Araştırma Makalesi

Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 54: 357-384 [2022]
doi: 10.9779.pauefd. 814059

Matematik Öğretmenlerinin ve Öğretmen Adaylarının Argüman Oluşturma ve Değerlendirme Süreçlerinin İncelenmesi*

Tuğçe Dalkılıç** Zülfiye Zeybek Şimşek ***

• ***Geliş Tarihi:*** *21.10.2020* • ***Kabul Tarihi:*** *19.10.2021* • ***Çevrimiçi Yayın Tarihi:*** *26.11.2021*

Öz

Öğretim programlarında matematiksel ispatlara verilen değerin vurgulanması, her sınıf düzeyinde öğrencilerin akıl yürütme, sorgulama ve neden sonuç ilişkisi kurabilme becerilerinin geliştirilmesine yönelik önerilerin artışına neden olmaktadır. Öğretim programlarında yer alan matematiksel ispatlara yönelik bu öneriler matematik öğretmenlerinden beklentileri arttırmaktadır. Oysaki mevcut çalışmalar, öğretmen ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreci ile ilgili yaşadıkları zorlukları belgelemektedir. Bu çalışmada öğretmen ve öğretmen adaylarının argüman oluşturma ve değerlendirme süreçlerinin incelenmesi hedeflenmiştir. Belirtilen hedef doğrultusunda üç matematik öğretmeni ve üç öğretmen adayından oluşan katılımcı grubuyla yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Yapılan görüşmelerde katılımcılara dört matematiksel ifade sunulmuş, katılımcıların bu ifadelerin doğruluğunu/yanlışlığını analiz etmeleri ve sonrasında verdikleri cevapları kanıtlamaları istenmiştir. Bunun yanı sıra, her matematiksel ifade için araştırmacılar tarafından geliştirilen üç farklı argüman sunularak katılımcıların bu argümanları ispat oluşturma ölçütleri doğrultusunda değerlendirmeleri beklenmiştir. Video kaydına alınan bireysel görüşmeler betimsel analiz yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Katılımcıların genel olarak matematiksel ifadelerin doğruluğunu kolaylıkla değerlendirebildikleri ve yanıtlarını matematiksel bir argüman oluşturarak kanıtlayabildikleri tespit edilmiştir. Katılımcıların bazı ifadeler için argüman oluşturmakta zorlanmaları ve deneysel argüman oluşturma eğiliminde olmaları da çalışmanın bulguları arasında yer almaktadır. Sunulan argümanları değerlendirme sürecinde ise katılımcıların, dışsal faktörlerden etkilendikleri görülmüştür. Ayrıca, katılımcıların deneysel düzeydeki argümanları yeterli bulmadıkları; ancak, bu argümanları ispatı oluşturan adımlar olarak gördükleri ortaya çıkmıştır.

Anahtar sözcükler: argüman oluşturma, argüman değerlendirme, ispat, ispat şemaları, öğretmen eğitimi.

Atıf:

Dalkılıç T, ve Zeybek Şimşek, Z. (2022). Akademik Erteleme Matematik Öğretmenlerinin ve Öğretmen Adaylarının Argüman Oluşturma ve Değerlendirme Süreçlerinin İncelenmesi. *Pamukkale Eğitim Fakültesi Dergisi*, *54*, 357-384.doi:10.9779.pauefd.814059

* Bu araştırmada paylaşılan verinin bir bölümü Amasya'da düzenlenen uluslararası bir kongrede sunulmuştur.

** Türkiye Odalar ve Borsalar Birliği Ortaokulu, https://orcid.org/0000-0002-4211-2372,tugcealkn64@gmail.com

*** Doç. Dr., Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, https://orcid.org/0000-0003-1601-8654, zulfiye.zeybek@gop.edu.tr

Giriş

Matematiksel ifadelerin neden doğru veya yanlış olduğunun mantıksal olarak gerekçelendirilmesi, yani muhakeme yeteneğinin kullanılması, matematik eğitiminin önemli hedeflerinden biri olarak görülmektedir (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018; Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics-[NCTM], 2000). Bu önem ispat kavramının, matematiğin temelini oluşturmasının yanı sıra matematiksel bilginin yapısının anlaşılması ve iletişimin gerçekleşmesinde bir araç olmasından kaynaklanmaktadır (Knuth, 2002b). Okul matematiğinde ispat kavramına yönelik yapılan vurgu, ispat kavramını ilkokuldan liseye kadar bütün sınıf seviyelerinde matematik sınıflarının önemli bir bileşeni olması yönündeki tartışmaları gündeme getirmektedir (CCSSI, 2010; NCTM, 2000).

Matematik öğretim programlarında muhakeme etme, çıkarımda bulunma, eleştirel düşünme, analiz etme, argüman geliştirme gibi üst düzey becerilerin geliştirilmesinin önemi vurgulanmaktadır (CCSSI, 2010; MEB, 2018; NCTM, 2000). Amerika Birleşik Devletleri'nde yaygın olarak kabul gören matematik standartlarında —Devlet Ortak Çekirdek Standartları (The Common Core State Standards for Mathematics [CCSSI], 2010)— matematiksel muhakeme ve ispat etkinliklerinin önemi öğrencilerin ana okuldan lise son sınıfa kadar tüm sınıf seviyelerinde (a) soyut düşünme, (b) uygulanabilir matematiksel argümanlar oluşturma ve başkalarının argümanlarını kritik etme ve (c) açıklığa dikkat etme çağrısında bulunan 'Matematik Uygulamaları için Standartlar' kabul edilerek vurgulanmıştır. Bu standartlar akıl yürütme ve ispat etkinliklerinin, öğrencilerin tüm sınıf seviyelerinde bağımsız etkinlikler olarak değil; aksine günlük matematiksel deneyimlerinin vazgeçilmez bir parçası olarak planlanması gerektiğini belirtmektedir.

Knuth (2002a), öğretim programlarında yer alan matematiksel ispatların öğrencilerin matematiksel deneyimlerinin önemli bir bileşeni yapılması yönündeki bu önerilerin, matematik öğretmenlerinden beklentileri arttırmakta olduğunu ve matematik öğretmenlerinin sorumluluklarını arttırdığını belirtmiştir. Bu önerilerinin matematik öğretmenleri tarafından ne derece ve nasıl uygulanacağını etkileyen faktörler arasında öğretmenlerin (ve öğretmen adaylarının) ispat yapma düzeyleri önemli bir yer tutmaktadır. Örneğin, Martin ve Harel (1989) örnek sunmanın bir matematiksel ifadenin kanıtlanmasında geçerli bir yol olacağını düşünen öğretmenlerin sınıflarında bulunan öğrencilerin de benzer düşünme yapısına sahip olacağını savunmaktadırlar. Matematiksel ispatların daha erken sınıf seviyelerinden itibaren matematik sınıflarının bir parçası olması gerektiği yönündeki öneriler ele alındığında, matematik öğretmenlerinin argüman oluşturma ve değerlendirme süreçlerinin incelenmesi önem kazanmaktadır. Bu doğrultuda, bu çalışma ortaokul matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarının argüman oluşturma ve değerlendirme süreçlerine odaklanmaktadır.

İlgili literatür incelendiğinde, öğretmen ve öğretmen adaylarının ispat yapma konusunda çeşitli zorluklar yaşadığı görülmektedir (bkz., Simon ve Blume, 1996; Stylianides ve Stylianides, 2009; Zeybek-Şimşek, 2020). Bu zorlukların genellikle matematiksel kavramların anlaşılmasından, ispatın mantıksal yapısının kavranması ve uygulanmasından veya matematiksel dilinin doğru kullanımından kaynaklandığı söylenebilir (bkz., Epp, 2003; Zeybek-Simsek, 2020). Stylianides ve Stylianides (2009) matematiksel ispatlara yönelik yapılan çalışmaların genellikle sadece bireylerin argüman oluşturma süreçlerine veya sadece araştırmacılar tarafından oluşturulan argümanları değerlendirme süreçlerine odaklandıklarını belirtmişlerdir. Oysaki argüman oluşturma ve değerlendirme süreçlerinin farklı bilişsel seviyeler içerdiği göz önüne alındığında, bu süreçlerin ayrı ele alınması bireylerin ispat algıları hakkında farklı resimler ortaya koyabileceği düşünülmektedir. Stylianides ve Stylianides (2009) argüman oluşturma ve değerlendirme süreçlerinin birlikte incelenmesinin bireylerin ispat düzeyleri hakkında daha doğru yorum yapma fırsatı sunacağını iddia etmişlerdir. Bu öneri doğrultusunda bu çalışmada, matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının argüman oluşturma düzeylerinin yanı sıra sunulan argümanları kritik edebilme becerilerinin de incelenmesini amaçlanmaktadır.

Aşağıdaki araştırma problemleri çalışmaya yön vermiştir:

1. Matematik öğretmenlerinin sunulan matematiksel ifadelerin doğruluğunu/yanlışlığını kanıtlamak için oluşturdukları argümanlar hangi seviyededir?
    a. Matematik öğretmenlerinin sunulan argümanları değerlendirme ölçütleri nelerdir?
2. Matematik öğretmen adaylarının sunulan matematiksel ifadelerin doğruluğunu/yanlışlığını kanıtlamak için oluşturdukları argümanlar hangi seviyededir?
    a. Matematik öğretmen adaylarının sunulan argümanları değerlendirme ölçütleri nelerdir?

