Osmanlı Bilimi Araştırmaları, XV/1 (2013): 48-66

SEMERKAND ASTRONOMİ VE MATEMATİK EKOLÜNÜN OSMANLI'YA ETKİSİ: ULUĞ BEY'İN SİNÜS 1°'Yİ YAKLAŞIK BELİRLEME YÖNTEMİ

Atilla Bir[*] & *Mustafa Kaçar*[**]

Uluğ Bey'in, *Zic-i Uluğ Bey* olarak adlandırılan eserini 1437 tarihinde bitirdiği ifade edilse de bu eser üzerinde 1449 yılındaki ölümüne kadar çalışmaya devam ettiği bilinir.[1] Eserin 2. Kitabının, 2. Kısmı *sinüs ve ok (sinüs verse) tanımların*a ayrılmıştır. Sinüs ve kosinüsü şu şekilde tanımlar: "Bir yayın uçlarını bağlayan kirişin bir ucuyla diğer ucundan geçen çapa dik mesafeye sinüs denir. Bir yarım ve bir tam daire yayının sinüsü yoktur. Yarıçapın karesinden bir yayın sinüs karesi çıkarılır ve bu değerin karekökü alınırsa, çeyrek daireyi tümler açının sinüsü (ya da aynı yayın kosinüsü) elde edilir. Bir yayın ortasından kiriş ortasına inilen dike *yarı yay oku* (*sinüs verse*) denir".

Yine 2. Kısımda, biraz ilerde Uluğ Bey bize şu bilgileri de aktarır: "Sinüs ve *gölge* (*tanjant*) çizelgelerinin hesabı sinüs 1°'nin bulunuşuna dayanır. Bugüne kadar kimse buna ilişkin tam değeri vermeyi başaramamış, bunun karşılığını yeterli doğruluğa ulaştıklarını kabul ettikleri yaklaşık hesap yöntemlerini kullanarak elde etmişlerdir. Ancak, başka bir eserimizde[2] açıkladığımız gibi, bu çok önemli sorunu, sinüs değerini Allahın izniyle çok hassas belirledik ve söz konusu çizelgeyi oluşturduk".

Bu çalışmada Uluğ Bey'in sinüs 1°'yi nasıl elde ettiği konusu araştırılmış ve Ptolemeus'un (Batlamyus) verdiği değerle karşılaştırılmıştır.

1- Temel kiriş ve bunlara ilişkin sinüslerin hesaplanması

Geometride *temel* ya da *ana kirişler* dendiğinde daire çevresini n = 2, 3, 4… tam sayılarına, 1/n ya da 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8 ve 1/10 şeklinde bölen

---

[*] Prof. Dr., İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik Elektronik Fakültesi, atilabir@gmail.com

[**] Prof. Dr., Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi, Bilim Tarihi Bölümü, mustafa.kacar@gmail.com

[1] Bu makalenin yazılmasında şu eserlerden faydalanılmıştır: M. Kaçar, A. Bir, *Uluğ Bey'in Astronomi Cetvelleri: Zic'i Uluğ Bey*, (Tıpkıbasım, çeviri ve yorum) Kültür Bakanlığı Yayınları, 2012 Ankara; M. L. P. E. A. Sédillot, *Prolégomènes des tables astronomiques d'Oloug-Beg publiés avec notes et variantes et précédés d'une introduction*, Paris 1847, p. 69-83; G. Van Brummelen *Heavenly Mathematics*, *The Forgotten Art of Spherical Trionometry*, Princeton University Press, Priceton and Oxford, 2013, p. 7-15.

[2] Bu eser kütüphanelerimizde yazmaları mevcut olan Uluğ Bey'in *1°'nin sinüsünü el-Kâşî'nin yöntemiyle belirleme risalesi*'dir (İstanbul, Hüseyin Çelebi 751/3 ve İstanbul Kandilli 76).

yay kirişleri anlaşılır. Uluğ Bey dönemine kadar daire çevresini 1/7 veya 1/9 oranında bölen yay kirişlerini veren geometrik bir yöntem bulunamamıştı.

Bir yayın sinüsü yarı yay kirişinin daire yarıçapına oranı olarak tanımlanır. Buna göre birim yarıçaplı ($R = 60^{\mathrm{P}}$) bir dairede φ yayının kirişi $AC = a$ olmak üzere, ($\sin \varphi/2$) için

$$\sin\varphi/2 = \frac{AD}{R} = \frac{AC/2}{R} = \frac{a/2}{60^{\mathrm{P}}}$$

yazılabilir (Şekil 1).

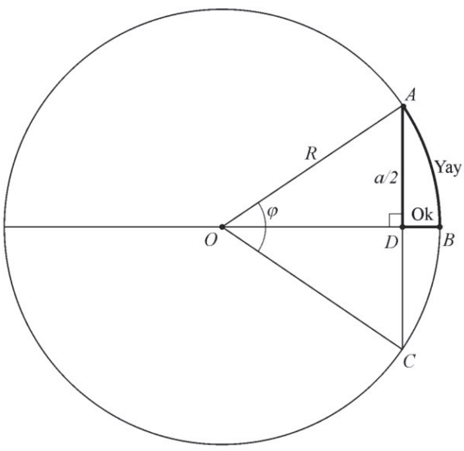
Daire çevresinin yarısına ilişkin bir $\varphi_{1/2} = 180°$ yayının $a_{1/2}$ kirişi açıkça görüldüğü gibi dairenin $D = 2R = 120^{\mathrm{P}}$ çapına eşittir. Buna göre aşağıdaki ilişkiler geçerlidir:

$$\sin(\varphi_{1/2}/2) = \sin 90° = \frac{a_{1/2}/2}{60^{P}} = \frac{R}{60^{\mathrm{P}}} = \frac{D}{120^{\mathrm{P}}} = 1$$

Daire çevresinin 1/3'ü, ya da $\varphi_{1/3} = 120°$ yayına ilişkin $a_{1/3}$ kirişinin karesi, Öklides'in *Elementler* isimli eserinin 13. Kitabındaki 15. Öneri gereği, daire yarıçapı karesinin 3 katı olarak hesaplanır.[3] Şu halde $a_{1/3}^2 = 3R^2$ olduğundan ($\sin 60°$) için

$$\sin(\varphi_{\frac{1}{3}}/2) = \sin 60° = \frac{\frac{a_{\frac{1}{3}}}{2}}{60^{P}} = \frac{\sqrt{3R^2}}{2 \times 60^{\mathrm{P}}} = \frac{\sqrt{3 \times 60^{P} \times 60^{P}}}{2 \times 60^{\mathrm{P}}} = \frac{\sqrt{10.800^{P}}}{2 \times 60^{P}} = \frac{103^{P}55'22''58^{(3)}}{2 \times 60^{P}} = \frac{51^{P}57'41''29^{(3)}}{60^{P}}$$

yazılabilir.



Şekil 1

[3] Euclid, *The Thirteen Books of the Elements* (Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath), Dover, 1956, vol.3, s.438.

Daire çevresinin 1/4'ü, ya da $\varphi_{1/4} = 90°$ yayının yarısına ilişkin $a_{1/3}$ kirişinin karesi Pisagor teoremi gereği yarıçap karesinin 2 katı olarak hesaplanır. Şu halde $a_{1/4}^2 = 2R^2$ ile (sin 45°) için

$$\sin(\varphi_{1/4}/2) = \sin 45° = \frac{a_{1/4}/2}{60^P} = \frac{\sqrt{2R^2}}{2 \times 60^{\mathrm{P}}} = \frac{\sqrt{2{\times}60^P{\times}60^P}}{2{\times}60^{\mathrm{P}}} = \frac{\sqrt{7.200^P}}{2{\times}60^P} = \frac{84^P 51'10''8^{(3)}}{2{\times}60^P} = \frac{42^P 25'35''4^{(3)}}{60^P}$$

elde edilir.

Daire çevresinin 1/6'i, ya da $\varphi_{1/6} = 60°$ yayının kirişi yarıçapa eşittir: $a_{1/6} = R$. Buna göre (sin 30°) için

$$\sin(\varphi_{1/6}/2) = \sin 30° = \frac{a_{1/6}/2}{60^P} = \frac{R/2}{60^{\mathrm{P}}} = \frac{30^P}{60^P} = 0{,}5$$

elde edilir.

