radyoaktif madde salınımının söz konusu olduğu durumlar olarak tanımlamaktadır.

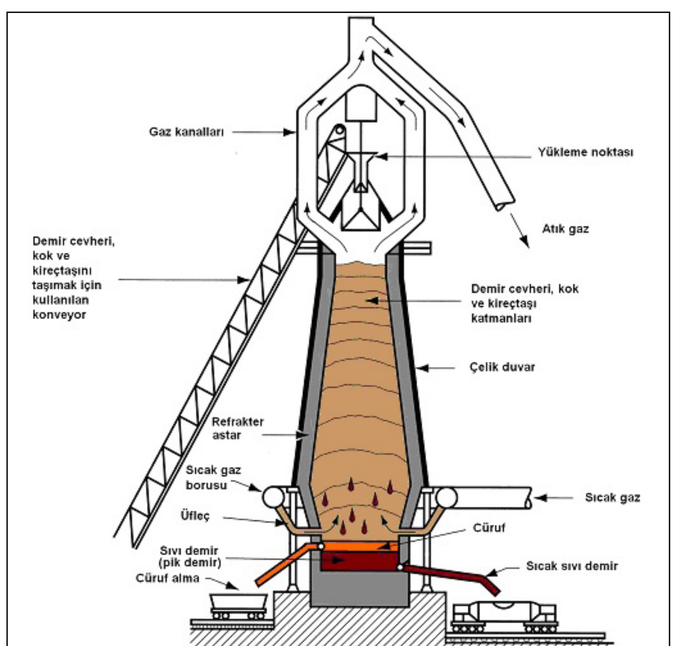
Atmosferde taşınarak daha geniş bölgelere yayılan, büyük ölçekli ve uzun süreli çevre kirliliğine yol açan radyoaktif maddeler ayrıca kansere, bilişsel gelişim geriliğine ve kalp hastalıklarına neden olmaktadır. Bu yüzden toprak, su ve atmosferdeki radyoaktif kirliliğin izlenmesi bir zorunluluk olarak ortaya çıkmaktadır. Diğer taraftan, cihazların yüksek maliyeti nedeni ile kirlilik ölçümü maalesef sadece sınırlı sayıda noktada hassas bir şekilde yapılabilmektedir. Bu durum atmosferik dağılım için bir sayısal simülasyonun geliştirilmesi ihtiyacını ortaya çıkarmaktadır. Fakat doğru konsantrasyon ve birikim değerlerinin elde edilebilmesi, kaynak hakkında bilgi sahibi olunmasına, yani hangi zamanda ne kadar radyoaktif maddenin salındığının bilinmesine bağlıdır. Kirlilik oranının tespiti ve risk azaltıcı önlemlerin alınabilmesi için bu verilerin doğru bir şekilde değerlendirilmesi son derece önemlidir. Ancak bu bilgiler genellikle halka açık değildir ya da bilinmemektedir. Örneğin, 2011 yılında meydana gelen Fukushima nükleer kazasında kamuoyu ile paylaşılan verilerin doğruluğuna ilişkin çeşitli iddialar ortaya atılmıştır. İşte bu noktada ters problemler teorisi, kaynak fonksiyonunun belirlenmesi için alternatif bir çözüm yolu olarak ortaya çıkmaktadır. Başka bir deyişle, ölçüm noktalarından toplanan veriler ve oluşturulan matematiksel model kullanılarak radyoaktif madde salınımının zamansal değişiminin belirlenmesi ters probleminin çözümü, yukarıdaki sorunun cevabı olarak karşımıza çıkmaktadır, (Martinez-Camara et al. 2013).

Ters problemler teorisi, demir-çelik endüstrisinde de önemli uygulama alanlarına sahiptir. Demir-çelik üretim sürecinde entegre tesislerin ana ünitesi olan yüksek fırınlarda, demir cevherinin içeriğinde bulunan demir oksit kok kömürü ile indirgenerek sıcak maden ya da sıvı ham demire dönüştürülür. Sıvı ham demir içinde yüksek oranda bulunan; karbon, silisyum, fosfor, kükürt gibi elementler istenilen ölçüde arıtılarak ve gerekli alaşım maddeleri ilave edilerek çelik üretimi gerçekleştirilir, (Tatlıdil ve Sayın 2011).