Matematiksel İspat Tanımları

Dedüktif (mantıksal ve kesin yargı bildiren) ve indüktif (deney ve gözleme dayalı) muhakeme arasındaki rol değişiminin ve her iki muhakeme şeklinin matematiksel düşünme yeteneğinin gelişiminde önemli bir araç olduğunun fark edilmesi, ispat kavramının gelişiminde önemli bir rol oynamıştır (Harel ve Sowder, 2007). İspatın her seviyede matematik sınıflarının merkezinde bulunması yönündeki öneriler (CCSSI, 2010; MEB, 2018; NCTM, 2000), matematik eğitimcilerinin ispatın okul matematiğindeki rolünü/misyonunu incelemesine ve ispat kavramını bütüncül bir bakış açısı ile tanımlamasına yol açmıştır (bkz., Balacheff, 1988; Stylianides, 2007). İlgili literatür incelendiğinde, ispat kavramına yönelik tanımların ispatın farklı boyutlarına (formal boyutu ve sosyokültürel boyutu) odaklandığı söylenebilir. Dede ve Karakuş'a (2014) göre matematiksel ispatın formal boyutunu, matematiksel bir bilginin doğrulanması sürecinde kullanılan tanım, doğruluğu önceden ispatlanan önerme, kural veya doğruluğu ispat gerektirmeyen postulat, aksiyom gibi öncüller oluştururken; ispatın sosyal ve kültürel boyutunu ise yapılan ispatın geçerliliği için kullanılan süreç, işlem ve yöntemler oluşturmaktadır. O halde, matematiksel ispat tanımları incelenirken hem ispatın formal boyutu hem de sosyokültürel boyutu göz önünde bulundurulmalıdır.

NCTM (2000) ispatı genel olarak "hipotezlerden titizlikle çıkarılan sonucu içeren argümanlar" olarak tanımlar (s.55). İspatın formal boyutunu ön plana çıkaran bir diğer tanım ise Bell tarafından yapılmıştır. Bell (1976) ispatı, "başlangıç noktası veri içinde bulunan ifadeler veya doğruluğu genel olarak kabul edilmiş ifade ve ilkelerden oluşan, varış noktası ise sonucu oluşturan birbirine mantıksal bir zincirle bağlı ifadeler ağacı olarak tanımlar" (s.26). Yıldırım'a (2000) göre ise ispat, "ispata konu olan genellemeyi doğru sayılan kimi öncüllerin (postulat veya ispatı verilmiş önermeler) mantıksal çıkarım kuralları aracılığı ile zorunlu sonuca ulaşmak için mantıksal yargılama diyebileceğimiz bir akıl yürütme sürecidir" (s. 51). Bu tanımlar matematiksel olarak uygun bir yol kullanan ispatlama sürecine odaklanırken, matematiksel ispatların temel öğelerini ve özellikle ispat yapma aşamasındaki sosyal öğeleri göz ardı etmektedir (Bieda, 2010). Simon ve Blume (1996) ispatın formal yönüne vurgu yapan tanımların altını çizdiği "ispat, doğruluğu bilinen, kanıtlanan veya kabul edilmiş ifade ve ilkelerin üzerine kuruludur" ilkesinin "ispat toplum tarafından kabul edilmiş bilgiler üzerine inşa edilmiş, toplum tarafından mantıksal görülen ve toplum tarafından daha önceden kabul edilmiş bilgiler ile uyuşan fikirlerden oluşan bir argümandır" (s. 6) şeklinde değiştirilmesi gerektiğini savunur. Benzer olarak, Stylianides (2007) ispatı, "matematiksel bir iddiayı doğrulamak veya çürütmek amacı ile oluşturulan birbirine anlamca bağlı bir dizi savdan oluşan, aşağıdaki karakteristik özelliklere sahip matematiksel bir argümandır:

1- Sınıf toplumu tarafından doğru olarak kabul edilmiş ve herhangi başka bir kanıta ihtiyaç duyulmayan matematiksel ifadeleri (dayanak noktaları) kullanır.

2- Sınıf toplumu tarafından bilinen ve geçerli olan veya sınıf toplumunun kavramsal erişim sınırları içerisindeki muhakeme biçimlerini (argümantasyon modları) kullanır.

3- İletişimde sınıf toplumu tarafından bilinen ve toplumun yapısına uygun olan veya sınıf toplumunun kavramsal erişim sınırları içerisindeki ifade etme biçimlerini (sunum modları) kullanır" (s. 291) olarak tanımlar.

Stylianides (2007) tarafından öne sürülen ispat tanımının katılımcıların argümanları değerlendirme süreçlerinin incelenmesinde faydalı olacağı düşünülmektedir. Bu tanımda ispat formal ispatlar ile sınırlı değildir; aksine sınıf topluluğunun özellikleri ve kavramsal erişim sınırları göz önünde bulundurulmuştur. Öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel ifadelerin doğruluğunu nasıl kanıtladıklarını ele alan bu çalışmada da benzer bir yaklaşım izlenmiştir. Bu nedenle çalışmada katılımcıların matematiksel ifadelerin doğruluğunu göstermek amacı ile sundukları her türlü gerekçeler matematiksel ispat yerine matematiksel argüman olarak adlandırılmıştır.

İspat Şemaları

Harel ve Sowder (1998), ispat (kanıt) şemasının sadece kanıt yöntemlerine odaklanmadığını, aynı zamanda bir kanıtı oluşturmak için kullanılan tüm bilişsel düşünme süreçleri içerdiğini belirtmişlerdir. Bu yönüyle ispat şemaları, bir bireyin matematiksel ifadelerin doğruluğunu (veya yanlışlığını) kanıtlamak için kullandığı tüm bilişsel süreçleri içermektedir. Bireyin kendisini veya başkasını ikna etmek için kullandığı tüm matematiksel düşünme süreçlerini içeren ispat şemaları, aynı zamanda bireyin ispat sürecinde yaptığı tercihleri de göstermektedir (Harel ve Sowder, 1998; 2007).

İlgili literatürde, bireylerin ispat yapma sürecindeki yaklaşımlarının genellikle indüktif (örneklere dayalı) ve dedüktif (formal ispat) olarak iki ana gruba ayrıldığı söylenebilir (Bell,1976; Van Dormolen, 1977). Örneğin, Bell (1976) ispat yapma sürecindeki yaklaşımları deneysel ve dedüktif gerekçelendirme olarak iki ana sınıfa ayırmıştır. Bell'e (1976) göre deneysel gerekçelendirmede iddianın doğruluğu örneklerle sağlanırken, dedüktif gerekçelendirmede ise mantıksal çıkarımlar kullanılmaktadır. Van Dormolen'nin (1977) de benzer bir sınıflandırma yaptığı söylenebilir. İspat yapma sürecindeki aşamaları iki ana sınıfa ayıran bu çalışmaların dışında, bu sınıfların alt kategorilere ayrılarak daha kapsamlı ele alındığı çalışmalar da mevcuttur. Örneğin, Balacheff (1988) pragmatik ve kavramsal ispat olarak iki ana sınıf kullanırken, daha sonra pragmatik ispatı kendi içinde üç alt gruba ayırmıştır. Öğrencilerin örnek kullanma şekillerini ve amaçlarını daha kapsamlı inceleyen

Balacheff (1988), pragmatik ispatları saf deneyselcilik, kritik deney ve genellenebilir örnek şeklinde üç alt grupta incelemiştir. Balacheff (1988), kavramsal ispatı ise düşünce deneyi olarak özelleştirilmiştir. Benzer olarak, Harel ve Sowder (1998; 2007), bireylerin ispat yapma sürecindeki karakteristik yaklaşımlarını dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana seviyede sınıflandırmıştır. Dışsal ispat seviyesinde bireyler argüman oluşturma süreçlerinde genellikle dışsal kaynaklara (örn., ders kitabı, öğretmen) bağlı kalırken; deneysel ispat seviyesinde ise bireylerin, bu süreçte belirli örneklerden genel yargılara ulaşma eğiliminde oldukları gözlemlenmektedir. Analitik ispat düzeyinde ise, bireylerin argümanlarını mantıksal çıkarımlar yoluyla oluşturdukları belirtilmiştir. Harel ve Sowder'ın (1998) belirttiği bu kategoriler Tablo 1'de özetlenmiştir.

Tablo 1. *İspat Şemaları*

Dışsal İspat Şeması	Deneysel İspat Şeması	Analitik İspat Şeması
Otoriter	Örnek Temelli	Dönüştürülebilen
Sembolik	Algısal	Aksiyomatik
Alışkanlık Edinilmiş		

Harel ve Sowder (2007) "…öğrencilerin gözünde ispat, öğretmenlerin belirlediği belli bir görünüme sahip olmalıdır…" ifadesini kullanarak dışsal ispat şemasının öğrenciler arasında yaygın olduğunu vurgulamaktadırlar (s. 822). Harel ve Rabin (2010) de yaptıkları araştırmada otoriteye bağlı düşünme şeklinin (dışsal ispat şemasının) üniversite öğrencileri arasında yaygın olduğunu kanıtlamışlardır. Dışsal ispat şemasının bu çalışmanın katılımcıları arasında da yaygın olabileceği düşünülerek dışsal ispat şemasını kapsamlı bir şekilde ele alan Harel ve Sowder (1998; 2007) tarafından ortaya konulan ispat şeması, çalışmanın kavramsal çerçevesi olarak kullanılmıştır. Veri toplama araçlarının oluşturulma süreci ile katılımcıların oluşturdukları argümanların analiz edilme aşamalarında, Tablo 1' de yer alan ispat şemaları yol gösterici bir görev almıştır. Tablo 1'de yer alan şemanın kullanımı hakkında daha detaylı bilgi yöntem bölümünde açıklanacaktır.