Daire çevresinin 1/8'i, $\varphi_{1/8} = 45°$'lik bir yaya karşı düşer. Eğer $a_{1/8}$ kirişi belirlenmek istenirse, *C* merkezli *AEB* dairesi çizilir ve birbirine dik iki yarıçap göz önünde bulundurulur (Şekil 2). Dairede $AB = a_{1/4}$ kirişi çizilir ve ikiye bölünürse *D* noktası elde edilir. Uzatılan *CD* doğrusu daireyi *E* noktasında keser. İkizkenar *ADC* ve *CDB* üçgenleri nedeniyle

$$AD = CD = a_{1/4}/2 = R\sqrt{2}/2 = 60^{\mathrm{P}}/\sqrt{2} = 42{,}426407 = 42^{\mathrm{P}}25'35''4^{(3)}$$

ve

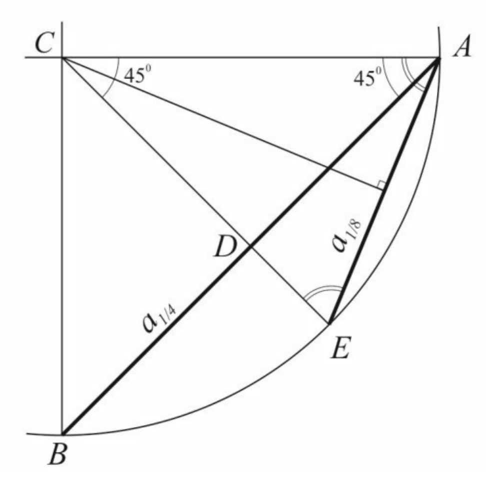
$$DE = CE - CD = [60^{\mathrm{P}} - (42^{\mathrm{P}}\ 25'\ 35''\ 4^{(3)})] = 17^{\mathrm{P}}\ 34'\ 24''\ 56^{(3)}$$

elde edilir. Eğer DEA dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa aranan $a_{1/8}$ kirişi

$$a_{1/8} = AE = \sqrt{(a_{1/4}/2)^2 + DE^2} =$$
$$\sqrt{(42^{\mathrm{P}}25'35''4^{(3)})^2 + (17^{\mathrm{P}}34'24''56^{(3)})^2} =$$
$$\sqrt{(30\ 0^{\mathrm{P}}0'0''\ 10^{(3)}) + (5\ 8^{\mathrm{P}}\ 49'\ 52''\ 10^{(3)})} = \sqrt{35\ 0^{\mathrm{P}}\ 0'\ 0''20^{(3)}} = 45^{\mathrm{P}}\ 55'19''\ 15^{(3)}$$

olarak elde edilir. Buna göre açının sinüsü şu şekilde bulunur:

$$\sin(\varphi_{1/8}/2) = \sin 22°\,30' = \frac{a_{1/8}/2}{60^P} = \frac{(45^{\mathrm{P}}\ 55'19''\ 15^{(3)})/2}{60^{\mathrm{P}}} = \frac{22^{\mathrm{P}}\ 57'\ 39''\ 37^{(3)}}{60^P}$$



Şekil 2

Daire çevresinin 1/10'u, $\varphi_{1/10} = 36°$'lik bir yaya karşı düşer. Öklides'in *Elementler* isimli eseri 13. Kitabının 9. Önerisi gereği bir dairenin içine çizilen altıgen kolaylıkla hesaplanabilir. Bunun için *E* merkezli ve *R* yarıçaplı bir daireyi göz önünde bulunduralım. (Şekil 3). Eğer bu dairede 36°'lik *BEC* merkez açısı alınır, $a_{1/10} = BC$ kirişi $CD = R$ olacak şekilde uzatılır ve *EFD* doğrusu çizilirse açıları belli benzer *EBC* ve *DBE* iki ikizkenar üçgen elde edilir. Bu üçgenlerden $DB/BE = EB/BC$ ya da $DB \times BC = BE^2 = CD^2 = \mathrm{R}^2$ ilişkisi yazılabilir. Burada $DB = (R + a_{1/10})$ olduğundan ikinci mertebeden $(\mathrm{R} + a_{1/10})\, a_{1/10} = \mathrm{R}^2$ ifadesi elde edilir ve ongen kirişi $a_{1/10}$ bu ilişkiden

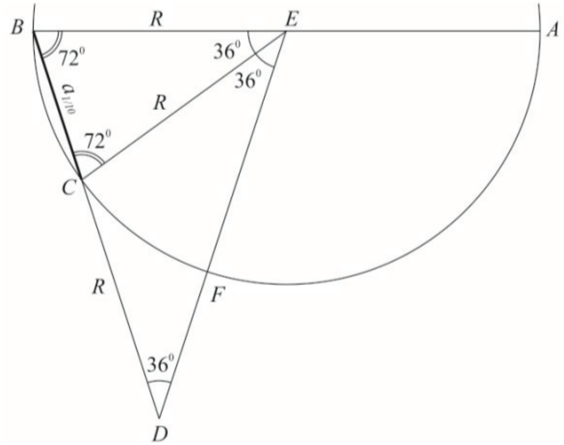
$$a_{1/10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

olarak bulunur. Elde edilen çözüm düzenlenir

$$\left(a_{1/10} + \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5R^2}{4} = \frac{5 \times 60^P \times 60^P}{4} = 5 \times 30^P \times 30^P = 4.500^P$$

ve karekökü alınırsa $(a_{1/10} + 30^{\mathrm{P}}) = 67^{\mathrm{P}},082039$ ya da $a_{1/10} = 37^{\mathrm{P}}\ 4'\ 55''\ 20^{(3)}$ olarak elde edilir. Buna göre (sin 18°) şu şekilde hesaplanır:

$$\sin(\varphi_{1/10}/2) = \sin 18° = \frac{a_{1/10}/2}{R} = \frac{(37^{\mathrm{P}}\ 4'\ 55''\ 20^{(3)})}{60^{\mathrm{P}}} = \frac{18^{\mathrm{P}}\ 32'\ 27''\ 40^{(3)}}{60^P}$$



Şekil 3

Daire çevresinin 1/5'i, $\varphi_{1/5} = 72°$'lik bir yaya karşı düşer. Öklides'in *Elementler* isimli eserinin 13. Kitabının 10. Önerisi gereği bir dairenin içine çizilen beşgenin $a_{1/5}$ kiriş uzunluğu ongen kiriş uzunluğu $a_{1/10}$ cinsinden kolaylıkla hesaplanabilir. Bunun için *F* merkezli bir dairenin içine *ABCDE* beşgeninin çizilmiş olduğunu varsayalım (Şekil 4). Eğer *AB* kirişinin *H* orta noktası bulunur ve *FH* doğrusu *K* noktasına uzatılırsa, ongen kiriş uzunluklarına eşit $a_{1/10} = AK = KB$ kirişleri elde edilir. Benzer şekilde *AK* kirişinin *L* orta noktası bulunur *FL* doğrusu çizilirse bu doğru $AB = a_{1/5}$ kirişini *N* ve daireyi *M* noktasında keser.

Merkez açısı $<(BFA) = 72°$ olduğundan *ABF* ikizkenar üçgeninde $<(BAF) = <(ABF) = 54°$'dir. Ayrıca merkez açısı $<(BFM) = (36° + 18°) = 54°$ olan *NBF* üçgeni de bir ikizkenar üçgendir ve *ABF* üçgenine benzer. Bu nedenden dolayı $AB/BF = BF/BN$ ya da $BF^2 = AB \times BN$ ilişkisi geçerlidir. Aynı şekilde $<(KBA) = <(KAN) = <(AKN) = 18°$ olduğundan *BKA* ve *NKA* ikizkenar üçgenleri de benzerdir ve $BA/AK = AK/AN$ ya da $AK^2 = BA \times AN$ yazılabilir. Elde edilen karesel ifadeler toplanırsa $(BF^2+AK^2) = (AB \times BN + BA \times AN) = AB(BN + BA) = AB^2$ ya da

$$a_{1/5}^2 = a_{1/10}^2 + R^2$$

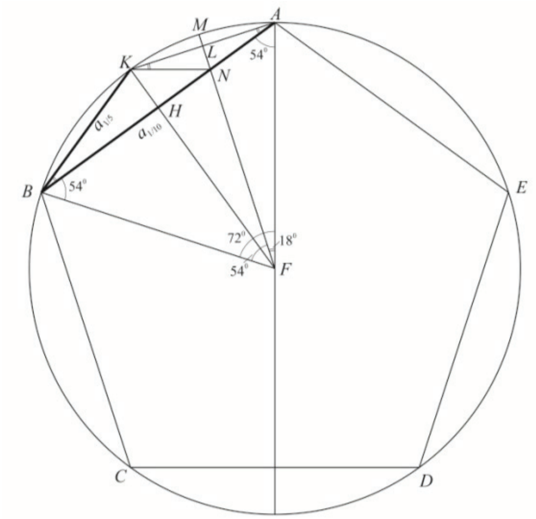
ilişkisi elde edilir. Burada $a_{1/10}$ bilindiğine göre $a_{1/5}^2 = \left[\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2 + R^2 = R^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ ve karekökü alınırsa $a_{1/5} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ elde edilir.