Yüksek fırının içindeki sıcaklık dağılımı, homojen olmamakla birlikte yaklaşık 1500 °C'dir. Büyük boyutta bir fırın yaklaşık 100 m yüksekliğinde olup günlük 1200 ton civarında üretim yapmaktadır. Yüksek fırınların boyutu, yapısı ve içerideki yüksek sıcaklık nedeniyle ısı akışının direkt olarak gözlemlenmesi mümkün değildir. Dolayısıyla fırının tabanına yakın dış bölgeye yerleştirilmiş ısıl çift adı verilen aygıtlar kullanılarak elde edilen sıcaklık verilerinden fırındaki ısı akışının davranışının belirlenmesi problemi karşımıza çıkar. Bu ters problemin çözümü, üretim tesisinde ortaya çıkabilecek sorunların önceden tespiti için hayati önem taşır.

Fırında, yüksek sıcaklık altında çok fazlı oldukça karmaşık bir süreç gerçekleştiğinden bu durumun matematiksel

Şekil 1. Fukushima nükleer santrali, (www.japantimes.com).



Şekil 2. Yüksek fırının yapısı, (Demir 2013).

modelinin oluşturulması oldukça zordur. Ancak burada amaç yüksek fırının güvenlik kontrolünü sağlamak için bir indeks elde etmek olduğundan ısıl çiftlerden elde edilen verilerin değerlendirilebileceği bir minimal model oluşturulmalıdır. Bunun için en uygun model bir boyutlu ısı denklemidir:

$$u_t(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t), 0 < x < l, 0 < t < T.$$

Burada $\alpha>0$ ısı iletim katsayısı, $0<x<l$ fırının tabanını oluşturan tuğlaların derinlik değişkeni olup $x = l$ ve $x = 0$ sırasıyla tuğlanın alt ucuna ve erimiş demir ile temas ettiği noktaya karşılık gelmektedir. Diğer yandan problemin çözümü için mevcut olan veriler

$u(l,t) = h(t), 0<t<T,$

$u_x(l,t) = g(t), 0<t<T$

şeklinde alınabilir. Böylece ilgili ters problem $g(t)$, $h(t)$ $(0<t<T)$ verilerinden

$f(t)=-u_x(0,t), 0<t<T$

fonksiyonunun belirlenmesi problemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Burada $u(x,0)$, $0<x<l$ başlangıç değerinin de bilinmediğine dikkat edilmelidir, (Yamamoto 2013).

Ters problemlerde bazen kullanılabilecek verilerin miktarı oldukça azdır. Uzak bir gök cisminin veya uzak bir galaksinin görüntüsünün belirlenmesi veya deprem verilerinden çok derindeki bir jeofizik yapının tespiti böyle problemlere örnek olarak verilebilir. Bazı durumlarda ise, ilgi duyulan nesneye farklı sinyaller gönderilerek, bu sinyallerin seçimine bağlı olarak farklı ölçüm sonuçları elde edilir. Örneğin; tıbbi görüntülemede, insan vücuduna ultrason veya X ışını sinyalleri gönderilerek vücudun içinden geçen veya yansıyan sinyallere göre elde edilen ölçüm sonuçları değerlendirilir, (Gölgeleyen 2013).

2.2. Tıpta Ters Problemler

Günümüzde göğüs kanseri insan sağlığını tehdit eden büyük sorunlardan biridir. Her ne kadar bu kanser türünün özel sebepleri bilinmese de erken teşhis ve tümörün karakterinin belirlenmesi tedavinin başarısında kilit bir rol oynamaktadır. Matematiksel olarak, kanser hücresi sağlıklı göğüs dokusunda ortaya çıkan homojenliğin bozulduğu bir nokta veya bölge olarak görülebilir. Burada problem, yüzeyden yansıyan akustik dalgalardan elde edilen veriler yardımıyla homojenliğin bozulduğu bölgenin diğer bir deyişle kanser hücresinin yerini tespit etmektir.

