Karaelmas Science and Engineering Journal
Journal home page: http://fbd.beun.edu.tr

Araştırma Makalesi

İntegral Geometri Problemleri ve Transport Denklemleri için Ters Problemler

Integral Geometry Problems and Inverse Problems for Transport Equations

İsmet Gölgeleyen

Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 67100, Zonguldak, Türkiye

Özet

Bu çalışmada, son zamanlarda özellikle X-ışını, MRI, ultrason, sismik tomografi ve elektron mikroskobu gibi görüntüleme tekniklerinde ortaya çıkan gelişmelere paralel olarak büyük ilgi gören integral geometri problemleri (IGP) ve bu problemlerle ilgili transport denklemler için bazı ters problemler ele alınmış, bu alanda yapılan başlıca çalışmalar kısaca sunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: İntegral geometri problemi, Ters problem, Transport denklem

Abstract

In this study, integral geometry problems (IGP) and some inverse problems for transport equations which are related with IGP are considered and some of the major works devoted to these problems are presented. In recent years, especially parallel to the developments in imaging techniques such as X-ray, MRI, ultrasound, seismic tomography, electron microscopy and others, such problems have been attracting a great interest.

Keywords: Integral geometry problem, Inverse problem, Transport equation

1. Giriş

Matematiksel fizikte; denklem, bölge ve koşullar verildiğinde problemin çözümünün bulunmasına direkt problem denir. Pratikte karşılaşılan öyle problemler vardır ki bunların çözümleri için ayrıca ek bilgi verilir. Aynı ek bilgiye göre problemdeki denklemin bir veya birkaç katsayısını veya sağ tarafını ya da sınır koşullarından bir veya birkaçını çözüm ile birlikte bulmak gerekir. Böyle problemlere ters problemler denir.

Doğrudan erişilemeyen bir çevre hakkında bilgi edinmek için, bu bölgelerden gelen akustik, sismik ve elektromanyetik işaretler özel algılayıcılar yardımı ile değerlendirilir. Bu işaretler üzerinde yapılan geliş zamanı, geliş doğrultusu, genlik, faz/frekans, polarizasyon vb. ölçümlerden elde edilen bilgilere göre çevrenin ilgi duyulan özelliklerinin araştırılması, bir ters problemin ortaya çıkmasına sebep olur. Bu nedenle ters problemler teorisi, uzaktan algılama ve tahribatsız değerlendirme dallarındaki çalışmaların teorik alt yapısını oluşturmuştur.

Tıpta görüntüleme ünitelerinde yaygın olarak kullanılan bilgisayarlı tomografi ve yeraltı kaynaklarının yerinin tespitinde, bazı özel yapı sağlamlığı testlerinde, hacimsel bir bölgedeki bir parametreye ait yoğunluğun tespitinde ve üç boyutlu görüntülemede kullanılan teknik tomografi, ters problemler teorisinin önemli uygulama alanlarıdır.

Diferensiyel denklemler için ters problemler teorisinin tarihsel gelişimi özetle aşağıda sunulmuştur.

İlk olarak 1905 yılında sismik veriler yardımı ile yer kabuğunun yapısını belirlemek amacıyla $|\overline{\nabla}\tau| = 1/v(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ diferensiyel denklemi için bir ters problem, Herglotz tarafından ve kısa bir süre sonra da 1907 de Wiechert tarafından formülize edilmiştir. v hızının sadece x_3 değişkenine bağlı olması şartı ve bazı ek kısıtlamalar altında, aranan $v(x_3)$ fonksiyonunun bilinen $\tau(x^1, x^2)$ fonksiyonundan tek türlü belirlendiği ispatlanmıştır. Burada x^1 ve x^2, $x^3 = 0$düzleminde yerleşen iki nokta olmak üzere $\tau(x^1, x^2)$, sismik sinyalin x^1 noktasından x^2 noktasına ulaşma zamanıdır.

1929 yılında Ambarzumian,

$$\lambda_n y = -y'' + q(x)y, \qquad y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

$$\lambda_n = n^2, \ (n = 1, 2, ...)$$

eşitlikleri ile tanımlanan diferensiyel operatörde bulunan $q(x) \in C_{[0,\pi]}$ fonksiyonunun belirlenmesi problemini ele alarak teklik teoremlerini vermiştir.

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: ismet.golgeleyen@karaelmas.edu.tr

İkinci mertebeden bir adi diferensiyel denklem için Sturm-Liouville ters probleminin çözümünün tekliğine ilişkin teoremler ilk defa 1950' de Marchenko tarafından ispatlandı. Tam çözümü ise 1951' de Gelfand ve Levitan tarafından araştırılmıştır.

Bilinen potansiyelden bir cismin şeklini ve yoğunluğunu belirleme ters probleminin çözümü için teklik teoremi ilk olarak 1938 de Novikov tarafından ispatlanmıştır.

Ters problemler, aranan fonksiyonun bağlı olduğu değişken sayısına göre bir boyutlu ve çok boyutlu olmak üzere iki gruba ayrılır. Schrödinger denklemi için çok boyutlu ters problemin çözümü için teklik teoremi parçalı analitik fonksiyonlar sınıfında ilk olarak 1958 de Berezanskii tarafından verilmiştir.

Diferensiyel denklemler için ters problemler teorisinin karakteristik özelliklerinden biri bu problemlerin Hadamard anlamında kötü konulmuş olmasıdır. Kötü konulmuş problemler teorisi ve uygulamaları Tikhonov, Ivanov, Lavrent'ev ve öğrencileri tarafından geliştirilmiştir. Ters problemler sıklıkla birinci cins operatör denklemine dönüşür. Örneğin; hiperbolik denklemler için bazı ters problemler birinci cins Volterra tipi integral denklemlerin araştırılmasına indirgenir.