Sayısal değerlendirilirse $a_{1/5}$ ve sin 36° için aşağıdaki değerler elde edilir:

$a_{1/5} = 1{,}175570505\, R = 1{,}175570505 \times 60^{P} = 70^{P}{,}5342303 = 70^{P}\, 32'\, 3''\, 14^{(3)}$,

$$\sin(\varphi_{1/5}/2) = \sin 36° = \frac{a_{1/5}/2}{R} = \frac{(70^{\mathrm{P}}\ 32'\ 3''\ 14^{(3)})/2}{60^{\mathrm{P}}} = \frac{35^{\mathrm{P}}\ 16'\ 1''\ 37^{(3)}}{60^{P}}$$

Bulunan bu değerlerden yararlanarak tam ifadeleri bilinen yaylardan, kosinüs ve *ok* (*sinüsversus*) değerlerini hesaplamak mümkündür.



Şekil 4

Türetilen sonuçlar aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir[4]:

Yay oranı **1/*n***	**Yay** $\boldsymbol{\varphi_{1/n} = 360°/n}$	**Kiriş** $\boldsymbol{a_{1/n}}$	$\boldsymbol{\sin(\varphi_{1/n}/2) = \frac{a_{1/n}}{2R}}$
1/2	180°	$2R$	$\sin 90° = \frac{60^{\mathrm{P}}}{60^{\mathrm{P}}} = 1$
1/3	120°	$\sqrt{3}R$	$\sin 60° = \frac{51^{P}57'41''29^{(3)}}{60^{P}} = 0{,}8660254$
1/4	90°	$\sqrt{2}R$	$\sin 45° = \frac{42^{P}25'35''4^{(3)}}{60^{P}} = 0{,}7071067$
1/5	72°	$\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,R/2$	$\sin 36° = \frac{35^{\mathrm{P}}\ 16'\ 1''\ 37^{(3)}}{60^{P}} = 0{,}5877852$
1/6	60°	R	$\sin 30° = \frac{30^{P}}{60^{P}} = 0{,}5$
1/7	≅ 51,43°	–	–
1/8	45°	$\sqrt{2-\sqrt{2}}\,R$	$\sin 22°\,30' = \frac{22^{\mathrm{P}}\ 57'\ 39''\ 37^{(3)}}{60^{P}} = 0{,}3826834$
1/9	40°	–	–
1/10	36°	$(\sqrt{5}-1)R/2$	$\sin 18° = \frac{18^{\mathrm{P}}\ 32'\ 27''\ 40^{(3)}}{60^{P}} = 0{,}3090169$

4 Çizelgeye 1/12 yay oranına karşı düşen $\varphi_{1/12} = 30°$'lik yayın analitik hesaplanabilen $a_{1/12} = (\sqrt{6}-\sqrt{2})R/2$ kirişini ilave edilebilir.

2- Bilinen sinüs değerlerinden diğer sinüs değerlerinin türetilmesi

Bir yaya ilişkin sinüs değeri bilindiğinden yarı yaya ilişkin sinüs değeri ve bu yayın iki katına ilişkin sinüs değeri aşağıdaki trigonometrik işlemlerle belirlenebilir:

1) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R} = \sqrt{\frac{(\sin \text{ver } \alpha)}{2}}$ $\{\sin \text{ver } (\alpha) = \text{ok } (\alpha) = (1 - \cos \alpha)$ olarak tanımlanır$\}$.

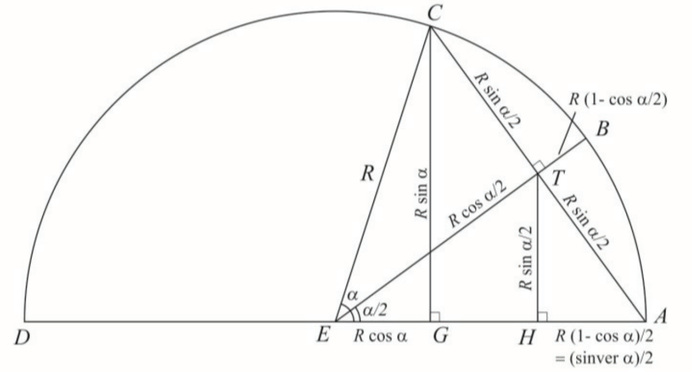
2) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha . \cos \alpha$

Örnek olarak 18°'lik yay verildiğine göre (sin 9°) ve (sin 36°)'nin hesaplanması

sin 18° = 0,3090169 = 18^{P} 32′ 28″,
cos 18° = 0,9510565 = 57^{P} 3′ 48″,
sin ver 18° = ok 18 = 0,0489435 = 2^{P} 56′ 12″,
$\sin 9° = \sqrt{0{,}5 \times 0{,}0489435} = 0{,}1564344 = 9^{P}\ 23'\ 10''$,
sin 36° = 2 × 0,3090169 × 0,9510565 = 0,587785 = 35^{P} 16′ 1″

Trigonometrik işlemlerin geometrik kanıtı (Şekil 5):

Merkezi E olan bir dairede α = < (CEA) ve $\alpha/2$ = < (BEA) açıları verilmiş olsun. ATE ve AHT dik üçgenleri benzer olduğundan $AE/AT = AT/AH$ ya da $AT^2 = AE \times AH$ yazılabilir. Ancak $AH = AG/2 = R(1 - \cos \alpha)/2 = R(\sin \text{ver } \alpha)/2$ olduğundan $AT = R \sin \alpha/2 = \sqrt{AE.AH} = \sqrt{R^2.(\sin \text{ver } \alpha)/2}$ yazılabilir. Ayrıca ECA üçgeni alanı iki ETA üçgeni alanına eşit olduğundan: $GC.AE = 2.AT.ET$ ya da $(\sin \alpha) = 2.(\sin \alpha/2).(\cos \alpha/2)$ olduğu görülür.



Şekil 5

3- Bilinen iki yayın toplam ya da farkına ilişkin sinüs, bir yayın sinüsü ile diğerinin kosinüsü ve kosinüsü ile diğerinin sinüsü toplam ya da farkına eşittir

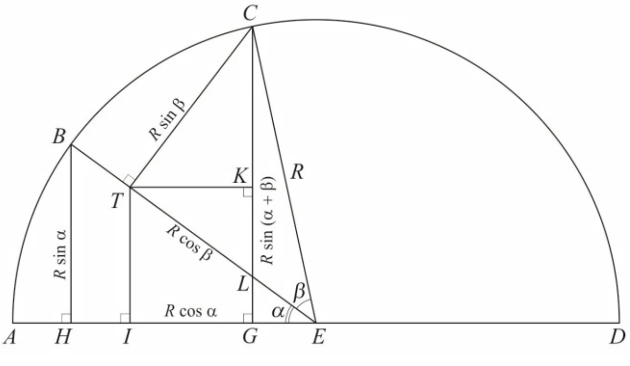
Bu ifade iki açının toplam ya da farkının sinüsünü açıların sinüs ve kosinüs değerleri cinsinden belirlemeye yarar:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta \pm \cos\alpha \,.\, \sin\beta$$

Toplam formülünün geometrik kanıtı: *Şekil 6* gereği, benzer *HBE* ve *ITE* dik üçgenlerinden $BE/TE = BH/TI$ ya da $TI = (BH\times TE)/BE = (R.\sin\alpha).(R.\cos\beta)/R$ ve aynı şekilde benzer *HBE* ve *KCT* dik üçgenlerinden $BE/HE = CT/CK$ ya da $CK = (HE\times CT)/BE = (R.\cos\alpha).(R.\sin\beta)/R$ yazılabilir. Şu halde

$CG = CK + KG = TI + CK = R(\sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta) = R\sin(\alpha \pm \beta)$

elde edilir.