İnsan vücudunu bir hacimsel iletken ve kalbimizi de bir biyoelektrik hacimsel kaynak olarak düşündüğümüzde, günlük klinik tanılarda kardiyologların tıbbi cihazlarla elde edilen biyoelektrik sinyalleri kullanarak, kaynağın yapısının belirlenmesi ters problemini çözmeye çalıştıklarını görürüz (Şekil 4), (Malmivuo and Plonsey 1995).

Ters problemlerin karakteristik özelliklerinden biri onların genellikle kötü konulmuş problemler olmasıdır.

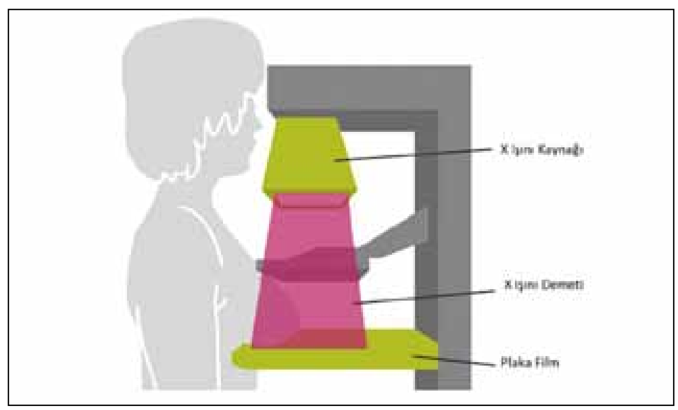
3. Ters ve Kötü Konulmuş Problemler

İyi ve kötü konulmuş problem kavramları 1902 yılında Fransız matematikçi J. S. Hadamard tarafından verilmiştir.

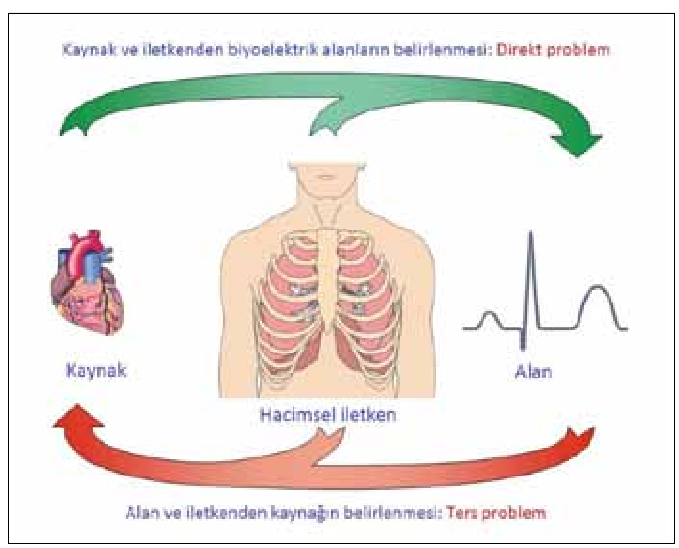
U ve F metrik uzaylar, A: $U \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere

$$Au = f \tag{1}$$

denklemini göz önüne alalım. (1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir:



Şekil 3. Mamografi, (www.medicalradiation.com).



Şekil 4. Kardiyolojide direkt ve ters problem, (Malmivuo ve Plonsey 1995).

i. Her $f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır.

ii. Problemin çözümü U uzayında tektir.

iii. Problemin koşulları F uzayında az değiştiğinde problemin çözümü de U uzayında az değişir (kararlılık koşulu) (Lavrent'ev et al. 1986). Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Bir (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme, (U_2, F_2) uzay çifti için zayıf kötü konulmuş problem denir. Tüm uzay çiftlerinde kötü konulmuş probleme kuvvetli kötü konulmuş problem denir.

Hadamard'ın kendisinin örnek olarak gösterdiği kötü konulmuş problem Laplace denklemi için Cauchy problemidir.

Örnek 1. Laplace denklemi için Cauchy problemi kuvvetli kötü konulmuş problemdir.