Transport denklemler için ters problemler hem teorik hem de pratik açıdan büyük önem taşımaktadır. Bu problemler fiziksel olarak parçacık etkileşim kuvvetlerinin, saçılım göstergelerinin, radyasyon kaynaklarının ve diğer fiziksel parametrelerin bulunmasını içerir. Bu alanda önemli sonuçlar Amirov (1986, 2001), Anikonov (2001), Anikonov ve Amirov (1983), Lavrent'ev ve Anikonov (1967), Pestov ve Sharafutdinov (1988) tarafından elde edilmiştir.

Diğer taraftan, günümüzde her alanda karşılaşılan problemlerin karmaşıklığı, boyutlarının büyüklüğü, çözümlerinin kısa zamanda ve en ekonomik biçimde yapılmak istenmesi bilgisayarların gelişmesine paralel olarak sayısal çözüm yöntemlerinin de gelişmesine neden olmuştur. Hatta aynı türdeki problemler, hangi koşullarda ve hangi yöntemle çözülürse daha iyi yaklaşımla, daha etkin sonuçların alınabileceği inceleme konusu olmuştur. Matematikte ve diğer uygulamalı bilim dallarında sıkça karşılaşılan ancak analitik olarak çözümü elde edilemeyen veya çözümü zor olan birçok problem sayısal yöntemler ile çözülebilmektedir. Diferensiyel denklemler için ters problemlerin sayısal çözümü ile ilgili çalışmalar son zamanlarda hızlı bir artış eğilimi göstermektedir, (Golgeleyen 2010).

Dinamik ters problemler için sayısal yöntemlerin sistematik olarak çalışılması 1960'ların sonlarında başlamıştır. Gel'fand-Levitan veya ters saçılım yöntemi olarak bilinen çözüm yöntemi genellikle, elektrodinamik, elastisite teorisi ve iletim hattı teorisi gibi alanlarda ortaya çıkan ters problemler için uygulanmaktadır. Bu yaklaşımın esası lineer olmayan bir ters problemin, ikinci tip lineer Fredholm integral denklemlerinin bir parametreli ailesine indirgenmesine dayanmaktadır. Bu alandaki ilk sonuçlar Gel'fand ve Levitan (1955), Krein (1951,1954) ve Marchenko (1955) tarafından elde edilmiştir. Ayrıca Kunetz (1964), Symes (1981) ve Santosa (1982) bu alanda önemli katkılar yapmışlardır.

Ters problemlerin sonlu fark yöntemi ile çözülmesi fikri, Alekseev (1967) tarafından hiperbolik denklemlerin katsayılarının belirlenmesi amacı ile önerilmiştir. Daha sonraları bu yöntem, Antonenko (1967), Alekseev ve Dobrinskii (1975), Kabanikhin ve Abdiev (1986), Kabanikhin ve Satybaev (1988), Karchevsky (1998) tarafından jeofizik, jeoelektrik, elektromanyetik teorisi ve elastisite teorisi gibi alanlarda ortaya çıkan çeşitli ters problemler için farklı açılardan ele alınmıştır.

Hiperbolik ve parabolik denklemler için bazı katsayı ters problemlerinin sayısal çözümü için Klibanov ve Timonov (2004) ve Beilina ve Klibanov (2008) tarafından etkili çözüm algoritmaları geliştirilmiştir.

2. İntegral Geometri Problemleri (IGP)

$\mathbb{R}^n$ üzerinde yeterince düzgün bir fonksiyon veya daha karmaşık bir matematik obje $\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde diferensiyel formlar, vektör alanları, tensör alanları bu cinsten objelerdir. $r = r_1, r_2, \ldots, r_k)$, $r_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere r parametresine bağlı $\mathbb{R}^n$ deki düzgün manifoldların cümlesi $\{\Gamma(r)\}$ ve $\lambda(x)$ her bir $\Gamma(r)$ manifoldu üzerinde integrallenebilir, yani

$$\int_{\Gamma(r)} \lambda(x) d\sigma_r = f(r) \tag{1}$$

olsun. Burada $d\sigma_r$, $\Gamma(r)$ üzerinde verilmiş ölçü elemanıdır. $\Gamma(r)$ ve $f(r)$ ye göre $\lambda(x)$ in bulunması problemine lineer IGP denir. (1) denkleminde $\{\Gamma(r)\}$ belli olmayabilir. Bu durumda $f(r)$ ye göre aynı zamanda $\lambda(x)$i ve $\{\Gamma(r)\}$ yi bulma problemine ise lineer olmayan IGP denir (Lavrent'ev vd. 1986, s. 168). İntegral geometri problemi ilk olarak Radon tarafından incelenmiştir (Radon 1917).

Tanım 1. (Radon Problemi) $\lambda(x)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ de yer alan tüm $m<n$ boyutlu düzlemler üzerindeki integrallerinin verilmesi halinde bu integrallere göre $\lambda(x)$ in bulunması problemidir.

Radon, bu problemi çözerek $\lambda(x)$in $f(r)$ ile ilgili ifadelerini vermiştir. Bu ifade Radon dönüşümü olarak bilinmektedir. Radon dönüşümü de Fourier dönüşümü gibi diferensiyel ve pseudo-diferensiyel denklemlerle ilgili çeşitli problemlerin çözümünde kullanılır. Bu problem daha sonra çeşitli açılardan John (1935, 1943), Kostelyanets ve Reshetnyak (1954), Gel'fand ve Graev (1959), Gel'fand vd. (1962) ve farklı araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. Buradaki problemler Lie grubu gösterimlerinin teorisi ile yakından ilgilidir (Gel'fand vd. 1962). Diğer önemli sonuçlar Courant (1964), Plaksin (1966), Romanov (1972, 1978, 1987), Santalo (1976), Uspenskii (1972, 1977) ve Helgason (1980) da bulunabilir.