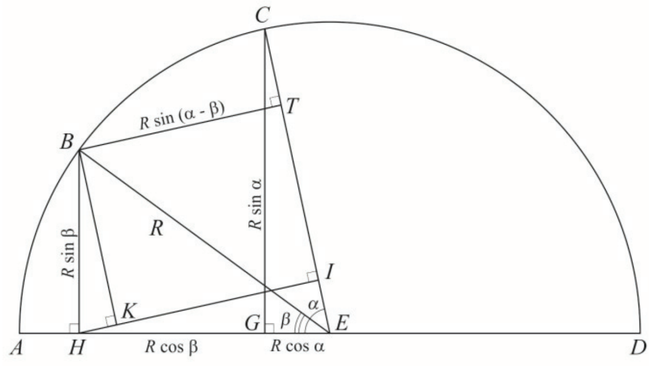
Şekil 6

Fark formülünün geometrik kanıtı: Şekil 7 gereği, benzer *IHE* ve *GCE* dik üçgenlerinden $EC/CG = EH/HI$ ya da $HI = (CG\times EH)/EC = (R.\sin\alpha).(R.\cos\beta)/R$ ve aynı şekilde benzer *GCE* ve *KBH* dik üçgenlerinden $EC/EG = BH/HK$ ya da $HK = (EG\times BH)/EC = (R.\cos\alpha).(R.\sin\beta)/R$ yazılabilir. Şu halde $IK = HI - HK = R(\sin\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\beta) = R\sin(\alpha - \beta)$ elde edilir.

Örnek olarak (sin 15°) ve (sin 18°) verilmiş (sin 33°) ve (sin 3°) belirlenmek istensin. Bu durumda:

(sin 15°).(cos 18°) = (sin 15°).(sin 72°) = (0,258819).(0,9510565) = (0,2461515)
(sin 18°).(cos 15°) = (sin 18°).(sin 75°) = (0,3090169).(0,9659258) = (0,2984874)
(sin 33°) = (0,2461515) + (0,2984874) = (0,5446389) = $32^{P}\ 40'\ 42''$
(sin 3°) = [sin (18°–15°)] = (0,2984874) – (0,2461515) = (0,0523359) = $3^{P}\ 8'\ 24''\ 34^{(3)}$

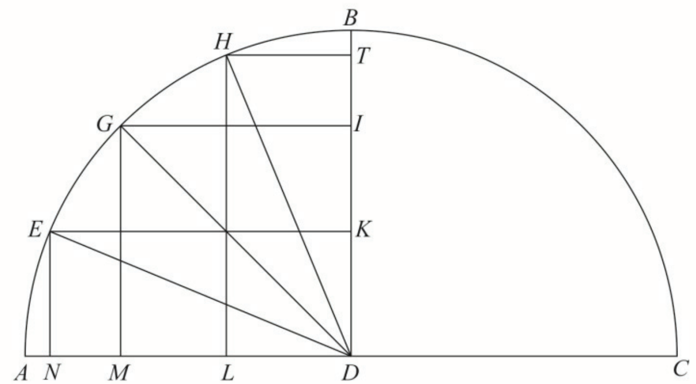
elde edilir.



Şekil 7

4- 1° yaya ilişkin sinüs değerinin gerçeğinden fazla sapmayacak bir şekilde yaklaşık belirlenmesi

Bu yöntem eşit aralıklı yaylara ilişkin sinüs değerleri merkeze doğru yaklaşırken genliklerinin gittikçe artmasına rağmen aralarındaki farkın gittikçe küçülmesi özelliğine dayanır. Varsayım gereği *AE*, *EG*, *GH*, *HB* yayları eşittir (Şekil 8). Bunlara ilişkin sinüs değerleri *EN*, *GM*, *HL* ve *BD* doğrularıyla ifade edilebilir. Bu doğruların boyları gittikçe büyümekle birlikte sinüslerin farkını veren *IK*, *TI* ve *BT* doğrularının boyları gittikçe küçülür.



Şekil 8

Yukarıda verilen ilkeden yararlanarak 1° yaya ilişkin sinüs değerinin gerçeğe yakın belirlemeye çalışalım. Bu yaklaşımda 1° yaya en yakın 3 yayın sinüsü hesaplanır ve bu 3 sinüs değerinden 1°'nin sinüsü belirlenmeye çalışılır. Bilindiği gibi (45° – 30°) = 15° ve 360°/20 = 18° olduğundan 3'cü kural gereği (sin 15°) ve (sin 18°) değerlerinden fark alma yöntemiyle (sin 3°) hesaplanmıştı.

Eğer 3° yayın iki kez yarı değeri alınırsa:

$$3°/2 = (1° \ 30')$$
$$(1° \ 30')/2 = (0° \ 45') = (1 - 1/4)° = (1 - 4/16)°$$

bulunur, sonuncu yayın sinüsü [sin (1 – 4/16)°] = (0^P 47′ 7″ $21^{(3)}$ $9^{(4)}$ $30^{(5)}$) olarak elde edilir.

Aynı şekilde 18°/2 = 9° yayının da üç kez yarı değeri alınırsa:

$$9°/2 = (4° \ 30')$$
$$(4° \ 30')/2 = (2° \ 15')$$
$$(2° \ 15')/2 = (1° \ 7' \ 30'') = (1 + 1/8)° = (1 + 2/16)°$$

sonuncu ifadeden [sin (1 + 2/16)°] = 1^P 10′ 40″ $52^{(3)}$ $34^{(4)}$ $0^{(5)}$ bulunur.

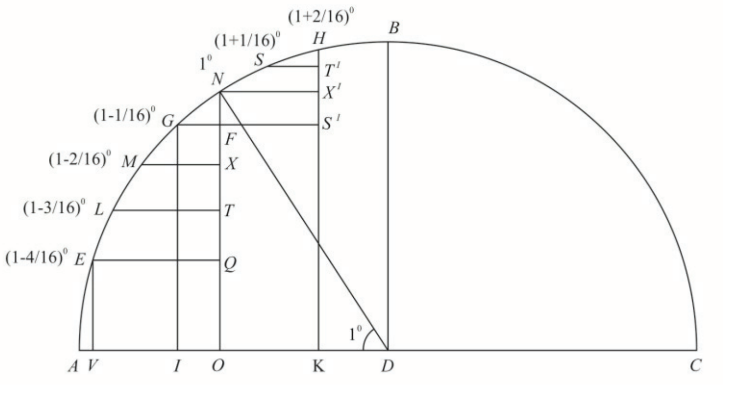
Benzer şekilde 15° yaya da aynı işlem uygulanırsa:

$$15°/2 = (7° \ 30')$$
$$(7° \ 30')/2 = (3° \ 45')$$
$$(3° \ 45')/2 = (1° \ 52' \ 30'')$$
$$(1° \ 52' \ 30'')/2 = (0° \ 56' \ 15'') = (1 - 1/16)°$$

ve neticede [sin (1 – 1/16)°] = 0^P 58′ 54″ $7^{(3)}$ $59^{(4)}$ $1^{(5)}$ bulunur.