Yöntem

Araştırma Deseni

Matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının argüman oluşturma ve değerlendirme süreçlerinin incelendiği bu çalışma, nitel bir araştırma olarak planlanmıştır. Nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması araştırmanın desenini oluşturmuştur. Creswell'e (2007) göre durum çalışması; araştırmacının olay veya olayların gözlem, görüşme, rapor gibi birden fazla veri toplama aracı ile detaylı inceleme yapılarak olaylara ait görüşlerin belirlendiği nitel bir araştırma yaklaşımıdır. Öğretim programlarının matematiksel ispatların tüm sınıf seviyelerinde matematik derslerinin vazgeçilmez bir parçası olması gerektiği yönündeki önerileri, bu önerilerin odağında bulunan matematik öğretmenleri ve geleceğin matematik öğretmenlerinin çalışmanın durumu olarak belirlenmesinin sebebini oluşturmaktadır. Matematik öğretmenleri ve öğretmen adayları arasında bir karşılaştırmanın yapılması çalışmanın amaçları arasında yer almasa dahi, bu önerilerin hedefinde bulunan her iki grubun incelenmesinin önemli olduğu düşünülmüştür.

Katılımcı Grup

Çalışmanın katılımcıları, Orta Karadeniz bölgesinde bulunan bir il merkezindeki ortaokullarda görev yapmakta olan üç matematik öğretmeni (Deniz, Zehra ve Merve[1]) ve bu bölgede bulunan bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünün üçüncü sınıfında eğitim alan üç öğretmen adayından (Nurgül, Aslı ve Şeyma) oluşmaktadır. Katılımcılar kolay ulaşılabilir durum örnekleme metodu kullanılarak seçilmiştir. Singleton ve Straits'e (2005) göre kolay ulaşılabilir örnekleme; araştırmacının kolay uygulama yapabileceği grup arasından yeterli sayıda elemanı alıp örneklem olarak belirlemesi olarak ifade edilmektedir.

Çalışmaya katılan matematik öğretmenlerinin hepsinin cinsiyeti kadın olup, hizmet yılları 2-10 yıl arasında farklılaşmaktadır. Öğretmenlerden Deniz 10 yıl, Zehra 2 yıl ve Merve ise 5 yıllık öğretmenlik deneyimine sahiptir. Hizmet yıllarının farklı olması ve çalışmaya katılım gönüllüğü, matematik öğretmenlerinin seçim ölçütleri arasında yer almaktadır. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının hepsinin cinsiyeti kadın olup, 3. sınıfa devam eden öğrencilerden oluşmaktadır. Öğretmen adaylarının eğitim ve alan derslerinin çoğunu tamamlamış olmaları ve öğretmenlik uygulaması derslerini henüz tamamlamamış olmaları 3. sınıfa devam eden öğretmen adaylarının seçim kriterleri arasında bulunmaktadır. Öğretmen adaylarının eğitim ve alan derslerinin çoğunu başarı ile tamamlamış olmaları toplanan verilerin zenginliğini arttıracağı düşünülmüştür. Knuth (2002b) matematik öğretmenlerinin deneysel argümanların sınırlılıklarını bilmelerine rağmen öğrencilere uygun olduğunu düşündükleri için ispat olarak kabul ettiklerini belirtmiştir. Bu bağlamda düşünüldüğünde

[1] Bu çalışmada tüm katılımcılar takma isimler ile adlandırılmışlardır.

öğretmen adaylarının henüz öğretmenlik uygulaması derslerini tamamlamamış olmaları, sunulan argümanların öğrenci ölçütleri yerine kendi ölçütlerine göre değerlendirme olasılıkları göz önünde bulundurularak önemli görülmüştür. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çalışmaya katılmadaki istekleri ve gönüllülükler ise bir diğer seçim ölçütünü oluşturmaktadır.

Veri Toplama Araçları ve Veri Toplama Süreci

Matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarının argüman oluşturma ve değerlendirme süreçlerinin analiz edilmesini amaçlayan bu çalışmada, dört matematiksel ifadenin yer aldığı Matematiksel İfadeler Formu ve bu formda yer alan her bir ifade için hazırlanan üç argümandan oluşan Argüman Temsilleri Formu veri toplama araçları olarak kullanılmıştır. Çalışmanın verilerinin toplanması için katılımcılar ile 45-60 dakika süren yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler gerçekleştirilmiş ve tüm görüşmeler video kaydına alınmıştır. Bireysel görüşmeler yazarlardan biri tarafından boş bir sınıf ortamında gerçekleştirilmiştir. Bireysel görüşmeler esnasında, katılımcılardan önce matematiksel ifadeler formunda yer alan her bir matematiksel ifadeyi incelemesi ve ifadenin doğruluğuna (veya yanlışlığına) karar vermesi istenmiştir. Görüşme esnasında "Bu kanıya nasıl vardın?", "Bu ifadenin neden doğru olduğunu düşünüyorsun?" veya "Nasıl karar verdiğini açıklar mısın?" şeklinde sonda sorulardan yararlanılmıştır. Matematiksel ifadeler formunda yer alan ifadelere yönelik argüman oluşturmaları için katılımcılara yeterli süre verilmiştir. Daha sonra, katılımcılara argüman temsilleri formunda yer alan çeşitli düzeylerdeki üç argüman tek tek sunulmuş ve katılımcıların bu argümanları incelemeleri ve yorumlamaları beklenmiştir. Bu süreçte, katılımcılara, "Bu argüman ikna edici mi?", "Bu argüman bir ispat oluşturur mu?", "Nasıl karar verdin?" gibi sonda sorular yöneltilerek katılımcıların bu süreçteki düşüncelerini detaylı açıklamaları sağlanmaya çalışılmıştır.

Matematiksel ifadeler formu.

Matematiksel ifadeler formunda dört matematiksel ifade yer almaktadır (bkz., Ek 1). Öğretmen ve öğretmen adaylarına, bu formda yer alan matematiksel ifadeler birer birer sunulmuş ve katılımcılardan sunulan her bir ifadenin doğruluğunu /yanlışlığını kanıtlamaları istenmiştir. Matematiksel ifadeler formunda hazırlanırken ilgili literatürden yararlanılmıştır (Aylar, 2014; Çontay, 2017; Çontay ve Paksu, 2018; Güler ve Ekmekci, 2016). Matematiksel ifadelerin katılımcıların kavramsal erişim sınırları içinde bulunmasına özen gösterilmiştir.

Argüman temsilleri formu.

Argüman temsilleri formunda ise dört matematiksel ifadenin her biri için üç ayrı argüman olmak üzere toplamda 12 argümana yer verilmiştir. Bu form, öğretmen ve öğretmen adaylarının argüman değerlendirme süreçlerini betimlemek ve matematiksel ispat ölçütlerini anlamak amacıyla düzenlenmiştir. Katılımcılara bu formda yer alan argümanlardan hangisi ve hangilerinin matematiksel ispat niteliği taşıdığı sorulmuş ve nedenlerini açıklamaları istenmiştir. Argüman temsilleri formunda yer alan argümanlar farklı özelliklere sahip argümanlar olup, cebirsel, aksiyomatik, görsel, genellenebilir örnek kullanımı veya örnek kullanımına yer veren (deneysel) argümanlar olarak tasarlanmıştır. Örneğin, matematiksel ifade 1 için kullanılan argüman temsillerinden argüman 1, cebirsel ifadelere dayalı cebirsel argüman temsilini oluştururken, argüman 2 ise örnek kullanımına dayalı olduğu için deneysel argüman temsili olarak kullanılmıştır. Aynı ifade için argüman 3 ise, genellenebilir örnek kullanımına dayalı bir argümandır. Argüman temsilleri formunda yer alan argümanlar hazırlanırken ilgili literatürden yararlanılmıştır (örn., Aylar, 2014; Miyazaki, 2000). Argüman temsilleri formunda, matematiksel ifadeler 1 için oluşturulan argüman temsillerine Ek 2' de yer verilmiştir.