İntegral Geometri problemlerinin teorisi, Amirov (1986, 2001), Anikonov (1976, 2001), Kreitov (1975), Lavrant'ev ve Bukhgeim (1973), Mukhometov (1977), Pestov ve Sharafutdinov (1988), Sharafutdinov (1981, 1994) gibi önemli bilim insanlarının çalışmalarıyla ve bu alanda yapılan diğer çalışmalarla daha da ileriye taşınmıştır. Bir diferensiyel denklem için ters probleme indirgenmesi yardımıyla, integral geometri problemlerinin çözümünün tekliği ilk olarak M. M. Lavrent'ev tarafından gösterilmiştir (Lavrent'ev ve Anikonov 1967). Bu tür problemlerle Bilgisayarlı Tomografide (BT), Emisyon Tomografide (ET), yapay açıklıklı görüntülemede, yapay açıklıklı su altı radarında, Doppler tomografide ve daha pek çok alanda karşılaşılmaktadır. IGP ile bağlantılı bazı Transport denklemler için çeşitli ters problemlerin yaklaşık çözümleri Amirov vd. (2009) ve Gölgeleyen (2010) tarafından sonlu fark ve Galerkin yöntemleri üzerine kurulu algoritmalar yardımıyla elde edilmiştir.

3. Transport Denklemler

Transport denklemler; reaktör fiziğinde, radyoaktif kaynakların zırhlanmasında, plazma dinamiğinde, radiatif transferde, gazların kinetik teorisinde ve fiziğin diğer alanlarında ortaya çıkmaktadır (Agoshkov 1998, Case ve Zweifel 1967). Tarihsel olarak transport teorideki en erken çalışmalar astrofizik problemleri üzerine yapılmıştır. Bu problemler radiatif transfer ile ilgilidir. Yıldızların fotosferlerindeki ısı dağılımı ve radiatif alanların analizi bu alandaki klasik problemlerdendir. Bu çalışmalar ışığında, transport teorinin temelleri oluşturulmuş ve transport denklemin çözümüne yönelik çeşitli yöntemler geliştirilmiştir (Chandrasekhar 1950, Sobolev 1956, Bell ve Glasstone 1970).

3.1. Yıldız Atmosferlerindeki Radiatif Transfer

Belli kuvvetli kabuller altında, bir yıldızın dış tabakalarındaki ısı dağılımını ifade etme problemi nötron tansport denklemine özdeş olan bir denklemin çözümüne indirgenebilir. Bir yıldız için aşağıdaki modeli öneren Milne tarafından bu konu üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Fotonlar çoğunlukla çok yüksek ısıya sahip bir bölgedeki yıldızın merkezi yakınında üretilirler. Buradaki fotonlar yıldız atmosferinin daha az yoğun tabakalarına doğru yayılırlar ve nihayetinde yıldız ve etrafını çeviren vakum arasındaki sınır tabakasını geçerler. Yıldızın, problemin sınırdan sonsuz şekilde uzak kaynaklı düzlem geometrisinde alınabileceği kadar çok büyük olması kabulü altında, yıldızdan ortaya çıkan radyan enerjinin açısal dağılımının yanısıra atmosferdeki ısı dağılımının bulunması istenilir. Bu durumda yeniden giriş akısının sıfır olması sınır koşuluna sahip kaynaktan bağımsız bir transport denklemin çözümleri araştırılır.

Şimdi $\psi_\omega(x, \mu)$ açısal foton yoğunluğu tarafından sağlanan bir transport denklemi ele alalım. Bu durumda $\psi_\omega(x, \mu)$ nün aşağıdaki şekilde bir denklemi sağlaması beklenir:

$$\mu \frac{\partial \psi_\omega(x,\mu)}{\partial x} + [\sigma_\omega^s(x) + \sigma_\omega^\alpha(x)]\psi_\omega(x,\mu) = \tag{2}$$

$$\sigma_\omega^s(x) \int_{-1}^{1} \psi_\omega(x,\mu')\, f(\Omega'.\ \Omega) d\Omega' + S_\omega(x)$$

burada ω açısal frekanstır. (2) denkleminde $\sigma_\omega^s(x)$ ve $\sigma_\omega^\alpha(x)$ sırasıyla makroskopik saçılım ve tesir kesitleridir. Genelde bu kesitlerin uzaysal varyasyonunun sadece $p(x)$ atomik yoğunluk faktöründen meydana geldiği kabul edilir. Bu durumda

$$\sigma_\omega^\alpha(x) = p(x)k_\omega,\ \sigma_\omega^s(x) = p(x)\sigma_\omega$$

dır. Burada sırasıyla soğurma ve saçılım katsayıları denilen mikroskopik k_ω ve σ_ω kesitleri için genel astrofizik gösterimleri kullanılmıştır.

(2) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim frekans değişimi olmadan saçılan fotonları gösterir. İkinci terim olan $S_\omega(x)$ etkin bir kaynaktır. Bu kaynak, absorbe edilerek gelen bir fotondan sonra, verilen bir noktadaki cisim tarafından yayılan fotonları ifade eder (Case ve Zweifel 1967).