Elde edilen üç değer, trigonometrik olarak belirlenen ve 1°'ye en yakın olan üç yayın sinüs değerine karşı düşer. Bu üç yayı *D* merkezli ve *AD* yarıçaplı bir *ABC* dairesinin üzerine işleyelim (Şekil 9):

$$\text{yay } AE = 45' = (1 - 4/16)°$$
$$\text{yay } AG = 56' \ 15'' = (1 - 1/16)°$$
$$\text{yay } AH = 1° \ 7' \ 30'' = (1 + 2/16)°$$



Şekil 9 (Bu şekil ölçekli değildir)

Görüldüğü gibi her yayın arasında 3°/16 kadar bir fark vardır. Buna göre *EG* arası *L* ve *M* noktalarıyla, *GH* arası *N* ve *S* noktalarıyla üç eşit kısma ayrılırsa yaylara ilişkin açılar ve sinüs değerleri aşağıdaki gibi elde edilir:

Yay	*AE*	*AL*	*AM*	*AG*	*AN*	*AS*	*AH*
Açı	(1 – 4/16)°	(1 – 3/16)°	(1 – 2/16)°	(1 – 1/16)°	1°	(1 + 1/16)°	(1 + 2/16)°
Sinüs	$0^P\,47'\,7''\,21^{(3)}\,9^{(4)}\,30^{(5)}$	–	–	$0^P\,58'\,54''\,7^{(3)}\,59^{(4)}\,1^{(5)}$	–	–	$1^P\,10'\,40''\,52^{(3)}\,34^{(4)}\,0^{(5)}$

Burada amaç, *AE*, *AG* ve *AH* yaylarına ilişkin sinüs değerleri bilindiğine göre bilinmeyen *AN* = 1° sinüs değerini yaklaşık belirlemektir. Bunun için yukarıda verilen özellikten yararlanılır. Sinüs farkları merkeze yaklaştıkça gittikçe küçüldüğüne göre aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir ve sin 1° değeri bilinen büyüklükler cinsinden kestirilebilir:

$$FO = GI$$

$$FQ/3 > FX > FN$$

$$(GI + FQ/3) = (FO + FQ/3) > NO = (\sin 1^\circ)$$

$$FN = S'X'$$

$$HS'/3 < FN = S'X'$$

$$(FO + HS'/3) < NO = (\sin 1^\circ) < (FO + FQ/3)$$

Buna göre hesap şöyle yürütülür:

$$\begin{array}{lr} GI = FO = \sin(1 - 1/16)^\circ = & 0^P\ 58'\ 54''\ \ 7^{(3)}\ 59^{(4)}\ \ 1^{(5)} \\ EV = QO = \sin(1 - 4/16)^\circ = \sin 45' = & \underline{-\ 0^P\ 47'\ \ 7''\ 21^{(3)}\ \ 9^{(4)}\ 30^{(5)}} \\ FQ = GI - EV = & 0^P\ 11'\ 46''\ 46^{(3)}\ 49^{(4)}\ 31^{(5)} \\ FQ/3 = & \underline{+\ 0^P\ \ 3'\ 55''\ 35^{(3)}\ 36^{(4)}\ 30^{(5)}} \\ FO + FQ/3 & 1^P\ \ 2'\ 49''\ 43^{(3)}\ 35^{(4)}\ 31^{(5)} \end{array}$$

NO = (sin 1°) bu değerden daha küçüktür.

$$\begin{array}{lr} HK = \sin(1 + 2/16)^\circ = & 1^P\ 10'\ 40''\ 52^{(3)}\ 34^{(4)}\ \ 0^{(5)} \\ GI = FO = \sin(1 - 1/16)^\circ = \sin 45' = & \underline{-\ 0^P\ 58'\ 54''\ \ 7^{(3)}\ 59^{(4)}\ \ 1^{(5)}} \\ HS' = GI - GI = & 0^P\ 11'\ 46''\ 44^{(3)}\ 24^{(4)}\ 59^{(5)} \\ HS'/3 = & \underline{+\ 0^P\ \ 3'\ 55''\ 34^{(3)}\ 51^{(4)}\ 39^{(5)}} \\ FO + HS'/3 & 1^P\ \ 2'\ 49''\ 42^{(3)}\ 50^{(4)}\ 40^{(5)} \end{array}$$

NO =sin 1° bu değerden daha büyüktür.

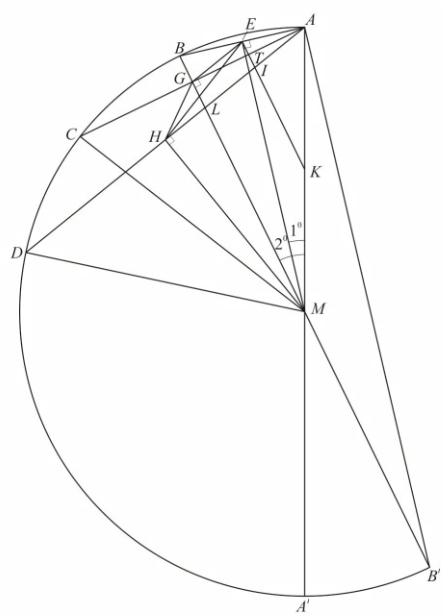
Her iki değer arasındaki farkın yarısı alınır ve büyük değerden çıkarılırsa (sin 1°) değeri büyük bir yaklaşıklıkla bulunmuş olur:

$$
\begin{array}{ll}
\sin 1° < & \;\;1^{P}\,2'\,49''\,43^{(3)}\,35^{(4)}\,31^{(5)} \\
\sin 1° > & \underline{-\,1^{P}\,2'\,49''\,42^{(3)}\,50^{(4)}\,40^{(5)}} \\
\text{Fark} & \;\;0^{P}\,0'\;\;0''\;\;0^{(3)}\,44^{(4)}\,51^{(5)} \\
\text{Fark/2} & \underline{-\,0^{P}\,0'\;\;0''\;\;0^{(3)}\,22^{(4)}\,25^{(5)}\,30^{(6)}} \\
\sin 1° \cong & \;\;1^{P}\,2'\,49''\,43^{(3)}\,13^{(4)}\;\;5^{(5)}\,30^{(6)}
\end{array}
$$

Bu değer, Uluğ Bey'in *Zic*'inde sinüs çizelgelerinde kullandığı değere çok yakındır.

5- Kadızade'nin 1° yay sinüsünü yaklaşık belirlemede kullandığı cebirsel yöntem

Kadızade tarafından önerilen Cebirsel yöntemin alt yapısı da temelde geometrik bir altyapıya dayanır. Bunun içi *M* merkezli *AM* yarıçaplı *ABCDA'* yarı daireyi göz önünde bulunduralım (Şekil 10).



Şekil 10 (Bu şekil ölçekli değildir)

Bu yarı dairenin üzerinde $AB = BC = CD$ yaylarının 2° olduğunu varsayalım. Bu durumda $AM = BM = CM = DM = R$ yarıçapları ve $AB = BC = DC = a_{1/180}$, $AC = a_{1/90}$ nihayet $AD = a_{/60}$ kirişleri elde edilir. Eğer *AM* yarıçapının *K* orta noktası belirlenir ve $AK = R/2$ yarıçaplı *AEBHM* dairesi çizilirse, bu daire *AB*, *AC* ve *AD* kirişini sırasıyla *E*, *G* ve *H* noktasında keser. Burada *EM*, *GM* ve *HM* doğruları yarı küçük *AEGM* dairesi üzerinde bulunduklarından *AB*, *AC* ve *AD* kirişlerine diktirler. Eğer *EK* doğrusu çizilirse bu doğru *AG* kirişini *T* ve *AD* kirişini *I* noktasında keser. *AB* = *BC* ve *AG* = *GC* olduğundan *G* noktası *BM* yarıçapı üzerindedir ve *BGM* doğrusu *AD* kirişini *L* noktasında keser.

BAC ve *CAD* açıları eşittir, benzer *ABL* ve *AEI* üçgenleri nedeniyle *ET* = *TI* ve *BG* = *GL* ilişkileri geçerli ve *EK* ile *BM* doğruları paraleldir. *AEGH* yamuğunun *AE* ve *AH* kenarı için aşağıdaki ilişkiler yazılabilir:

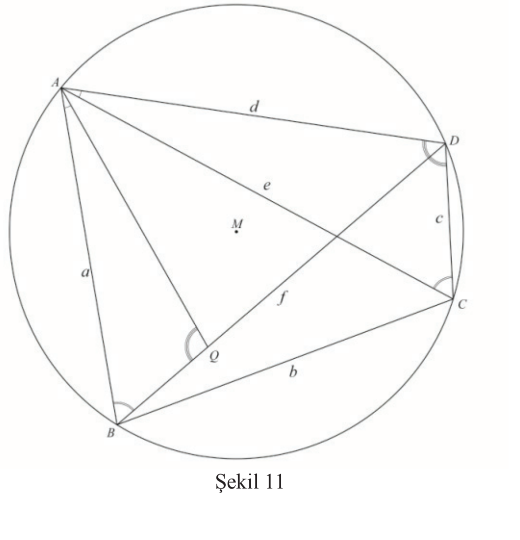
$$GH = AE = AB/2 = a_{1/180}/2 = R.(\sin 1°),$$
$$AG = AC/2 = a_{1/120}/2 = R.(\sin 2°),$$
$$AH = AD/2 = a_{1/60}/2 = R.(\sin 3°),$$
$$AD = a_{1/30}/2 = R.(\sin 6°).$$