Veri Analizi Süreci

Bu çalışmada, toplanan verilerin analizi üç adımda gerçekleştirilmiştir. Birinci adımda, görüşme kayıtlarından elde edilen veriler her katılımcı için ayrı ayrı yazıya dökülerek çözümlemesi yapılmıştır. İkinci adımda, katılımcıların matematiksel ifadeler formuna verdikleri yanıtlar analiz edilmiştir. Katılımcıların matematiksel ifadeler formunda yer alan ifadeleri nasıl kanıtladıkları araştırmacılar tarafından öncelikle bireysel olarak analiz edilmiştir. Bu süreçte betimsel analiz tekniği kullanılmıştır. Büyüköztürk vd. (2011) betimsel analizi elde edilmiş bilgilerin mevcut görüşlere bakılarak sınıflandırılması olarak tanımlamışlardır. Betimsel analiz sürecinde Tablo 1'de yer alan sınıflar temel alınmıştır. Bu süreçte katılımcıların oluşturduğu argümanların temelinde yatan nedenlerin derinlemesine irdelenmesi amaçlanmıştır. Argümanlar dışsal bir otoriteye güven duygusuna dayandırılıyor ise dışsal argüman, belirli durumlardan bir genelleme çabası var ise deneysel argüman, mantıksal çıkarımlar söz konusu ise analitik argüman olarak sınıflandırılmıştır. Araştırmacılar bireysel olarak gerçekleştirdikleri sınıflandırmaları bir araya gelerek karşılaştırmış ve tam uyum elde edene kadar bu süreç devam etmiştir.

Katılımcıların argüman temsilleri formunda bulunan argümanları değerlendirme süreçleri ise son adımda analiz edilmiştir. İkinci adımda olduğu gibi, araştırmacılar öncelikle bireysel olarak verileri analiz etmişler, sonrasında analizlerini kendi aralarında karşılaştırmışlardır. Bu süreçte katılımcıların argümanları değerlendirme kriterleri Stylianides (2007) tarafından öne sürülen ispat tanımı temel alınarak incelenmiştir. Katılımcıların bu süreçte argümanları değerlendirirken öncelikli olarak hangi ölçütlere odaklandıkları irdelenmiştir. Bu ölçütler tanımda belirtilen "Sunum Modları", "Sınıf Topluluğunun Özellikleri" veya "Dayanak Noktaları" olarak belirlenmiştir. Örneğin, katılımcı sunulan bir argümanı sadece argümanın dışsal özelliklerinden (örn., kullanılan yöntemin tümevarım yöntemi olması veya matematiksel semboller içermesi gibi) dolayı ikna edici buluyor ise, bu açıklama "Sunum Modları" olarak sınıflandırılmıştır. Ancak katılımcı, sunulan argümanda kullanılan yöntemin, tanımın veya ifadelerin doğru olduğunu ve sunulan argümanın kapsadığı tüm küme için geçerli olduğunu belirtiyor ise, bu açıklama "Dayanak Noktaları" olarak sınıflandırılmıştır. Benzer şekilde, katılımcılar sunulan argümanların öğrencilerin seviyelerine uygunluğu veya öğrenci için ikna edici olması gibi ölçütlere odaklanıyor ise "Sınıf Topluluğu" olarak sınıflandırılmıştır.

Bulgular

Bu çalışmada, matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının ispat yapma ve değerlendirme süreçleri ve bu süreçte yaşadıkları zorlukların araştırılması amaçlanmıştır. Bu amaç çerçevesinde hazırlanan matematiksel ifadeler ve argüman temsilleri formları aracılığı ile öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel ifadelerin doğruluğu/yanlışlığına karar verme, kararlarını gerekçelendirme ve ispat oluşturma süreçlerinin yanı sıra sunulan argümanları ispat oluşturma kriterleri ışığında değerlendirme süreçleri irdelenmiştir. Bu bölümde öğretmenlere ait bulgular ve öğretmen adaylarına ait bulgular ayrı alt başlıklar halinde ele alınacaktır.

Matematik Öğretmenlerinin Argüman Oluşturma ve Değerlendirme Süreçlerine Ait Bulgular

Bu bölümde öncelikle çalışmaya katılan matematik öğretmenlerinin (Deniz-Zehra-Merve) matematiksel ifadeler formuna verdikleri yanıtları ve argüman oluşturma süreçlerine ait bulguları paylaşılacaktır. Sonrasında ise, matematik öğretmenlerinin argüman değerlendirme süreçlerine ait bulguları paylaşılacaktır.

Matematiksel ifadeler formuna ait bulgular.

Matematiksel ifadeler formuna yönelik tüm bulgular Tablo 2'de toplu bir şekilde sunulmuştur.

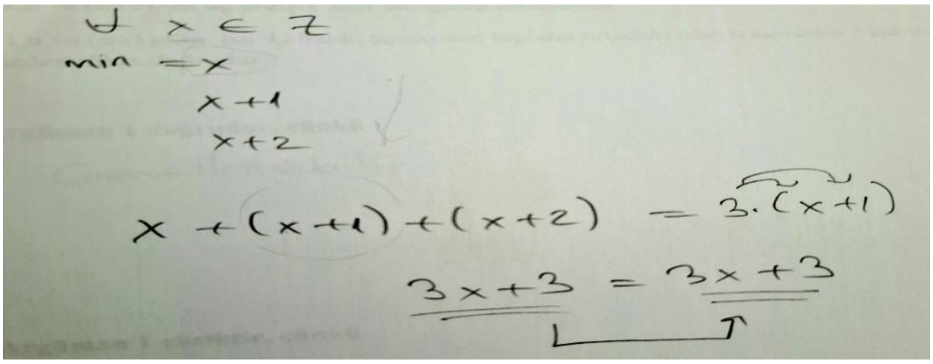
Tablo 2. *Öğretmenlerin matematiksel ifadeler için oluşturdukları argümanların sınıflandırılması*

	M.İ.1	M.İ.2	M.İ.3	M.İ.4
Argüman yok		Merve		Zehra
Dışsal Argüman				
Deneysel Argüman		Deniz	Deniz-Zehra	Deniz
Analitik Argüman	Deniz-Zehra-Merve	Zehra	Merve	Merve

Not: Matematiksel ifadeler, M.İ.1, M.İ.2, M.İ.3, M.İ.4 olarak ifade edilmiştir.

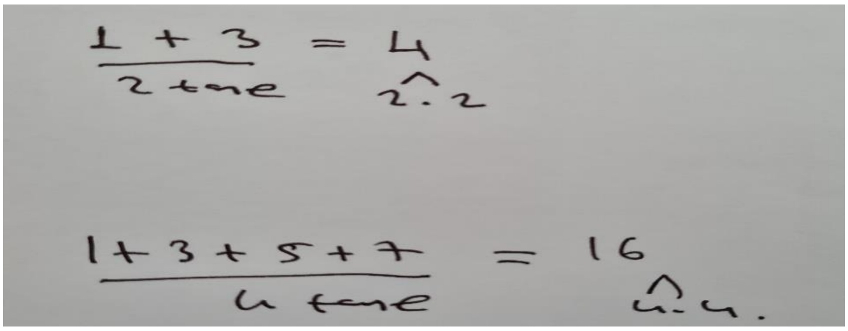
Çalışmaya katılan matematik öğretmenlerinin genel olarak sunulan matematiksel ifadelerin doğruluğuna/yanlışlığına karar verebildikleri ve bu kararlarını savunmak için bir argüman oluşturabildikleri görülmüştür. Ancak, iki öğretmenin (Merve ve Zehra) matematiksel ifadeler formunda yer alan iki ifade için (Matematiksel İfade 2 ve Matematiksel İfade 4) argüman oluşturmakta zorlandıkları da bulgular arasında yer almaktadır. Bunun yanı sıra, matematiksel ifadeleri kanıtlamak için bazı öğretmen adaylarının deneysel düzeyde argüman oluşturdukları bulunmuştur.

Matematiksel ifade 1 için, çalışmaya katılan bütün öğretmenlerin tüm sayılar için geçerli mantıksal bir argüman oluşturdukları görülmüştür. Şekil 1'de bu durumun bir temsiline yer verilmiştir.



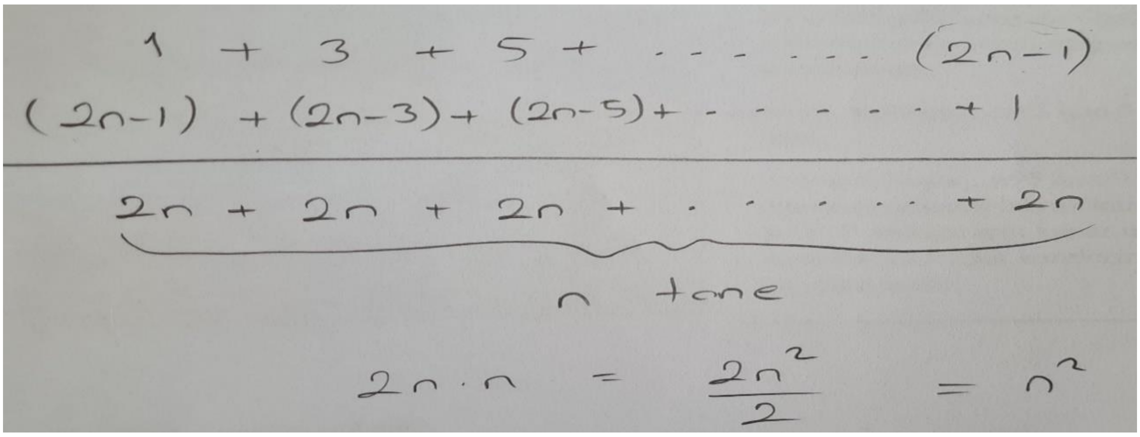
Şekil 1**.** *Merve'nin Analitik Argüman Temsili*

Şekil 1'de görüldüğü gibi, Merve ardışık sayı tanımı ve ortak paranteze alma gibi matematiksel kavram ve süreçleri kullanarak tüm tam sayılar için geçerli bir argüman oluşturmuştur. Bu nedenle Merve'nin matematiksel ifade 1 için oluşturduğu bu argüman, analitik argüman olarak sınıflandırılmıştır.