3.2. Nötron Transport Denklemi

Nükleer reaktörler nükleer enerjiyi ısı enerjisine dönüştüren, başka bir deyişle içerisinde kontrollü bir şekilde zincirleme fisyon reaksiyonlarının oluşturulabildiği ve bu reaksiyonların şiddetine bağlı olarak ortamdaki ısının üretildiği sistemlerdir. Zincirleme fisyon reaksiyonu sonunda oluşan nötron miktarı, reaksiyonun devamlılığı için çok önemlidir. Bir nükleer reaktörün davranışı; reaktördeki nötronların sayısına, enerjisine ve konumlarına bağlıdır (Anlı ve Yaşa 2003). Nötron transportu, nükleer reaktörlerde, radyoaktif çekirdeklerin nötronlar tarafından bombardımanı sonucunda gerçekleşen fisyon tepkimeleri sonrasında açığa çıkan nötronların davranışının belirlenebilmesi amacıyla önemlidir.

Nötron transport denklemi, belirli bir bölge içerisinde üretilen ve bu bölgeden çıkan nötronların dağılımını tanımlayan bir denklemdir. Nötronların yüksüz parçacıklar olmasından dolayı nötron transport denklemi ışık iletimi, ısı iletimi gibi problemlere de uygulanabilen bir denklemdir. Fiziksel probleme uygun sınır şartları seçilerek, nötron transport denklemi bu belirli sınır şartları için çözümlenmektedir. Bu denklem, belirli bir hacim içerisindeki nötron sayısının zamanla değişiminin istatistiksel denge durumu için faz uzayında tanımlanan bir birim hacim içerisinde üretilen nötron sayısı göz önüne alınarak yazılır. Bu denklemin türetilmesi, faz uzayında bir birim hacim seçilerek yapılır. Baslangıçta, birim hacim içerisine belirli bir sayıda nötronun girdiği ve içeri giren nötronlardan bir kısmının hacim içerisindeki çekirdeklerle etkileşerek başka nötronlar üretebileceği ve üretilen yeni nötronlar ile birlikte belirli bir sayıda nötron çıkışı olacağı düşünülür. Nötronların sayısı, konumla ve nötronların hızlarıyla değiştiği için söz konusu birim hacim içerisindeki incelemeler faz uzayı koordinatları kullanılarak yapılır. Temel olarak, birim hacmin koordinatları $\vec{r}$ ile $\vec{r} + d\,\vec{r}$ aralığında ve nötronların hızlarının da $\vec{v}$ ile $\vec{v} + d\vec{v}$ aralığında olduğu düşünülerek, nötron transport denklemi

$$\frac{\partial\psi(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}\,\psi(\vec{r},\vec{v},t) + v\sigma(\vec{r},\vec{v})\psi(\vec{r},\vec{v},t) = q\,(\vec{r},\vec{v},t) + \int \overrightarrow{v'}\,\sigma(\overrightarrow{v'} \to \vec{v}, \vec{r}\,)\psi(\vec{r},\overrightarrow{v'},t)d^3v' \qquad (3)$$

şeklinde elde edilir. Denklemin sol tarafındaki birinci terim, zamana göre nötronların değişim sayısını, ikinci terim, birim hacim içerisinden çarpışma yapmadan çıkan nötronların sayısını ve üçüncü terim de diğer nötronlar ile çarpışma yaparak çıkan nötronların sayısını verir. Denklemin sağ tarafındaki ilk terim, söz konusu birim hacim içerisinde kaynak tarafından üretilen nötronların sayısını tanımlarken, ikinci terim nötronların çekirdeklerle çarpışmaları sonucunda üretilen ikincil nötron sayısını veren ifadedir. Sonuç olarak ilgilenilen birim hacim içerisinden çıkan nötron sayısı, bu hacim içerisinde üretilen nötron sayısına eşit olmalıdır. Denklem (3) de $\psi(\vec{r},\vec{v},t)$, $\vec{r}$ konumunda, $\vec{v}$ hızına sahip nötronların t anındaki sayısını ifade eder. $\sigma(\vec{r},\vec{v})$, toplam makroskobik tesir kesiti olarak adlandırılır (Türeci 2005).

Transport problemler çağdaş fiziğin birçok alanında da aktif olarak kullanılmaktadır. Örneğin, gaz dinamiğinde, yüksek yoğunluklu şok dalgaları teorisinde, plazma teorisinde, lazer uygulamalarında kullanılmaktadır. Transport denklemler, ayrıca gazlar içerisinde ses dalgalarının ve elektrik yüklerinin yayılımının araştırılmasında da kullanılır (Agoshkov 1998).

3.3. Sesin Yayılımı Problemi

Ses, basitçe, bir ortamdaki boyuna dalga yayılımıdır. Burada dalganın yayıldığı ortam olarak, içinde moleküllerin sadece ikili çarpışmalarla etkileşim içerisinde olduğu bir gaz alınacaktır. Bu durumda gaz moleküllerinin açısal yoğunluğu $\psi(\vec{r},\vec{v},t)$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \vec{v}\,.\,\vec{\nabla}_r\psi - \vec{a}\,.\,\vec{\nabla}_r\psi + 2\pi\int d^{\vartheta}v_1\int d\mu\,|\vec{v}-\vec{v}_1|\,\sigma(|\vec{v}-\vec{v}_1|,\mu)(\psi'\psi'_1-\psi\psi_1) \qquad (4)$$