Ayrıca *AEGH* yamuğunun köşeleri *K* merkezli *AEKG* dairesi üzerinde bulunduğundan karşı kenar çarpımları toplamı köşegenlerin çarpımına eşittir (Ptolemeus teoremi[5])

$$AE \times GH + EG \times AH = AG \times EH$$
$$AE^2 + EG \times AH = AG^2$$

ya da verilen büyüklükler cinsinden aşağıdaki ilişki elde edilir:

[5] Ptolemeus teoreminin kanıtı (*Şekil 11*): *ABCD* dörtgeni *M* merkezli dairenin üzerinde yer almaktadır. Teoremi kanıtlamak için *DB* kenarı üzerinde *DAC* ve *BAQ* açıları eşit olacak şekilde bir *Q* noktası seçilir. Eşit açılı *DAC* ve *QAC* üçgenleri benzerdir ve $d/AQ = e/a = c/BQ$ ilişkilerinden $(e \times BQ) = (a \times c)$ yazılabilir. Benzer şekilde eşit açılı *DAQ* ve *CAB* üçgenleri de benzerdir ve $d/e = AQ/a = QD/b$ ilişkilerinden $(e \times QD) = (b \times d)$ yazılabilir. Elde edilen iki ifade toplanırsa $[(e \times BQ) + (e \times QD)] = e(BQ + QD) = (b \times d) + (a \times c)$ ya da $(e \times f) = (b \times d) + (a \times c)$ elde edilir.



Şekil 11

$$R^2.(\sin 1°)^2 + (R.\sin 1°).(R.\sin 3°) = AG^2 = N$$

Eğer $x = R(\sin 1°)$ bilinmeyen büyüklük olarak tanımlanırsa, $AG = R.(\sin 2°)$ ile aranan x büyüklüğü için aşağıdaki ikinci mertebeden denklem geçerli olur:

$$x^2 + x\,(\sin 3°) - (\sin 2°)^2 = 0$$

Burada $(\sin 3°) = (0{,}0523359\ \ldots) = 3^{P}\ 8'\ 24''\ 33^{(3)}\ 59^{(4)}\ 32^{(5)}\ 28^{(6)}\ 15^{(7)}$ olarak verilmiş olmakla birlikte $(\sin 2°)$ değeri bilinmemektedir[6]. Bu nedenden dolayı Kadızade AG kirişini bilinmeyen $x = (\sin 1°)$ cinsinden ifade etmeye çalışır.

Şekil 10'daki ABB' dik üçgeninde $AB^2 = BG \times 2R$ ya da $BG = AB^2/2R$ geçerlidir ve ayrıca ABG dik üçgenine Pitagoras teoremi uygulanırsa $AG^2 = AB^2 - BG^2 = AB^2 - (AB^2/2R)^2$ elde edilir. Ancak $AB = 2.AE = 2.x$ olduğuna göre $AG^2 = 4x^2 - (2x^2/R)^2 = 4x^2 - 4x^4/R^2$ yazılabilir. Yukarıdaki ifadeye uygulanırsa $R^2.x^2 + (R.x).(R.\sin 3°) = AG^2 = R^2[4x^2 - 4x^4/R^2]$ ve ayrıca $(R^2.x)$'le kısaltır ve $R = 60^{P}$ olduğu göz önünde bulundurulursa, $p = 1/45^{P}$ ve $q = (\sin 3°)/3$ olmak üzere aşağıda verilen üçüncü mertebeden denklem elde edilir:

$$x = \frac{4x^3 + R^2(\sin 3°)}{5R^2} = \frac{x^3 + 15^P(\sin 3°)}{45^P} = \frac{x^3}{45^P} + \frac{(\sin 3°)}{3} = px^3 + q$$

Kadızade bu denklemi $(x - q) = px^3$ şeklinde yazar ve çözebilmek için sürekli bir köke doğru yakınsayan özyinelemeli (*rekürsif*) bir yöntem uygulayarak çözümü bulmaya çalışır. Aranan büyüklük $x = (\sin 1°)$ küçük bir değer olduğundan ilk yaklaşık çözümün $x_1 = q$ olduğunu varsayar. Bu durumda denklemde pq^3 kadar bir fark kalır. Kadızade ikinci tahmininde kalan miktarı ilk tahmine ekler. Bu durumda ilk iki ve daha sonraki tahminler şu şekilde sıralanır:

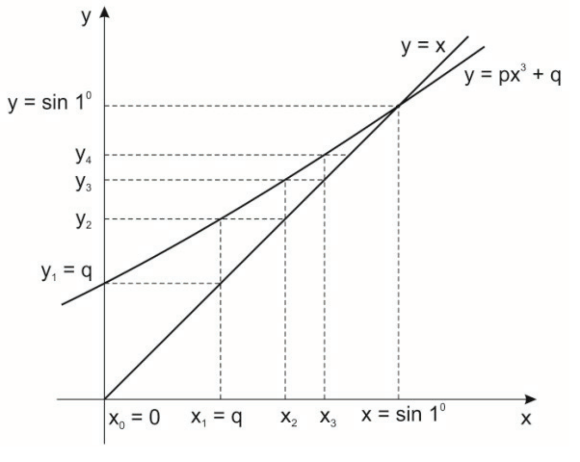
$$\begin{aligned}
x_1 &= q\\
x_2 &= q^3p + q = x_1^3p + q\\
x_3 &= (q^3p + q)^3p + q = x_2^3p + q\\
x_4 &= [(q^3p + q)^3p + q]^3p + q = x_3^3p + q\\
x_5 &= \{[(q^3p + q)^3p + q]^3p + q\}^3p + q = x_4^3p + q\\
&\ldots\\
x_n &= x_{n-1}^3p + p
\end{aligned}$$

6 Bu ikinci mertebeden denklem $x = -\frac{(\sin 3°)}{2} + \sqrt{\frac{(\sin 3°)^2}{4} + (\sin 2°)^2} = 0{,}0174524$ şeklinde $(\sin 1°)$'nin aranan çözümünü verir.

Tahminler hep aynı özgün denkleme uygulandığından çözüm özyinelemeler sonucunda denklemin kökü olan aşağıdaki değere yakınsar:

$$x = \sin 1° = 1^P\ 2'\ 49''\ 43^{(3)}\ 13^{(4)}\ 11^{(5)}\ 14^{(6)}\ 44^{(7)}\ 16^{(8)}\ 26^{(9)} = 0{,}017452406437$$

Kadızade'nin uyguladığı yöntem Şekil 13'te verilen diyagramla açıklık kazanır. Aranan $x = y = \sin 1°$ çözümü $y = x$ doğrusu ve üçüncü mertebeden $y = px^3 + q$ eğrisinin kesişim noktasına karşı düşer. Yukarıda yapılan tahminler şekilde görüldüğü gibi noktalı basamakları izleyerek hızlı bir şekilde çözüme doğru yakınsar.



Şekil 12

Sonuç

Uluğ Bey, sin 1°'yi, bilinen yaylardan geometrik elde ettiği 3°'nin sinüsünü, bir açıyı geometrik olarak 3'e bölemediği için, yine geometrik yöntemlerden elde ettiği (1 – 1/16)°, (1 + 2/16)° ve (1 – 4/16)° = 45′ açılarına ilişkin yaylardan yaklaşık türetir. Bulduğu yaklaşık değer altmış tabanlı sayı sisteminde $\sin 1° \cong 1^P\ 2'\ 49''\ 43^{(3)}\ 13^{(4)}\ 5^{(5)}\ 30^{(6)} = 0{,}0174524\ \ldots$ değerini verir. Bu yöntemin temeli Batlamyus'a dayanır. Ne var ki Batlamyus 3°'nin sinüsünü bulduktan sonra yarı formüllerden yararlanarak sin (3/2)° = 0,01745130 ve sin (3/4)° = 0,01745279 değerlerinden sin 1° için aşağıdaki kestirimi yapar:[7]

$$0{,}01745130 < \sin 1° < 0{,}01745279$$

Uluğ Bey'in bulduğu açılar şüphesiz ki sin 1° için daha doğru bir değer verir.