İspat: $D=\{(x,y)\mid 0<x<\pi, 0<y<1\}$ bölgesinde verilen

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{2}$$

denkleminin

$$u(x,0)=0, u_y(x,0)=e^{-\sqrt{n}}\sin nx \tag{3}$$

şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Çözümü

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(y)\sin kx$$

formunda arayalım. Son ifade denklemde yerine yazılırsa

$$u_{xx}+u_{yy}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-k^2u_k(y)+u_{kyy}(y)\right)\sin kx=0$$

bulunur. (3) koşullarından,

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(0)\sin kx=e^{-\sqrt{n}}\sin nx,$$
$$u_y(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{ky}(0)\sin kx=0$$

ve sin kx' ler lineer bağımsız olduğundan

$$-k^2u_k(y)+u_{kyy}(y)=0, \tag{4}$$
$$u_k(0)=\delta_{n,k}e^{-\sqrt{n}},$$
$$u_{ky}(0)=0$$

elde edilir. Böylece (4) adi diferansiyel denklemi için bir Cauchy problemi ortaya çıkar. Söz konusu problemin çözümü

$$u(x,y)=\frac{1}{n}e^{-\sqrt{n}}\sin nx\, shny \tag{5}$$

şeklinde olup $n\to\infty$ için verilen koşul, tüm normları sonlu sayıda türevlerden oluşan uzayda sıfıra yaklaşırken (5) çözümü $y\neq 0$ için böyle uzaylarda $+\infty$'a yaklaşır. Dolayısıyla (iii) kararlılık şartı bozulduğundan problem Hadamard anlamında kötü konulmuştur.

Örnek 2. $\Omega=\{(x,t)\mid x\in D\subseteq\mathbb{R}^n, 0<t<T\}$ bölgesinde verilen,

$$Lu\equiv u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)u_{x_i}+b(x)u_t$$
$$+a_0(x)u=f(x,t) \tag{6}$$

formunda bir hiperbolik tip denklemin

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x) \tag{7}$$

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemini göz önüne alalım. (6)-(7) hiperbolik denklem için bir Cauchy problemi olup $D=\mathbb{R}^n$ iken $(C^2(\Omega),C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur. Ancak D bölgesi $\mathbb{R}^n$ ile çakışmıyor ise çözüm birden fazla olabileceğinden bu problem verilen uzay çiftinde kötü konulmuştur. Bu durumda (6)-(7) probleminin çözümünün tekliğini garanti etmek için Ω bölgesinin sınırının

$$\Gamma=\partial D\times(0,T)=\{(x,t)\mid x\in\partial D, 0<t<T\}$$

kısmında bir ek koşul verilmesi gerekir. Örnek olarak

$$u|_{\Gamma}=u_2(x,t) \tag{8}$$

koşulu verilebilir. Bu durumda (6)-(8) problemine 1. karışık problem denir. Bu problem $(C^2(\Omega),C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur.

(8) koşulu yerine,

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=u_3(x,t) \tag{9}$$

alınırsa (6), (7), (9) problemi 2. karışık problem olarak adlandırılır. Burada n, ∂D nin dış normalidir. Ele alınan problem $(C^2(\Omega),C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur. Eğer (6)-(7) problemine ek olarak

$$\alpha(x,t)u(x,t)+\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=u_4(x,t) \tag{10}$$

koşulu verilirse (6), (7), (10) problemine 3. karışık problem denir. Bu problem de $(C^2(\Omega),C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur. Burada $\alpha(x,t)$ ve $\beta(x,t)$ verilen keyfi fonksiyonlar olup $\alpha^2(x,t)+\beta^2(x,t)\neq 0$ dır, (Mikhailov 1978).

Örnek 3. (6) denklemi yerine

$$Lu\equiv u_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)u_{x_i}$$
$$+a_0(x)u=f(x,t) \tag{11}$$

formunda bir parabolik denklem, (7) şartı yerine de

$$u(x,0)=u_0(x)$$

koşulu alınırsa (11) denklemi için Cauchy problemi, 1., 2. ve 3. karışık problemleri $(C^2(\Omega), C(\Omega))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuş olur.

Örnek 4. Bir D bölgesinde,

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u = f(x) \qquad (12)$$

denkleminin

$$u\,|_{\partial D} = u_0(x) \qquad (13)$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine Dirichlet problemi (1. sınır değer), (13) şartına da Dirichlet şartı denir.

Eliptik denklem için Dirichlet problemi (C^2(D), C(D)) uzay çiftinde iyi konulmuş, hiperbolik ve parabolik denklemler için ise kötü konulmuştur.