Boltzmann denklemini sağlar. Burada $\vec{a}$, uygulanan bir dış kuvvete bağlı olarak $\vec{r}$ konumundaki ivmeyi, gradient operatörlerindeki alt indisler ise hangi değişkene göre (konum veya hız) işlem yapıldığını göstermektedir. (4) denkleminin sağındaki en son terimin (çarpışma integrali) özel bir önemi vardır. ψ nin alt indisi olan 1 ve üzerindeki üssü işareti hız değişken argumanlarını göstermektedir. Böylece bu integral, $\vec{r}$ konumunda, $\vec{v}$ ve $\vec{v}_1$ hızlarına sahip iki molekülün $\theta = cos^{-1}\mu$ açısı ile değişen $\vec{v} - \vec{v}_1$ relatif hız vektörü ile $\sigma(|\vec{v}-\vec{v}_1|,\mu)$ kesitinde meydana gelen ikili çarpışmasını ifade etmektedir. $\vec{v}\,'$ ve $\vec{v}_1$ çarpışmadan sonraki hızlardır. Benzer bir çarpışma integrali, nötron transport denkleminde de ortaya çıkar. Ancak oradaki çarpışma, nötronlarla çekirdek arasında olup, nötronlarla nötronların çarpışmaları ihmal edilmiştir. Ses dalgalarının yayılımı ele alındığında, gaz molekülleri arasındaki çarpışmaların ihmal edilemeyeceği derecede yüksek yoğunlukta özdeş parçacıkların oluşturduğu bir gazın kollektif hareketini düşünmek yeterlidir. O halde (4) denklemi lineer olmayan bir denklemdir.

4. Bazı Ters Problemler

Transport denklemler için ters problemler hem teorik hem de pratik açıdan çok büyük öneme sahiptir. Aşağıda bazı ters transport problemler ve uygulamaları verilmektedir.

4.1. SPECT Yönteminde Kaynağın ve Zayıflatma Katsayısının Belirlenmesi Ters Problemi

Bu kısımda, bir lineer transport denklemde uygun sınır verileri yardımı ile soğurma katsayısının ve kaynak teriminin belirlenmesi problemi üzerinde durulacaktır. Bu problemler, önemli bir tıbbi görüntüleme yöntemi olan SPECT (Single Photon Emission Computerized Tomography) de uygulama alanı bulmaktadırlar. SPECT, tek foton yayılımını esas alan, sadece bir kesite odaklanmış detektörlerle kesitsel görüntü oluşturmak amacıyla geliştirilmiş bir radyonüklid görüntüleme tekniğidir. Hasta vücuduna verilen uygun radyofarmasötik maddelerden salınan gamma ışınları, hasta çevresinde 180° veya 360°

dönebilen dedektörler (gamma kamerası) tarafından saptanır. Dedektörler, yüksek manevra yetenekleri nedeniyle aksiyal, koronal, sagital ve oblik kesitler oluşturulabilmektedir. SPECT taramada herhangi bir kesitin üst ve altındaki tabakalar ortadan kaldırıldığı için oluşumların süperpoze (oluşumların üst üste gelmesi) olması söz konusu değildir. Ayrıca konvansiyonel sintigrafiyle görüntülenemeyen lezyonlar SPECT (Tek foton emisyon tomografisi) tekniğiyle görüntülenebilmektedir.

γ parçacıklarının faz uzay (konum-yön) yoğunluğu, aşağıda verilen ve soğurma terimi içeren lineer transport denkleminin çözümü olan $u(x, \theta)$ ile modellenmektedir:

$$\theta.\nabla_x u(x, \theta) + a(x)u(x, \theta) = f(x),\ x \in X \subset R^2,\ \theta \in S^1,$$

burada f, γ parçacıklarının kaynağı, a ise soğurma terimidir. Bu durumda $u(x, \theta)$ için veriler, $X \subset R^2$ bölgesinin ∂X sınırındaki x ler ve tüm $\theta \in S^1$ için verilmektedir. a bilindiğinde f kaynak fonksiyonu

$$P_{a,\theta} f(x.\ \theta^{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\int_0^{+\infty} a(x+t\theta)dt} f(x+t\theta)dt$$

şeklinde tanımlı zayıflatılmış Radon dönüşümü yardımıyla hesaplanabilir. Ancak bu dönüşümün sağlaması gereken şartlar vardır. Literatürde (f, a) ikilisinin belirlenmesine ilişkin çeşitli çalışmalar mevcuttur (Bal 2009).

4.2. Optik Moleküler Görüntülemede Ters Kaynak Problemi

Optik moleküler görüntüleme (OMI-Optical Molecular Imaging) yöntemi, tıbbi görüntülemede yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanan güçlü bir yöntemdir. Bu yöntem ile önceden belirlenmiş moleküllere karşı harekete geçen, hastalıklı genlerin ve hastalık ilerlemeden önce cereyan eden moleküler olayların tespitinde kullanılan yeni kimyasal işaretçiler tasarlanmaktadır. Böylece hastalığın belirtileri ortaya çıkmadan çok önce sorun tesbit edilmiş olur. Optik moleküler görüntülemede kullanılan bu işaretçiler, fosfor, lüminofor gibi ışık yayan moleküllerdir. SPECT ve PET (pozitron emisyon tomografi) gibi diğer moleküler görüntüleme yöntemleri ile kıyaslandığında, optik işaretçiler insan vücuduna daha az zarar veren düşük enerjili yakın kızıl ötesi ışınlar yayar. Diğer bir avantajı ise oksijen seviyesine, metal iyon yoğunluğuna, pH ve yağ bileşimlerine karşı yüksek duyarlılıklı olmalarıdır. Buradaki ters problem, görüntülenmek istenen nesnenin sınırındaki ışık yoğunluğuna ilişkin ölçümler (veriler) kulanılarak bu işaretçilerin konumsal dağılımının belirlenmesi problemidir. Optik moleküler görüntülemede genel olarak, dilimsel ışıldayan (bioluminescent) ve florışıyan (fluorescent) olmak üzere iki tip işaretci kullanılır. Her iki durumda da işaretciler tarafından yayılan fotonların vücut dokularında yayılımı radiatif transfer denklemi için bir ters problem olarak modellenebilmektedir (Bal ve Tamasan 2007).