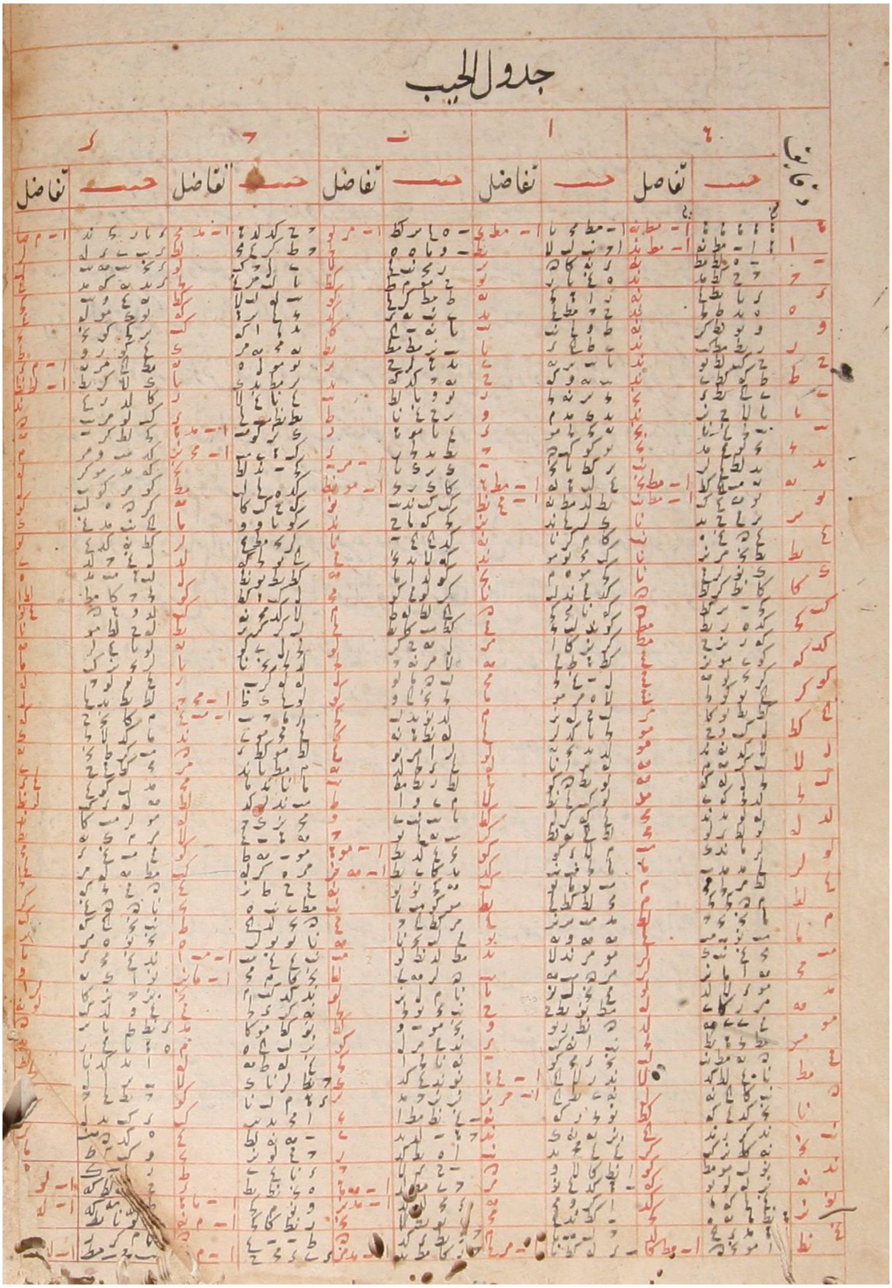
Buna karşın Kadızade'nin özyinelemeli yöntemi, birkaç adımda öngörülen doğruluğa ulaştığından çağının ötesinde modern bir yaklaşımı sergiler.

[7] G. J. Toomer, *Ptolemy's Almagest*, Duckworth, 1984, s.57.

Sinüs Çizelgesi

Dakikalar	0		1		2		3		4	
	Sinüs	Farkı	Sinüs	Farkı	Sinüs	Farkı	Sinüs	Farkı	Sinüs	Farkı
0	0 00 00 00 00	1 02 49 55	1 02 49 43 11	1 02 49 20	2 05 38 17 29	1 02 47 36	3 08 24 34 00	1 02 44 43	4 11 07 53 54	1 02 40 41
1	01 02 49 55	54	03 52 32 31	19	06 41 05 05	33	09 57 18 43	39	12 10 04 35	37
2	02 05 39 49	55	04 55 21 50	17	07 43 52 38	31	10 30 03 22	36	13 12 45 12	32
3	03 08 29 44	54	05 58 11 07	16	08 46 40 09	29	11 32 40 58	33	14 15 55 44	58
4	04 11 19 38	55	07 01 00 23	15	09 49 27 38	26	12 35 32 31	29	15 18 06 12	23
5	05 14 09 33	54	08 03 49 38	14	10 52 15 04	24	13 38 17 00	25	16 20 46 35	18
6	06 16 59 27	55	09 06 38 52	12	11 55 02 28	21	14 41 01 25	22	17 13 56 53	13
7	07 19 49 22	54	10 09 28 04	11	12 57 49 49	19	15 43 45 47	18	18 26 07 06	09
8	08 22 39 16	54	11 12 17 15	10	14 00 37 08	17	16 46 30 05	15	19 28 47 15	1 02 40 04
9	09 25 29 10	54	12 15 06 25	08	15 03 24 25	14	17 49 14 20	11	20 31 27 19	1 02 39 59
10	10 28 19 04	53	13 17 55 33	07	16 06 11 39	12	18 51 58 31	07	21 34 07 18	54
11	11 31 08 57	54	14 20 44 40	06	17 08 58 51	09	19 54 42 38	04	22 36 47 12	50
12	12 33 58 51	53	15 23 33 46	04	18 11 46 00	07	20 57 26 42	1 02 44 00	23 39 57 02	45
13	13 36 48 44	53	16 26 22 50	03	19 14 13 07	04	22 00 10 42	1 02 43 57	24 42 06 47	40
14	14 39 38 37	52	17 29 11 53	02	20 17 20 11	1 02 47 02	23 03 14 39	53	25 44 46 27	35
15	15 42 28 29	53	18 32 00 55	1 02 49 00	21 20 07 13	1 02 46 59	24 05 38 32	49	26 47 26 00	30
16	16 45 18 22	52	19 35 49 55	1 02 48 59	22 22 54 12	56	25 08 22 21	45	27 50 05 32	26
17	17 48 08 14	51	20 37 38 54	57	23 25 41 08	54	26 11 06 06	41	28 02 44 58	20
18	18 50 58 05	52	21 40 27 51	55	24 28 28 02	51	27 33 49 48	37	29 35 24 18	16
19	19 53 47 57	51	22 43 16 46	54	25 31 14 53	48	28 16 33 25	34	30 38 03 34	10
20	20 56 37 48	51	23 46 05 40	52	26 34 01 41	45	29 19 16 39	30	32 00 42 44	05
21	21 59 27 39	50	24 48 54 32	51	27 36 48 26	43	30 22 00 29	26	33 03 21 49	1 02 39 01
22	23 02 17 29	50	25 51 43 23	50	28 39 35 09	40	31 24 43 55	22	34 06 00 50	1 02 38 56
23	24 05 07 19	49	26 54 32 13	48	29 42 21 49	38	32 27 27 17	19	35 08 39 46	51
24	25 07 57 08	49	27 57 21 01	47	30 45 08 27	36	33 30 10 36	15	36 11 18 37	45
25	26 10 46 57	48	29 00 09 48	45	31 47 55 03	33	34 32 33 51	11	37 33 37 22	41
26	27 13 36 45	48	30 02 58 33	43	32 50 41 36	30	35 35 37 02	07	38 16 36 03	35
27	28 16 26 33	48	31 05 05 16	41	33 33 28 06	26	36 33 20 09	1 02 43 03	39 59 14 38	30
28	29 19 16 21	47	32 08 35 57	40	34 50 14 32	23	37 41 03 12	1 02 42 58	40 21 33 08	25
29	30 22 06 08	47	33 11 24 37	38	35 59 00 55	21	38 43 46 10	54	41 24 31 33	20
30	31 24 54 54	46	34 14 13 45	36	37 01 47 16	18	39 46 29 04	50	42 27 09 13	15
31	32 27 44 40	45	35 17 01 51	35	38 04 33 34	15	40 49 11 54	47	43 29 48 08	10
32	33 30 35 25	45	36 19 50 26	33	39 07 19 49	12	41 51 54 41	43	44 32 26 18	1 02 38 04
33	34 33 25 10	44	37 22 38 59	31	40 10 06 01	09	42 54 36 24	39	45 35 04 22	1 02 37 57
34	35 36 14 54	43	38 25 26 30	29	41 12 52 10	06	43 57 20 03	35	46 37 42 21	54
35	36 39 04 37	43	39 28 15 59	27	42 15 38 16	03	45 00 02 38	31	47 40 20 15	49
36	37 41 54 20	42	40 31 04 26	26	43 18 24 19	1 02 46 00	46 02 45 09	26	48 42 58 04	43
37	38 44 44 02	41	41 33 52 52	24	44 21 10 19	1 02 45 57	47 05 27 35	22	49 45 35 47	38
38	39 47 33 43	40	42 36 41 16	22	45 23 56 16	55	48 08 09 57	18	50 48 13 25	33
39	40 50 23 23	40	43 39 25 28	10	46 26 42 11	52	49 10 52 15	13	51 50 50 58	27
40	41 53 53 03	39	44 42 17 57	18	47 29 28 03	48	50 13 34 28	09	52 52 28 25	22
41	42 56 02 42	38	45 45 06 15	16	48 32 13 51	45	51 16 16 37	05	53 56 05 47	17
42	43 58 52 20	37	46 47 54 31	14	49 34 59 36	42	52 18 58 42	1 02 42 01	54 58 43 04	11
43	45 01 41 57	37	47 50 42 45	12	50 37 45 18	39	53 21 40 43	1 02 41 57	56 01 20 15	06
44	46 04 31 34	36	48 53 30 57	11	51 40 30 57	36	54 24 22 40	53	57 03 57 21	1 02 37 01
45	47 07 21 10	35	49 56 19 08	08	52 43 16 33	33	55 27 04 33	48	58 06 34 22	1 02 36 55
46	48 10 10 45	34	50 59 07 16	06	53 46 02 06	29	56 29 47 21	44	4 59 09 11 17	50
47	49 13 00 19	33	52 01 55 22	04	54 48 47 35	26	57 32 28 05	40	5 00 11 48 07	44
48	50 15 49 52	32	53 04 43 26	02	55 51 33 01	23	58 35 09 45	35	01 14 24 51	41
49	51 18 39 24	31	54 07 31 28	1 02 48 00	56 54 18 24	20	3 59 37 51 20	31	02 17 01 32	31
50	52 21 28 55	30	55 10 19 28	1 02 47 57	57 57 03 44	17	4 00 40 32 51	26	03 19 38 03	27
51	53 24 48 25	29	56 13 07 25	55	2 58 59 49 01	13	01 43 14 17	22	04 22 14 30	22
52	54 27 07 54	28	57 15 55 20	54	3 00 02 34 14	10	02 45 45 39	18	05 24 50 52	17
53	55 29 57 22	27	58 18 43 14	52	01 05 19 24	07	03 48 36 57	13	06 27 27 09	11
54	56 32 46 49	27	1 59 21 31 06	50	02 08 04 31	03	04 51 18 10	09	07 30 03 20	05
55	57 35 36 16	25	2 00 24 18 56	47	03 10 49 34	1 02 45 00	05 53 59 19	04	08 32 29 25	1 02 36 00
56	58 38 35 41	24	01 26 06 43	45	04 13 34 34	1 02 44 57	06 56 40 23	1 02 41 00	09 35 15 25	1 02 35 54
57	0 59 41 15 05	23	02 29 54 28	43	05 16 19 31	53	07 59 21 23	1 02 40 55	10 57 51 19	48
58	1 00 44 04 28	22	03 32 42 11	40	06 19 04 24	50	09 02 02 18	50	11 40 27 07	42
59	1 01 46 53 50	1 02 49 21	2 04 35 29 51	1 02 47 38	3 07 21 49 14	1 02 44 46	4 10 04 43 08	1 02 40 46	5 12 43 02 49	1 02 35 37