Eğer (13) yerine,

$$\frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\partial D} = u_1(x) \qquad (14)$$

şartı alınırsa (12) denkleminin (14) şartını sağlayan çözümün bulunması problemine Neumann problemi (2. sınır değer), (14) şartına da Neumann şartı denir. Burada $n, \partial D$'nin dış normalidir.

Eliptik tip denklem için Neumann problemi (C^2 (D), C(D)) uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur, hiperbolik ve parabolik tip denklemler için ise kötü konulmuştur.

(12) denkleminin

$$\alpha(x)\, u(x) + \beta(x) \frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\partial D} = u_2(x) \qquad (15)$$

şartını sağlayan çözümünün bulunması problemine Roben problemi (3. sınır değer), (15) şartına da Roben şartı denir. Burada $\alpha(x)$ve $\beta(x)$sürekli fonksiyonlar olup $\alpha^2(x) + \beta^2(x) \neq 0$ dır.

Eliptik tip denklem için Roben problemi (C^2 (D), C (D)) uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuş, hiperbolik ve parabolik denklemler için ise kötü konulmuştur.

Hadamard'a göre kötü konulmuş problemler, reel fiziksel anlamı olan pratik olayları tanımlamaz. Çünkü pratikte koşullar her zaman belirli bir hata payı ile verilir. Bu hatalı koşullar kullanılarak bulunan çözüm, kesin çözümden çok farklı olabilir ve bu da pratikte yanlış sonuçların elde edilmesine sebep olur. Bu nedenle başlangıçta birçok matematikçi sadece Hadamard anlamında iyi konulmuş problemlerle ilgilenmiştir. Daha sonraları ise bilim ve teknolojide ortaya çıkan birçok problemin kötü konulmuş problem olduğunun görülmesi matematikçilerin dikkatini çekmiştir. Hatta Hadamard'ın kendisinin örnek olarak gösterdiği Laplace denklemi için Cauchy problemi de elektromanyetik alanların bulunması probleminde karşımıza çıkmaktadır.

1943 yılında Rus Matematikçi A. N. Tikhonov, kötü konulmuş problemlerin pratikteki önemine işaret ederek bu problemlerin kararlı çözümlerinin bulunabileceği ihtimali üzerinde durmuştur. Tikhonov'un yaklaşımı, çözüm uzayının sınırlandırılması fikrine dayanmaktadır. Buna göre aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa problem, Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem olarak adlandırılır:

i. U bir metrik uzay olmak üzere, problemin çözümü var ve belirli bir $M \subset U$ cümlesine aittir.

ii. Problemin çözümü M de tektir.

iii. Problemin çözümü M de koşullara sürekli bağımlıdır, yani çözümü M cümlesinin dışına çıkarmayan koşullar F metrik uzayında sonsuz küçük bir değişikliğe uğradıklarında problemin çözümü de U metrik uzayında sonsuz küçük değişir. M cümlesine problemin doğruluk cümlesi denir.

Günlük yaşantımızda sürekli olarak ters ve kötü konulmuş problemlerle karşılaşırız. Zihinsel ve fiziksel olarak sağlıklı olduğumuz durumlarda bu tür problemler daha hızlı ve etkili bir şekilde çözülebilir. Örneğin, görsel algımızı ele alalım. Gözlerimizin belli bir anda çevremizdeki sonlu sayıda noktadan görsel bilgi alabildiği bilinmektedir. Peki neden etrafımızdaki her şeyi tam olarak görebildiğimiz hissine kapılıyoruz? Hiç şüphesiz bunun nedeni, kişisel bir bilgisayar gibi çalışarak belirli noktalardan alınan verileri interpolasyon ve kestirim yaparak görüntüyü tamamlayan beynimizdir. Bir ortamın gerçek görüntüsünün belli sayıdaki noktadan yeteri kadar düzgün bir şekilde oluşturulabilmesi için bu ortamın daha önceden görülmüş olması gerekir. Dolayısıyla bir nesnenin ve çevresinin görüntüsünün oluşturulması problemi kötü konulmuş bir problemdir. Çünkü çözüm tek değildir veya verilerdeki küçük değişiklikler, çözümde büyük değişikliklere sebep olabilir. Buna rağmen beynimiz oldukça hızlı bir şekilde bu problemi çözebilmektedir. Bunun nedeni, beynin önceki geniş tecrübelerini (ön bilgi-a priori information) kullanabilme yeteneğidir.