Şekil 2. *Deniz'e Ait Deneysel Argüman Temsili*

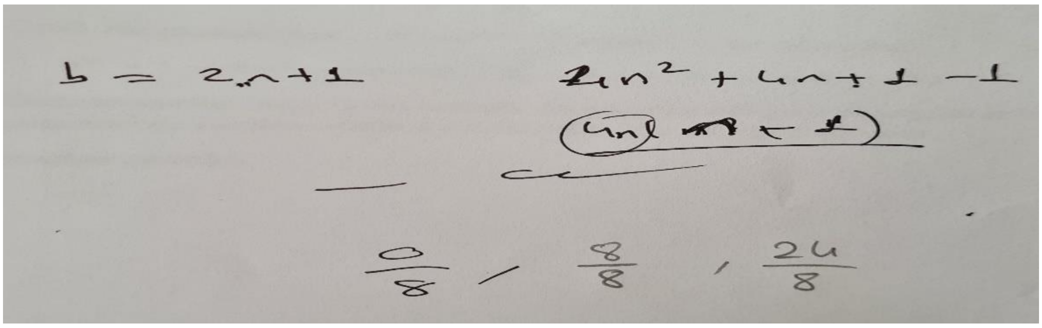
Matematiksel ifade 2 için Deniz, belirli örneklerden yararlanarak bir argüman oluşturmaya çalışmıştır. Şekil 2'de görüldüğü gibi, Deniz ilk olarak seçtiği iki ardışık tek sayının (1 ve 3) toplamının 4 olduğunu belirtmiş ve 4'ü 2 x 2 olarak ifade ederek sonucun terim sayısının karesi olacağını belirtmiştir. Daha sonra, ardışık dört tek sayının (1, 3, 5 ve 7) toplamını yazan Deniz, bu sayıların toplamının 16 olduğunu ve yine terim sayısının kendisiyle çarpımı ile ifade edilebileceğini söylemiştir. Deniz'in kullandığı iki örnekten bir genellemeye ulaştığı, "Bu şekilde ispat yaparım" ifadesinden anlaşılmıştır. Deniz'in iki örnek kullanarak verilen ifadenin tüm ardışık tek sayıları kapsayacağı şeklinde bir genellemede bulunması, bu argümanın deneysel argüman olarak sınıflandırılmasının nedenini oluşturmuştur.



Şekil 3. *Zehra'nın Analitik Argüman Temsili*

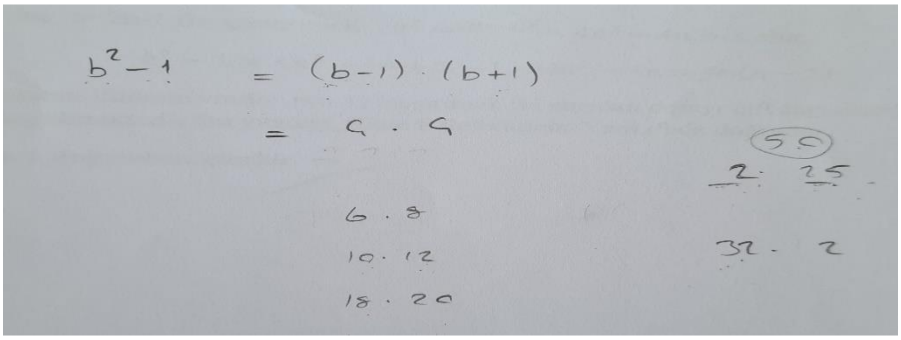
Matematiksel ifade 2 için Zehra'nın cebirsel ifadeleri kullanarak daha genel bir argüman oluşturmaya çalıştığı gözlemlenmiştir. Zehra, ardışık tek sayıların toplamını 1'den

2n-1'e kadar bir sıra halinde yazmış, daha sonra ise 2n-1'den başlayıp 1'e kadar her bir terim alt alta gelecek şekilde tekrarlamıştır (bkz., Şekil 3) Zehra, alt alta gelen her iki terimin toplamının 2n'e eşit olacağını ve toplamda n sayıda terim olacağını belirterek, matematiksel ifadenin doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Zehra'nın oluşturduğu argümanın genel bir argüman olması (tüm ardışık tek sayıların toplamını içermesi) ve mantıksal olması nedeniyle analitik argüman temsili olarak sınıflandırılmıştır.



Şekil 4. *Deniz'in Deneysel Argüman Temsili*

Matematiksel ifade 4 için Deniz, Şekil 4'te görüldüğü gibi, tek sayı tanımı, cebirsel ifadeler ve işlemleri kullanarak genel bir argüman oluşturmaya çalışmıştır. Tek sayı tanımını kullanarak b=2n +1 olduğunu belirten Deniz, $b^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1$ eşitliğini göstermiştir. Deniz bu eşitliği 4n ortak parantezine alarak $4n(n+1)$ ifadesinin 4'e bölüneceğini fakat 8'e bölünüp bölünmediğini bilmediğini söylemiştir. Sonuca ulaşmakta zorlanan Deniz, b=1, 3 ve 5 için ifadenin 0, 8 ve 24'e eşit olacağını ve bu değerlerin 8'e bölüneceğini belirtmiştir. Deniz'in tek sayı tanımı ve cebirsel ifadelere dayanan argümanını tamamlamakta zorlandığı ve sonrasında örnek kullanımını tercih ederek başka bir argüman geliştirdiği gözlenmiştir. Örnek kullanımına dayalı bu argüman deneysel argüman olarak sınıflandırılmıştır.



Şekil 5. *Zehra'nın Argüman Yok Temsili*

Zehra: İlk aklıma geleni yaparsam (b-1). (b+1) şeklinde yazarım. b tek sayı, tek sayıdan 1 çıkarınca çift sayı olur yine tek sayıya 1 eklersem çift sayı olur. Çift sayılar 2'ye bölünür. O halde 8 de 2.2.2 olduğundan üç kere 2'ye bölmek demektir. 8 ile bölünür.

Araştırmacı: Peki çift olan iki sayının çarpımı her zaman 8 'e bölünür mü? Nasıl gösterirsin?

Zehra: Hımm evet, hepsi için geçerli olmaz. Mesela 2x2, 4 olur. İspat edemem ama 6.8, 10.12, gibi çift sayıların çarpımından gitsem ya da 50 sayısını 2.25 gibi ayırsam bu seferde 25 tek sayı yok ispat edemem ispata dönüştüremem…

Matematiksel ifade 4 için Şekil 5'te görüldüğü gibi Zehra, cebirsel ifadelerden yararlanarak bir argüman oluşturmaya çalışmış ancak bu argümanını tamamlayamadığı için bu ifadeyi ispatlayamayacağını belirtmiştir. Bu nedenle, Zehra'nın argümanı bu ifade için Argüman Yok şeklinde kodlanmıştır.

Argüman temsilleri formuna ait bulgular.

Çalışmaya katılan matematik öğretmenlerinin argüman değerlendirmelerine yönelik bulgular toplu bir şekilde Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3.*Öğretmenlerin sunulan argümanları değerlendirme süreçlerinin sınıflandırılması*

	M.İ.1			M.İ.2			M.İ.3			M.İ.4		
	A1	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A2	A3
Sunum Modları			Deniz			Deniz		Zehra	Deniz			Deniz Zehra Merve
Sınıf Topluluğu				Deniz Merve								
Dayanak Noktaları	Deniz Zehra Merve	Deniz Zehra Merve	Zehra Merve	Zehra	Deniz Zehra Merve	Zehra Merve	Deniz Zehra Merve	Deniz Merve	Zehra Merve	Deniz Zehra Merve	Deniz Zehra Merve	

Not: Argümanlar A1, A2 ve A3 olarak; Matematiksel ifadeler ise M.İ.1, M.İ.2, M.İ.3, M.İ.4 olarak ifade edilmiştir.

Çalışmaya katılan öğretmenlerin argüman temsilleri formunda yer alan argümanları çoğunlukla temel dayanak noktalarına göre değerlendirdikleri görülmüştür. Matematik öğretmenlerinin, verilen argümanları analiz ederken "ispatın herkes tarafından kabul edilen genel argüman olma özelliğini" temel ölçüt olarak belirttikleri görülmüştür. Bunun yanı sıra öğretmenlerin, sunulan argümanları yer yer "sunum modları" ve "sınıf topluluğunun özellikleri" ölçütlerine göre değerlendirdikleri de görülmüştür.