İşaretçiler tarafından yayılan fotonların dağılımı $f(x)$ ile gösterilsin. Ω sınırlı, açık ve konveks bir bölge, $x \in \Omega \subset R^n$ olsun, burada $n = 2,3$ uzayın boyutudur. Işık hızı normalize edilip, fotonların yönü $\theta \in S^{n-1}$ ile gösterilsin. Dikkat edilmelidir ki $n = 3$ fiziksel bir modeldir, $n = 2$ ise fotonlar sadece iki boyutlu düzlemde hareket ettiklerinden dolayı fiziksel bir durum değildir.

$u(x, \theta)$, x noktasında θ yönünde hareket eden fotonların yoğunluğu olsun ve

$$\Gamma_{\mp} = \{(x, \theta) \in \partial\Omega \times S^{n-1}, \mp\theta \cdot n(x) > 0\}$$

da sınır uzayını göstersin. Burada $n(x)$, $x \in \partial\Omega$ noktasında Ωnın dış normalidir. Bu durumda parçacıkların yoğunluğu aşağıdaki transport denklemi sağlar:

$$\theta.\nabla_x u(x, \theta) + a(x)u(x, \theta)$$

$$= Ku(x, \theta) + f(x),\ (x, \theta) \in \Omega \times S^{n-1},$$

$$u(x, \theta) = 0,\ (x, \theta) \in \Gamma_{-},$$

burada $d\theta$ ölçü elemanı, birim küre üzerinde $\int_{S^{n-1}} d\theta = 1$ olacak şekilde normalize edilmiş alışılmış yüzey ölçüsüdür. Ortamdaki foton etkileşimi, soğurma parametresi $a(x)$ ve saçılım operatörü

$$Ku(x, \theta) = \int_{S^{n-1}} k(x, \theta' \cdot \theta)\ u(x, \theta')\ d\theta'$$

ile modellenmektedir. Burada $k(x, \theta' \cdot \theta)$ saçılım katsayısı olup hem soğurmanın hemde saçılım katsayısının negatif olmadığı, yeterince düzgün olduğu ve pozitif δ sabitleri için

$$a(x) - \int_{S^{ns-1}} k(x, \theta' \cdot \theta)\ d\theta' \geq \delta > 0$$

eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilmektedir. Bu şart verilen problemin kaynak fonksiyonu $f(x)$in $L^2(\Omega)$dan olması koşulu ile $L^2(\Omega \times S^{n-1})$ uzayında iyi konulmuş olmasını garanti eder. Buradaki ters problem, ($u(x,\theta)$, $f(x)$) fonksiyonlar çiftinin belirlenmesi problemidir.

4.3. Difüz Optik Tomografide Bir Katsayı Ters Problemi

Difüz Optik Tomografi (Diffuse Optical Tomography-DOT) yöntemi biyolojik dokuların emilim ve saçılım özelliklerini araştırmak için görünür yakın kızıl ötesi ışınların kullanıldığı, gelişmekte olan bir biyomedikal görüntüleme yöntemidir. Beyin, göğüs ve eklem görüntülemeleri bu yöntemin uygulamalarına örnek olarak verilebilir. DOT yönteminde kullanılan algoritmaların birçoğu model tabanlıdır, yani dokular içerisindeki yakın kızıl ötesi ışınların yayılımı için bir model verilmesi gerekir. Genel olarak yakın kızıl ötesi ışınların dokulardaki yayılımının en iyi şekilde radiatif transport denklemi ile modellendiğine inanılmaktadır. Bu denklem faz uzayında, yani konum ve yöne göre yazıldığından hesaplama işi çok masraflıdır. Daha düşük hesaplama maliyeti için bir çok uygulamada transport denklemi yerine, fotonların konumsal yoğunluğunu modelleyen difüzyon yaklaşımı ele alınır. Bununla birlikte difüzyon denkleminin optik tomografideki uygulamaları sınırlıdır. Aslında radiatif transport denkleminden difüzyon denkleminin elde edilmesi sadece yüksek saçılımlı ve zayıf emilimli dokularda mümkündür. Difüzyon yaklaşımı, insanlardaki beyin-omurilik sıvısı gibi küçük veya sıfır saçılım katsayılı bölgelerde ışın yayılımını modellemede yeterli derecede geçerli değildir.

Biyolojik dokularda, yakın kızıl ötesi ışınların yayılımı en doğru şekilde radiatif transport denklemi ile modellenir. Bu denklem $X = \Omega \times S^2$ faz uzayında, yani hem $x \in \Omega \subset R^3$ konumunun hem de $\theta \in S^2$ yayılma yönünün bir fonksiyonu olarak, foton yoğunluğunu ifade etmektedir. Burada S^2, R^3 de birim küredir. Işık kaynağının yoğunluğu, ω frekansı ile modüle edilirse yani $f(x, \theta)\, e^{i\omega t}$ formunda alınırsa, aşağıdaki transport denklem elde edilir:

$$\left(\frac{i\omega}{v} + \theta\nabla + \mu_t(x)\right) u(x, \theta)$$

$$-\mu_s(x) \times \int_{S^2} k(\theta \cdot \theta')\, u(x, \theta')\, d\theta' = 0, \quad (x, \theta) \in X, \tag{5}$$