Son olarak, uzayda farklı açılardan aydınlatılabilen bir cismi ele alalım. Bu cismin şekli biliniyorken gölgesinin şeklinin bulunması problemi bir direkt problem olup iyi konulmuştur. Diğer taraftan cismin çeşitli düzlemler üzerindeki izdüşümlerinden (gölgesinden), cismin şeklinin belirlenmesi bir ters problemdir ve bu problem sadece konveks cisimler için iyi konulmuştur. Çünkü konveks olmayan bir bölge bu yolla belirlenemez. Böyle bir problem, ilk defa ayın üzerine düşen gölgesinden dünyanın şeklinin küresel olduğu sonucuna varan Aristo tarafından formülize edilmiş ve çözülmüştür. Açıktır ki sadece ay yüzeyi üzerindeki gölgesinin şeklinden yararlanarak dünyanın şeklinin belirlenmesi ters probleminin çözümü tek değildir, (Kabanikhin 2008).

Uygulamalı matematikte karşılaşılan çeşitli iyi ve kötü konulmuş problemlere örnekler Çizelge 1-2 de sunulmuştur.

4. Sonuç

Yukarıda verilen örneklerden ve Çizelge 1-2 den görüldüğü gibi ters ve kötü konulmuş problemler bilim ve teknolojinin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Hızlı bir şekilde gelişmeye devam eden ve hayatımızdaki önemi gün geçtikçe artan bu teorinin, insanlığı tehdit eden tsunami, deprem ve iklim değişikliği gibi katastrofik olayların modellenmesinde ve çözüm yollarının araştırılmasında etkin bir rol oynayacağı öngörülmektedir.

Çizelge 1. Bazı iyi ve kötü konulmuş problemler (I), (Kabanikhin 2008)

İyi Konulmuş Problemler	Kötü Konulmuş Problemler
Aritmetik	
Küçük bir A sayısı ile çarpım $Aq = f$	Küçük bir sayı ile bölme $q = A^{-1}f\ (A<<1)$
Cebir	
Bir matris ile çarpma işlemi $Aq = f$	$q = A^{-1}f$, A kötü şartlı, dejenere veya mxn tipinde matristir.
Analiz	
İntegral $f(x) = f(0) + \int_0^x q(\xi)\,d\xi$	Türev $q(x) = f'(x)$
Diferensiyel denklemler	
Sturm-Liouville problemi $u''(x) - q(x)u(x) = \lambda u(x)$, $u(0) - hu'(0) = 0$, $u(1) - Hu'(1) = 0$	Ters Sturm-Liouville problemi $\{\lambda_n, \lVert u_n \rVert\}$ yardımıyla $q(x)$ bulunur.
İntegral geometri	
$\int_{\Gamma(\xi,\eta)} q(x,y)\,ds$ integrallerini bulma.	$\int_{\Gamma(\xi,\eta)} q(x,y)\,ds = f(\xi,\eta)$'den q bulma.
İntegral denklemler	
2. tip Volterra ve Fredholm denklemleri $q(x) + \int_0^x K(x,\xi)q(\xi)\,d\xi = f(x)$ $q(x) + \int_a^b K(x,\xi)q(\xi)\,d\xi = f(x)$	1. tip Volterra ve Fredholm denklemleri $\int_0^x K(x,\xi)q(\xi)\,d\xi = f(x)$ $\int_a^b K(x,\xi)q(\xi)\,d\xi = f(x)$
***Aq = f* operatör denklemleri**	
$\exists m > 0 : \forall q \in Q\ m\langle q,q \rangle \leq \langle Aq,q \rangle$	$A : D(A) \subset Q \to R(A) \subset F$ A kompakt lineer operatör (singüler değerli)

Çizelge 2. Bazı iyi ve kötü konulmuş problemler (II), (Kabanikhin 2008).