Bireysel görüşmeler esnasında, matematik öğretmenleri öğrenme ortamında örneklerin önemli olduğunu ve deneysel argümanların sınıf ortamında analitik argümanlara göre daha faydalı olabileceğini belirtmişlerdir. Örneğin Deniz, matematiksel ifade 2 için sunulan argüman 1'e yönelik, "Örnekler öğrenciler için daha somuttur", "Örnekleri matematiksel ifadeleri doğrulamak amaçlı kullanabiliriz" şeklindeki ifadeleri, Deniz'in deneysel argümanların öğretimsel bir yaklaşım olarak sınıf içinde kullanılmasının faydalı olduğunu düşündüğünü göstermektedir. Deniz bu açıklamasında, deneysel argümanların sınıf topluluğunun özelliklerine uygun olması nedeniyle sınıf ortamında tercih edilmesi gerektiğini belirtmektedir. Bu nedenle, Deniz bu argümanı değerlendirirken öncelikli olarak sınıf topluluğunun özelliklerini göz önünde bulundurduğu düşünülmüştür.

Bireysel görüşmelerde, matematik öğretmenlerinin argüman temsilleri formunda yer verilen bazı argümanlardaki matematiksel sembolleri ve argümanda bu sembollere yer verilmesini ikna edici buldukları görülmüştür. Örneğin matematiksel ifade 2 için sunulan argüman 3'te Deniz'in, "∑ sembolünden dolayı argümanı incelememe gerek yok, zaten argüman ispattır" şeklinde açıklamada bulunması sembollerin ispatta ikna edici olarak kabul edildiğini göstermektedir. Benzer şekilde Deniz matematiksel ifade 3 için sunulan argüman 3'te tümevarım yöntemi kullanıldığını, bu nedenle argümanın ispat olduğunu belirtmiştir. Deniz'in "Çünkü tümevarım yöntemini üniversitede öğrendik. Bu yöntem ispat yapma yöntemidir" şeklindeki ifadesi argüman değerlendirme sürecinde Deniz'in sunum modunu ölçüt olarak aldığını göstermektedir.

Çalışmanın bir diğer bulgusuna göre ise matematik öğretmenleri, sunulan matematiksel argümanları kendi oluşturdukları argümanlar ile benzerlik göstermesi durumunda ikna edici bulmuşlardır. Örneğin, matematiksel ifade1 için sunulan argüman 1'i değerlendirirken Merve "Benim yaptığım ispata çok benzer şekilde bir ispat. Değişken vererek çözülmüş. Bende bu şekilde yaptım bu nedenle argüman doğrudur" şeklinde ifadelerde bulunarak argüman 1 ve kendi argümanı arasında benzerliklerin argüman değerlendirme sürecinde etkili olduğunu göstermiştir.

Öğretmen Adaylarının Argüman Oluşturma ve Değerlendirme Süreçlerine Ait Bulgular

Bu bölümde, çalışmaya katılan matematik öğretmen adaylarının (Nurgül-Aslı-Şeyma) matematiksel ifadelere yönelik oluşturdukları argümanlara ait bulguları ilk olarak paylaşılacaktır. Sonrasında ise, matematik öğretmen adaylarının argüman değerlendirme süreçlerine ait bulguları paylaşılacaktır.

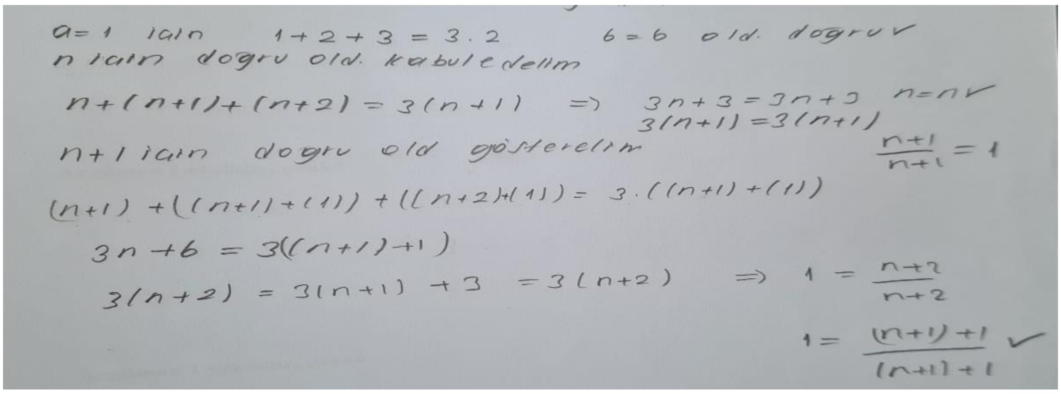
Matematiksel ifadeler formuna ait bulgular.

Öğretmen adaylarının matematiksel ifadeler için oluşturdukları argümanlar ve bu argümanların sınıflandırılması Tablo 4'te sunulmuştur. Tabloda görüldüğü gibi, öğretmen adaylarından, Aslı hariç, matematiksel ifadelerin doğruluğunu kanıtlamak için bir argüman oluşturabildikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının çoğunun argüman oluşturma sürecinde, tümevarım yöntemini ve cebirsel ifade kullanımını tercih ettikleri dikkati çeken bir diğer durum olmuştur.

Tablo 4. *Öğretmen adaylarının matematiksel ifadeler için oluşturdukları argümanların sınıflandırılması*

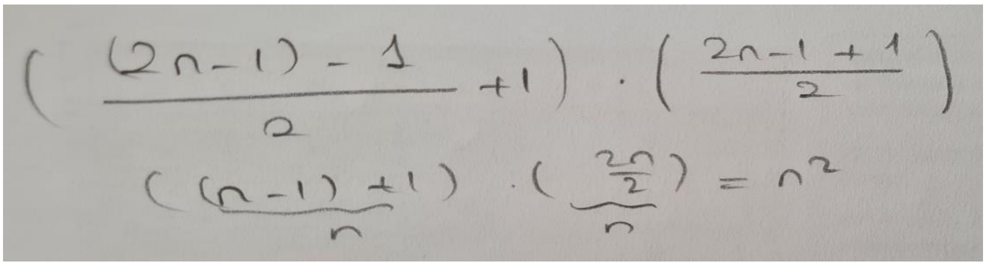
	M.İ.1	M.İ.2	M.İ.3	M.İ.4
Argüman Yok			Aslı	
Dışsal Argüman		Nurgül-Aslı	Şeyma	
Deneysel Argüman				Aslı
Analitik Argüman	Nurgül-Aslı-Şeyma	Şeyma	Nurgül	Nurgül-Şeyma

Matematiksel ifade 1 için Nurgül, cebirsel ifadeleri kullandığı ve tümevarım yönteminden yararlandığı iki argüman oluşturmuştur.



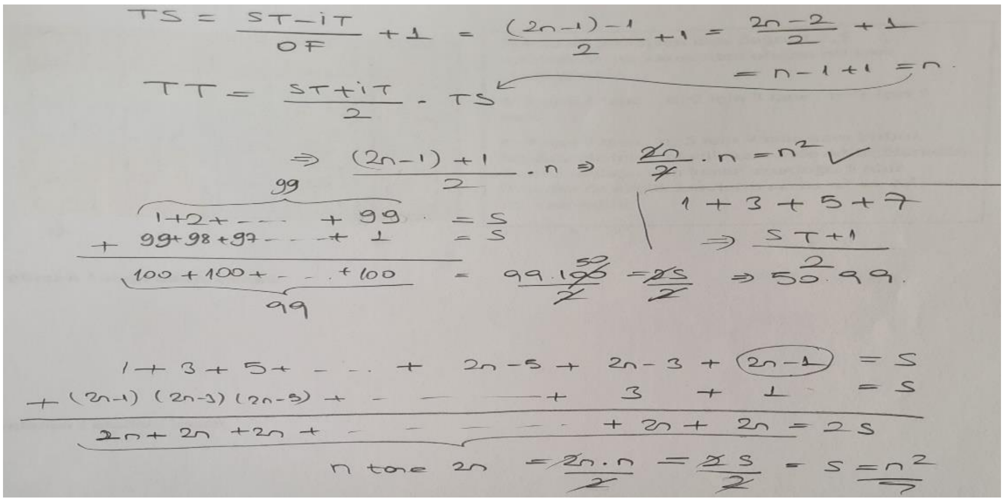
Şekil 6. *Nurgül'ün Analitik Argüman Temsili*

Nurgül'ün oluşturduğu argümanda tümevarım yöntemini kullandığı görülmüştür (bkz., Şekil 6). Ancak, öğretmen adayının argüman oluşturma sürecinin her aşamasında "Doğru yapıyor muyum?", "Böyle yapıyorduk herhalde "gibi ifadeler kullanarak onay beklemesi ve tümevarım yöntemini kullanırken zorlanması dikkat çeken bir durum olmuştur.