$$u(x, \theta) = f(x,\theta), \quad (x,\theta) \in \Gamma_-,$$

burada $i=\sqrt{-1}$ ve v ışığın ortamdaki hızıdır. $\mu_t(x)$ ve $\mu_s(x)$ fonksiyonları sırasıyla toplam soğurma (sönüm) ve saçılım katsayılarıdır. Fiziksel soğurma katsayısı $\mu_a(x) = \mu_t(x) - \mu_s(x)$ ile ifade edilsin. $u(x,\theta)$ çözümü, θ yönünde x noktasındaki yayılma yönüne dik olan birim alandaki, birim katı açı başına düşen ışıyan güçtür. $\Gamma_\mp$ sınır cümleleri $v(x)$, $x \in \partial\Omega$ noktasında Ω nın dış birim normali olmak üzere,

$$\Gamma_\mp(\Omega) = \{(x,\theta) \in \partial\Omega \times S^2, \mp\theta \cdot v(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada verilen (5) transport denklemi dokularda ışığın yayılımı için mikroskobik bir modeldir. Bu modelin sayısal olarak çözümü, hem konumsal hem de açısal değerlendirme gerektirdiğinden çok masraflı bir iştir. Bu sebepten dolayı birçok uygulamada transport denklemi yerine, makroskobik seviyede ışığın yayılımını ifade eden difüzyon denklemi ele alınır. Bu denklemde bilinmeyen büyüklük, açısal ortalama foton akısıdır. Soğurma yeterince küçük, saçılım yeterince büyük olduğunda problem makroskobik ölçekte aşağıdaki difüzyon denklemi ile modellenir:

$$\frac{i\omega}{v}U(x) - \nabla\cdot D\nabla U + \mu_a(x)U(x) = 0, \quad x\in\Omega, \tag{6}$$

$$U + 3\varepsilon L_3 v(x) \,.\, D\nabla U = \Lambda(f)(x), \quad x\in\partial\Omega.$$

Burada $U(x)$, x noktasındaki açısal ortalama foton akısı, $\mu_a(x)$, x noktasındaki soğurma oranını gösteren ve transport denklemde $\mu_t(x) - \mu_s(x)$ e karşılık gelen soğurma katsayısıdır. $D(x)$ difüzyon tensörü simetrik ve pozitif tanımlıdır.

Sonuç olarak optik tomografide amaç, transport ve difüzyon denklemlerinde yer alan $\mu_a(x)$ ve $\mu_s(x)$ katsayılarının sınır verilerinden yararlanarak elde edilmesidir. Bu ise matematiksel olarak, (5) ve (6) denklemleri için ilgili ters problemlerin çözümünü gerektirmektedir (Ren vd. 2007).

5. Kaynaklar

Agoshkov, VI. 1998. Boundary Value Problems for Transport Equations, Birkhauser, Boston.

Alekseev, AS. 1967. Inverse dynamical problems of seismology. In Some Methods and Algorithms for Interpretation of Geophysical Data. Nauka, Moscow, pp. 9-84.

Alekseev, AS., Dobrinsky, VI. 1975. Questions of practical application of dynamical inverse problems of seismology. *Mathematical Problems of Geophysics*, 6 (2):7-53.

Ambarzumian, VA. 1929. Über eine Frage der Eigenwerttheorie. *Zeitschrift für Physik*, 53: 690-695.

Amirov, A. 1986. Existence and uniqueness theorems for the solution of an inverse problem for the transport equation. *Sib. Math. J.*, 27: 785-800.

Amirov, A. 2001. Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations, VSP, Utrecht The Netherlands.

Amirov, A., Yıldız, M., Ustaoğlu, Z. 2009. Solvability of a problem of integral geometry via an inverse problem for a transport-like equation and a numerical method. *Inverse Problems*, 25: 095002.

Anikonov, YE. 1976. The solvability of a certain problem of integral geometry. *Mat. Sb.*, 101(143): No: 2, 271–279.

Anikonov, YE. 2001. Inverse Problems for Kinetic and other Evolution Equations, VSP, Utrecht The Netherlands.

Anikonov, YE., Amirov, A. 1983. A uniqueness theorem for the solution of an inverse problem for the kinetic equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.*, 272 (6): 1292-1293.

Anlı, F., Yaşa, F. 2003. Nötron Transportu için Küresel Geometride Özdeğer Hesaplaması**.** *KSÜ Fen ve Mühendislik Dergisi* 6(2):28-33.

Antonenko, OF. 1967. Finite-difference scheme inversion for solving a one-dimensional dynamical inverse problem of seismology. In: Some Methods and Algorithms for Interpretation of Geophysical Data. Nauka, Moscow, 92-98.

Bal, G. 2009. Inverse Transport Theory and Applications. *Inverse Problems*, 25: 055006.

Bal, G., Tamasan, A. 2007. Inverse source problems in transport equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 39(1): 57-76.

Beilina, L., Klibanov, MV. 2008. A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem. *SIAM J. Sci. Comp.*, 31(1): 478-509.

Bell, G., Glasstone, S. 1970. Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Reinhold Co.

Berezanskii, YM. 1958. On the uniqueness theorem for the inverse problem of spectral analysis for the Schrodinger equation. *Trudy Mosk. Math. Obshch. 7:* 3-51.

Case, K.M., Zweifel, P.F. 1967. Linear Transport Theory. Addison-Wesley, Reading, Mass.

Chandrasekhar, S. 1950. Radiative transfer. Clarendon press, Oxford,

Courant, R. 1964. Partial Differential Equations, Mir, Moscow.