İyi Konulmuş Problemler	Kötü Konulmuş Problemler
Eliptik denklemler	
$\Delta u = 0, x \in \Omega$ $u\|_\Gamma = g$ veya $\frac{\partial u}{\partial n}\|_\Gamma = f$, veya $(\alpha u + \beta)\frac{\partial u}{\partial n}\|_\Gamma = h$ Dirichlet veya Neumann problemi, Roben problemi (karışık)	$\Delta u = 0, x \in \Omega$ Cauchy problemi Başlangıç-sınır değer problemi ($\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$ alt sınırı için)
Parabolik denklemler	
$u_t = \Delta u, t > 0, x \in \Omega$ Cauchy problemi $u\|_{t=0} = f(x)$ Başlangıç-sınır değer problemi $u\|_{t=0} = 0$ $u\|_\Gamma = g(x,t)$	Ters zamanlı Cauchy problemi (Geri parabolik) $-u_t = \Delta u, t > 0, x \in \Omega$ $u\|_{t=0} = f$ Başlangıç-sınır değer problemi (Sınırın bir kısmındaki veriye göre) $\begin{cases} u_t = \Delta u, x \in \Omega \\ u\|_{\Gamma_1} = f_1, \frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{\Gamma_1} = f_2 \end{cases}$
Hiperbolik denklemler	
Cauchy problemi $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, t > 0 \\ u\|_{t=0} = \varphi(x), u_t\|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$ Başlangıç-sınır değer problemi $u\|_\Gamma = g$	Dirichlet ve Neumann problemleri Cauchy problemi (Veriler zaman tipi uzayda veriliyor) $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, x \in \Omega \\ u\|_{\Gamma_1} = f_1, \frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{\Gamma_1} = f_2 \end{cases}$
Direkt problemler	**Katsayı ters problemleri**
$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - q(x)u \\ u\|_{t=0} = \varphi(x), u_t\|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$ $\begin{cases} u_t = \Delta u - q(x)u \\ u\|_{t=0} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \nabla(q(x)\nabla u) = 0, x \in \Omega \\ u\|_\Gamma = g \text{ veya } \frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_\Gamma = f \end{cases}$	$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - q(x)u \\ u\|_{t=0} = \varphi(x), u_t\|_{t=0} = \psi(x) \\ u\|_\Gamma = f, \frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_\Gamma = g \end{cases}$ $\begin{cases} u_t = \Delta u - q(x)u \\ u\|_{t=0} = 0, u\|_\Gamma = f, \frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_\Gamma = g \end{cases}$ $\begin{cases} \nabla(q(x)\nabla u) = 0 \\ u\|_\Gamma = g \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_\Gamma = f \end{cases}$

5. Kaynaklar

Amirov, A. 2001. Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations, VSP, Utrecht The Netherlands, 201 pp.

Demir, A. 2013. Demir-Çelik Üretim Metalurjisi. dosya. sakarya. edu.tr/Dokumanlar/2013/110/292374119_demir_celik_metalurjisi.doc.

Gölgeleyen, İ. 2013. An inverse problem for a generalized transport equation in polar coordinates and numerical applications. *Inverse Problems*, 29(9):095006.

Kabanikhin, S. I. 2008. Definitions and Examples of Inverse and Ill-Posed Problems. *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 16: 317–357.

Lavrent'ev, M. M., Romanov V. G., Shishatskii, S. P. 1986. *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. American Mathematical Society, Providence RI.

Mikhailov, V. P. 1978. Partial Differential Equations, Mir Publishers, Moscow, 396 pp.

Malmivuo, J., Plonsey, R. 1995. Bioelectromagnetism: Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields, Oxford University Press, New York, 482 pp.

Martinez-Camara, M., Dokmanic, I., Ranieri, J., Scheibler, R., Vetterli, M.,Stohl, A. 2013. The Fukushima Inverse Problem, IEEE International Conference on, pp: 4330-4334.

Tatlıdil, F., Sayın, E. R. 2011. http://bakka.gov.tr/assets/Planlama1/Demir-Celik_Sektoru_Mevcut_Durum_Analizi.pdf. 201 s.

Yamamoto, M. 2013. Mathematics for Industry: Principle, Reality and Practice, from the Point of View of a Mathematician, What Mathematics Can Do for You, Springer, pp. 77-99.