Çizelge 1- Uluğ Bey'in *Zic*'inde sinüs cetvelinin ilk sayfası. Özgün metindeki ebcet hesabıyla verilen sayılar günümüz rakamlarına çevrilmiş ancak 60 tabanlı sayılar aynen korunmuştur (Resim 1'e bakınız).



Resim 1- *Zic-i Uluğ Bey*, Topkapı Sarayı Müzesi, Revan 1714, v. 26a.

The influence of the Samarkand school of astronomy and mathematics on the Ottomans: Ulugh Beg's approximate method of calculating sinus 1°

In his *Zij*, Ulugh Beg (1393-1449) pointed to the importance of calculating the exact value of sin 1° which is needed for the calculation of the sine and tangent tables. He says that nobody before him has given its exact value and that he has written a treatise accounting for his calculation of sinus 1° and the above mentioned tables. The work Ulugh Beg referred is the *Treatise for determining the sine of 1° by Ghiyāth al-Dīn al-Kāshī's method.*

In the present article, we investigate how Ulugh Beg derived sin 1° and compared his result with the one given by Ptolemeus. Ulugh Beg derived sin 1° value from the geometrically known cords of the (1 – 1/16)°, (1 + 2/16)° and (1 – 4/16)° = 45′ angles. The approximate value he calculated is sin 1° ≅ 1^{P} 2′ 49″ $43^{(3)}$ $13^{(4)}$ $5^{(5)}$ $30^{(6)}$ ≅ 0,0174524 … expressed in sexagesimal system. This value is much better than the Ptolemeus' value, who used two times the half formulas for sin 3° and then took the average value of sin (3/2)° = 0,01745130 and sin (3/4)° = 0,01745279. Far in advance of his time, the recursive method used by Kadızade gave in few steps the exact value for sin 1°, a method which can be evaluated as a very modern approach.

Key words: Ulugh Beg, zij, sinus 1°, astronomical tables, geometrical method, angle trisection.

Semerkand Astronomi ve Matematik Ekolünün Osmanlı'ya Etkisi: Uluğ Bey'in Sinüs 1°yi Yaklaşık Belirleme Yöntemi

Uluğ Bey (1393-1449), *Zic*'inde, sinüs ve gölge (tanjant) cetvellerinin bulunuşunu sinüs 1°nin bulunuşuna dayandırır ve kendi dönemine kadar kimsenin sin 1°nin tam değerini vermeyi başaramadığını ifade eder. Ayrıca çok önemli bulduğu sinüs değerini çok hassas bir şekilde nasıl belirlediğini ve söz konusu çizelgeyi nasıl oluşturduğunu başka bir eserinde anlattığını söyler. Bu eser kütüphanelerimizde yazmaları mevcut olan Uluğ Bey'in *1°nin sinüsünü el-Kâşî'nin yöntemiyle belirleme risalesi*'dir.

Bu çalışmamızda, Uluğ Bey'in sin 1°yi nasıl elde ettiği konusu araştırılmış ve verdiği değer, daha önce Ptolemeus'un (Batlamyus) verdiği değerle karşılaştırılmıştır. Uluğ Bey sin 1°'yi, bilinen yaylardan geometrik yöntemlerle elde ettiği (1 – 1/16)°, (1 + 2/16)° ve (1 – 4/16)° = 45′ açılarına ilişkin yaylardan yaklaşık türetir. Altmış tabanlı sayı sisteminde sin 1° ≅ 1^{P} 2′ 49″ $43^{(3)}$ $13^{(4)}$ $5^{(5)}$ $30^{(6)}$ ≅ 0,0174524 … yaklaşık değerini bulur. Bu değer

Batlamyus'un 3°'nin sinüsünü bulduktan sonra yarı formüllerden yararlanarak elde ettiği sin (3/2)° = 0,01745130 ve sin (3/4)° = 0,01745279 değerlerinin ortalamasından çok daha doğrudur. Buna karşın aynı dönemde geliştirilen Kadızade'nin özyinelemeli yöntemi, birkaç adımda sin 1° için, öngörülen doğruluğa ulaştığı için çağının ötesinde modern bir yaklaşım sergiler.

Anahtar sözcükler: Uluğ Bey, zic, sinüs 1°, geometrik yöntem, bir açının üçe bölünmesi.