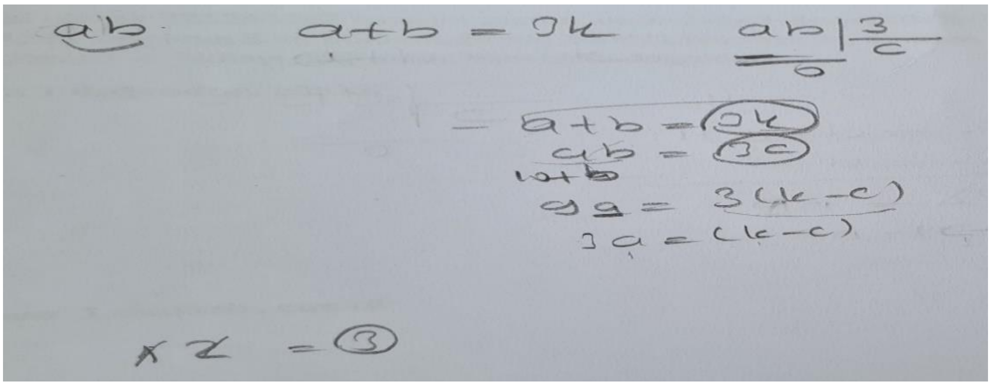
Şekil 7**.** *Aslı'nın Dışsal Argüman Temsili*

Matematiksel ifade 2 için Aslı, Şekil 7'de görüldüğü gibi terimler toplamı formülünü kullanarak bir argüman oluşturmuştur. Her ne kadar öğretmen adayı genel bir argüman oluşturma eğiliminde bulunsa da yapılan bireysel görüşmede "Terim sayısı formülü ile yaptım", "Başka türlü herhalde ispat yapamazdım" şeklindeki ifadeleri ve kullanılan formülün doğruluğuna yönelik bir açıklama yapma eğilimi yerine salt formül kullanımına olan güven duyma eğilimi öğretmen adayının argümanının dışsal argüman olarak sınıflandırılmasına neden oluşturmuştur.



Şekil 8. *Şeyma'nın Analitik Argüman Temsili*

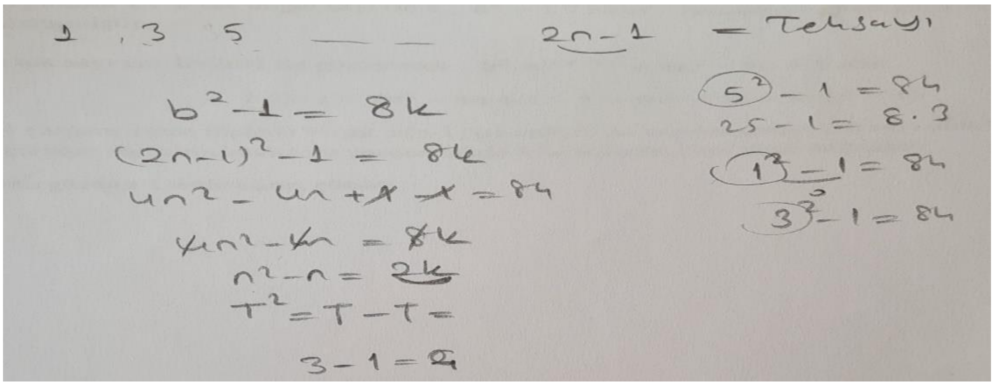
Matematiksel ifade 2 için Şeyma, önce terim sayısı formülünü uygulayarak verilen ifadenin terim sayısının n olduğunu bulmuştur, daha sonra ise terim toplamı formülünü kullanarak ifadenin doğruluğunu göstermiştir (bkz., Şekil 8). Şeyma, Aslı'nın argümanından farklı olarak formüle dayalı oluşturduğu argümanın yanı sıra farklı bir yol kullanarak ikinci bir argüman daha geliştirebilmiştir. Şeyma, 1'den 2n-1'e kadar sayıların toplamını yazıp, altına her bir terim alt alta gelecek şekilde 2n-1'den başlayıp 1'e doğru yazarak cebirsel ifadeleri toplamıştır. Alt alta yazılan her iki terimin toplamının 2n olduğunu göstererek verilen matematiksel ifadenin ispatını yapması nedeniyle Şeyma'nın argümanı analitik argüman olarak sınıflandırılmıştır.



Şekil 9. *Aslı'nın Argüman Yok Temsili*

Şekil 9' da görüldüğü gibi matematiksel ifade 3 için Aslı, bölme işlemi ve basamak çözümlemesini kullanarak bir argüman oluşturmaya çalışmıştır. Fakat Aslı yapılan görüşme esnasında "İspat kesin doğru ama yapamıyorum" ifadelerini kullanarak argümanını tamamlayamadığını belirtmiştir. Bu nedenle, Aslı'nın argümanı argüman yok kategorisinde değerlendirilmiştir.

Şeyma ise matematiksel ifade 3 için argümanını oluştururken "Ezber olarak yapıyoruz", "Alışkanlıklar, biz böyle öğrendik", "Hatırlamıyorum ne dershanede ne okulda neden 3 katı olduğunu sorgulamadık", "Hocalarıma güveniyordum, neden olduğunu hiç araştırmadım" gibi ifadeleri kullanarak dışsal otoriteye güven eğilimi göstermiştir.



Şekil 10**.** *Aslı'nın Deneysel Argüman Temsili*

Matematiksel İfade 4 için Aslı, cebirsel ifadeleri ve tek sayı tanımını kullanarak genel bir argüman oluşturmaya çalışmıştır. Şekil 10'da görüldüğü gibi Aslı, argümanını sonuçlandırmakta zorlanmıştır. Aslı $n^2 - n$ ifadesinin bir çift sayı olması gerektiğini $n^2 - n = 2k$ ifadesini yazarak belirtmiş ancak neden bir çift sayı olması gerektiğini açıklayamamıştır. Bu nedenle genel bir yargıda bulunamadığı gözlemlenmiştir. Argümanını tamamlamakta zorlanan Aslı, bunun yerine 3 örnek kullanımına dayalı (n=3, 5 ve 1 için) bir argüman geliştirmiş ve bu argümanın yeterli olacağı iddiasında bulunmuştur. Bu nedenle Aslı'nın bu argümanı deneysel olarak sınıflandırılmıştır.

Öğretmen adaylarının matematiksel ifadeler formunda yer alan tüm ifadeler için öncelikle matematiksel tanımlar ve cebirsel ifadeler kullanımına dayalı argüman oluşturma eğiliminde oldukları görülmüştür. Ancak bazı ifadeler için (örn., Mİ3, Mİ4) bu argümanları geliştirmekte zorlanan öğretmen adayları ya ispat oluşturmayacağı beyanında bulunmuş ya da örnek kullanımına dayalı argüman oluşturma eğilimi göstermişlerdir. Öğretmen adaylarının dışsal otoriteye (örn., matematik formülleri, üniversite dersleri) güven duyma eğilimleri bireysel görüşmeler esnasında dikkati çeken bir diğer durumu oluşturmuştur.

Argüman temsilleri formuna ait bulgular.

Tablo 5'te öğretmen adaylarının matematiksel ifadeler için sunulan argümanları değerlendirme sürecine yönelik bulgulara yer verilmiştir. Tablo 5'te görüldüğü gibi öğretmen adayları sunulan argümanları değerlendirirken genellikle dayanak noktalarına odaklandıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra, öğretmen adaylarının sunulan argümanların neden ikna edici olduğunu açıklarken dışsal faktörlere (sunum modları) odaklanma eğiliminde oldukları da fark edilmiştir.

Tablo 5. *Öğretmen adaylarının argüman değerlendirme süreçlerinin sınıflandırılması*

	M.İ.1			M.İ.2			M.İ.3			M.İ.4		
	A1	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A2	A3
Sunum Modları	Aslı	Nurgül		Aslı	Aslı	Aslı		Aslı Nurgül Şeyma	Nurgül			Aslı Nurgül Şeyma
Sınıf Topluluğu			Nurgül	Şeyma			Nurgül					
Dayanak Noktaları	Nurgül Şeyma	Aslı Şeyma	Aslı Şeyma	Nurgül	Nurgül Şeyma	Nurgül Şeyma	Aslı Şeyma		Aslı Şeyma	Aslı Nurgül Şeyma	Aslı Nurgül Şeyma	

Matematiksel ifade 1 için sunulan argüman 1'i değerlendirirken Nurgül: "Kabul edebilir miyim? Ama hocalarımız bu şekilde istemeyebilir", "Tümevarım, tümdengelim, tersini kabul etme… neydi o aksini kabul edersek olur gibi" ifadeler kullanarak dışsal bir otoriteye göre argümanları değerlendirme eğiliminde olduğunu göstermiştir. Ancak Nurgül'ün aynı zamanda: "Bence ispatta her şey için sağladığından emin olmak gerekir ve yani ispat genel olmalıdır" diye belirterek argüman değerlendirme aşamasında ispatın tüm sayılar için geçerli olma, genel kabul görme özelliklerini ölçüt olarak kullandığı görülmektedir. Bu nedenle, Nurgül'ün bu değerlendirmesi bu argüman için dayanak noktaları olarak sınıflandırılmıştır. Benzer şekilde, Şeyma argüman 1 için: "ispatın şartları bütün sayılar ya da terimler için doğru sonuç vermeli", "n herhangi bir sayı olacağı için ve bütün önermeler için doğru olduğundan ispat doğrudur" şeklinde ifadelerde bulunarak, argüman değerlendirme sürecinde dayanak noktalarına odaklandığını göstermiştir.