Gel'fand, IM., Graev, MI. 1959. The geometry of homogeneous spaces, group representations in homogeneous spaces and questions in integral geometry. *Trudy Moskov. Mat. Obsh.*, 8: 321-390.

Gel'fand, IM., Graev, MI., Vilenkin NY. 1966. Integral Geometry and Representation Theory. *Generalized Functions*, Vol: 5, Academic Press, New York.

Gel'fand, M., Levitan, BM. 1951. On the determination of a differential equation from its spectral function. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 15: 309-360.

Golgeleyen, I. 2010. An integral geometry problem along geodesics and a computational approach. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta: Ser. Mat.*, 18 (2): 91-112.

Golgeleyen, F. 2010. Poisson Parantezi İçeren Kinetik Denklemler İçin Bazı Ters Problemlerin Çözülebilirliğinin ve Yaklaşık Çözümlerinin Araştırılması. *Doktora tezi*, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, 85 s.

Helgason, S. 1980. The Radon transform. Birkhauser, Boston.

Herglotz, G. 1905. Uber die Elastizitaet der Erde bei Beruecksichtigung ihrer variablen Dichte. *Zeitschr. fur Math. Phys.*, 52: 275-299.

John, F. 1935. Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion. *Math. Ann.*, 111(1): 541–559.

Lavrent'ev, MM., Anikonov, YE. 1967. A certain class of problems in integral geometry. *Sov. Math. Dokl.*, 8: 1240-1241.

Lavrent'ev, MM., Bukhgeim, AL. 1973. A certain class of problems of integral geometry. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 211 (1): 38–39.

Kabanikhin, SI., Abdiev, KS. 1986. Projection-difference method for solving three- dimensional problem of geoelectrics. *Questions of Correctness of Mathematical Physics and Analysis Problem*, 61-72.

Kabanikhin, SI., Satybaev AD. 1988. A finite-difference regularization of linearized inverse problem for two-dimensional wave equation. In: Ill-Posed Problems. Institute Math., Novosibirsk, pp. 39-57.

Karchevsky, A.L. 1998. Finite-Difference Coefficient Inverse Problem and Properties of the Misfit Functional. *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 6 (5): 431-452.

Kireitov, VR. 1975. The problem of determining an optical surface from its representations. *Funktsional. Anal. i Prilozhen*. 10 (3): 45–54.

Klibanov, MV., Timonov, A. 2004. Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications, VSP, Utrecht The Netherlands.

Kostelyanets, PO., Reshetnyak, YG. 1954. Defining an absolutely additive function by specifying its values on half-spaces. *Uspekhi Mat. Nauk*, 9(3): 135–141.

Krein, MG. 1951. Solution of the inverse Sturm-Liouville problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 76: 21–24.

Krein, MG. 1954. On a method of the effective solution of an inverse boundary value problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 95: 767-770.

Kunetz, G. 1964. Generalization of the antiresonance operators to a certain number of reflections. *Geophys. Prospect.*, 12: 283-289.

Marchenko, VA. 1950. Some problems in the theory of second-order differential operators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 72: 457–560.

Marchenko, VA. 1955. Reconstruction of the potential energy from the phase of scattered waves. *Dokl. Akad. Nauk SSR*, 104: 635-698.

Mukhometov, RG. 1977. The problem of the recovery of a two-dimensional Riemannmetric and integral geometry. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 232 (1): 32-35.

Novikov, P. 1938. Sur le probleme inverse du potentiel. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 18: 165-168.

Pestov, LN., Sharafutdinov, VA. 1988. Integral geometry of tensor fields on a manifold of negative curvature. *Soviet Math. Dokl.* 36(1): 203-204.

Plaksin, GI. 1966. On a problem of Gelfland. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 170 (4) 783-785.

Romanov, VG. 1972. Some Inverse Problems for of Hyperbolic Type Equation,. Nauka, Novosibirsk.

Romanov, VG. 1978. Integral geometry on geodesics of an isotropic Riemannian metric, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 241(2): 298-293.

Romanov, VG. 1987. Inverse Problems of Mathematical Physics, VSP, Utrecht The Netherlands.

Santalo, LA. 1976. Integral geometry and geometric probability, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.

Santosa, F. 1982. Numerical scheme for the inversion of acoustical impedance profile based on the Gelfand-Levitan method. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* 70:229-244.

Sharafutdinov, VA. 1981. Determining the characteristics of an optical body in a homogeneous medium from its images. In: Mathematical methods of Solving Direct and Inverse Problems of Geophysics, 123-148, Novosibirsk.

Sharafutdinov, VA. 1994. Integral Geometry of Tensor Fields, VSP, Utrecht, The Netherlands.

Sobolev, VV. 1956. Radiative Transfer in Atmospheres of stars and planets, Gostekhizdat, Moscow.

Symes, WW. 1981. Stable solution of the inverse reflection problem for a smoothly stratified elastic medium. *SIAM J. Math. Anal.,* 12: 421-453.

Türeci, RK. 2005. Nötron transport denkleminin H_N yöntemiyle çözümü ve uygulamaları. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi, 166 s.

Uspenskii, SV. 1972. Reconstruction of a function specified by integrals over a family of ellipsoids. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 13 (6): 1374-1382.

Uspenskii, SV. 1977. The reconstruction of a function given by integrals over a family of conical surfaces. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 18 (3): 675-684.

Wiechert, E., Zoeppritz, K. 1907. Uber Erdbebenwellen, Nachr. Koenigl. *Geselschaft Wiss, Goettingen,* 4: 415-549.