Matematiksel ifade 1 için sunulan argüman 2'yi değerlendirirken Aslı, "Biz derste işlediğimizde örnekle ispat olmaz diyor hocalarımız, bu nedenle örnekleri ispat olarak kabul edemeyiz" ifadesini kullanmıştır. Aslı, örnek kullanımına dayalı bir argümanın matematikte geçerli bir yöntem sayılamayacağını, bu yüzden bu argümanın bir ispat olarak kabul edilemeyeceğini belirtmiştir. Aslı örnek kullanımının matematiksel ispat için geçerli bir yol olmayacağını belirtse de neden geçerli bir yol sayılamayacağını dışsal bir otoriteye dayandırarak (örnekle ispat olmaz diyor hocalarımız) açıklaması dikkat çekmektedir. Matematiksel ifade 2 için sunulan argüman 3 için ise Aslı: "∑ sembolü çok güzel olmuş kabul etmesi daha kolay genelleme için" gibi ifadeler kullanarak dışsal sebepleri (matematiksel sembollerin kullanımı) bir değerlendirme ölçütü olarak kullandığını belirtmiştir. Bu nedenle Aslı'nın değerlendirme sürecinde ölçüt olarak sunum modu kullanıldığı görülmüştür.

Örnek kullanımına dayalı deneysel argümanları değerlendiren öğretmen adaylarının, bu argümanları genellikle bir ispat olarak değerlendirmediği görülmüştür. Örneğin, Şeyma matematiksel ifade 3 için sunulan argüman 1'i değerlendirirken: "Örnek vererek yapılmış ispat tüm sayılar için kabul edilemez, bu nedenle ispat olarak kabul edemeyiz" ifadesini kullanması ve matematiksel ifade 4 için Nurgül'ün argüman 2'yi genelleme yapılamayacağı için eksik ispat olarak tanımlaması bu bulguyu desteklemektedir. Aday öğretmenler ispatın genellenebilir olma özelliğini, verilen argümanları inceleyip analiz ederken ispatı oluşturan en önemli adımlardan biri olarak nitelendirdikleri görülmüştür.

Tartışma ve Sonuç

Bir devlet üniversitesinde eğitim gören üç matematik öğretmen adayı ve bir devlet okulunda çalışmakta olan üç matematik öğretmeninin argüman oluşturma ve değerlendirme süreçlerinin incelendiği bu çalışmada, öğretmenlerin ve aday öğretmenlerin sunulan ifadelerin doğruluğunu/yanlışlığını irdeleyip değerlendirmelerini argüman oluşturarak destekleyebildikleri görülmüştür. Katılımcıların sunulan matematiksel ifadeler için genellikle matematiksel tanımlar ve cebirsel ifadeleri kullanarak argüman oluşturma eğiliminde oldukları dikkat çekmiştir. Katılımcılar çoğunlukla genel bir argüman oluşturma eğilimi gösterseler de argüman oluşturmakta zorlandıkları ve argümanlarını tamamlayamadıkları durumlarda çalışmanın bulguları arasında yer almıştır (bkz., Tablo 2 ve Tablo 4). İspat yapma yöntemlerini bilme ve doğru uygulama ile ilgili yaşanan zorlukların, öğretmen ve öğretmen adaylarının argüman oluşturma ve argümanlarını tamamlama aşamalarında yaşadıkları zorlukların nedenleri arasında yer aldığı görülmüştür. Örneğin, öğretmen adayı Nurgül'ün tümevarım yöntemini kullanırken zorlanması ve araştırmacıdan argüman oluşturma sürecinin her adımında onay beklemesi, öğretmen adayının tümevarım yöntemini uygulamaktan kaynaklı yaşadığı zorluğu kanıtlar niteliktedir. Zehra ise matematiksel ifade 4 için argüman oluştururken $b^2 - 1$ = *(b-1). (b+1)* eşitliğini belirtmiş ve *(b-1). (b+1)* ifadesinin iki çift sayının çarpımı olduğunu fark edebilmiştir. Ancak sonrasında tek sayı tanımını ve sayılar arasındaki ilişkileri kullanarak *(b-1). (b+1)* ifadesinin 8'in bir katı olduğu sonucuna ulaşamamıştır. Belirli örnekleri kullanarak sayılar arasında bir örüntü bulmaya çalışsa da Zehra'nın argümanını tamamlayamadığı görülmüştür (bkz., Şekil 5). Douek (1999) matematiksel argüman oluşturma sürecinde kullanılan tüm bilgileri referans gövdesi (reference corpus) olarak adlandırır. Douek'e (1999) göre referans gövdesi "sadece referans ifadelerini değil, aynı zamanda görsel ifadeleri ve daha genel olarak, deneysel kanıtları, sorgusuz kabul edilen ifadeleri (yani, "referans argümanları" veya kısaca "referanslar")" içerir (s. 130). Douek (1999) referans gövdesinin kavramsal erişim sınırları içinde olmadığı durumlarda argümanların tamamlanmasının imkânsız olacağını iddia etmektedir. Bu bağlamda düşünüldüğünde ispat yapma sürecinde referans gövdesi arasında yer alması gereken ispat yapma yöntemleri, matematiksel tanımlar, ilişkiler veya formüllerin kullanımından kaynaklı yaşanan tüm zorlukların katılımcıların argümanlarını tamamlamasına bir engel teşkil ettiği görülmüştür.

Çalışmaya katılan öğretmen ve öğretmen adaylarının argüman oluşturmakta zorlandıkları durumlarda örnek kullanma eğiliminde oldukları fark edilmiştir. Örneğin, matematiksel ifade 4 için Deniz, tek sayı tanımını ve cebirsel ifadeleri kullanarak bir argüman geliştirmeye çalışmış ancak argümanını tamamlamakta zorlanmıştır. Bu durumda Deniz'in, belirli örnekler kullanarak ifadenin doğruluğunu kanıtlamaya çalıştığı gözlemlenmiştir (bkz., Şekil 4). Aynı şekilde öğretmen adayı Aslı, matematiksel ifade 4 için cebirsel ifadeleri kullanarak bir argüman oluşturmaya çalışmış ancak oluşturduğu argümanı tamamlamakta zorlandığı ve deneysel düzeyde bir argüman oluşturduğu gözlenmiştir (bkz., Şekil 10). Matematik eğitimcileri öğrencilerin gerekçelendirme standartlarının niteliksel olarak matematikçilerinkine benzer olması gerektiğini ve öğrencilerin matematiksel ifadelerin doğruluğunu göstermek için geçerli yöntemler kullanması gerektiğini belirtmektedirler (Weber, Inglis ve Mejia-Ramos, 2014). Bunu sağlamanın bir yolu şüphesiz öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının matematikçiler tarafından kullanılan geçerli ispat yolları hakkında bilgi sahibi olmasıdır. Katılımcıların sunulan matematiksel ifadeleri ispatlarken genel bir argüman oluşturmakta başarısız oldukları durumlarda deneysel argüman oluşturma eğilimleri bu bağlamda düşünüldüğünde yetersiz görülmektedir.

Katılımcıların matematiksel ifadelerin doğruluğunu kanıtlamak için argüman oluşturmada zorlanmalarının yanı sıra yer yer dışsal bir otoriteye güvenme eğiliminde oldukları da görülmüştür. Özellikle öğretmen adaylarının daha fazla otoriteye güven duyma eğiliminde olmaları dikkat çekmiştir. Örneğin Şeyma'nın matematiksel ifade 3 için "…ezber olarak yapıyoruz", "Alışkanlıklar, biz böyle öğrendik", "…ne dershanede ne okulda neden 3 katı olduğunu sorgulamadık. Hocalarıma güveniyordum, neden olduğunu hiç araştırmadım…" gibi ifadeler kullanması, otoriteye başvurma ve güvenme eğilimini gösterir niteliktedir. Okumus ve Zeybek Simsek (2021) kural temelli düşünme yapısının öğretmen adayları arasında yaygın olduğunu ve öğretmen adaylarının öğrendikleri kuralları sorgulamadan doğru olarak kabul etme eğiliminde olduklarını belirtmişlerdir. Matematik sınıflarında ve ders kitaplarında matematiksel kurallar, formüller ve özelliklerin genellikle hazır olarak sunulması ve öğrencilerin bu kuralları kabul etmesinin beklenmesi (Weiss ve Herbst, 2015) bunun nedenleri arasında sayılabilir. Matematiksel kural, formül ve özelliklerin sorgulanmadan kabul edilmesini öngören bu tür uygulamalar yerine, matematiksel kural ve formüllerin geçerliliklerinin sorgulandığı ve ispatlandığı sınıf ortamlarının oluşturulması kural temelli düşünme yapısının giderilmesinde önemli görülmektedir.

Öğretmen adaylarının argüman oluşturma sürecinde dışsal otoriteye (örn, matematiksel formüller, matematiksel yöntemler) güven duyma eğilimleri argüman değerlendirme sürecinde de ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının sunulan argümanları değerlendirirken dışsal faktörlerden (örn., matematiksel semboller) etkilendikleri görülmüştür. Örneğin, matematiksel ifade 2 için sunulan argüman 3'ü değerlendirirken Aslı: "∑ sembolü çok güzel olmuş kabul etmesi daha kolay genelleme için" gibi ifadeler kullanarak dışsal sebepleri (sunum modları) bir değerlendirme ölçütü olarak kullandığını belirtmiştir. Harel ve Rabin (2010) dışsal ispat şemasının her sınıf seviyesindeki öğrenciler arasında yaygın olduğu belirtmiş ve sınıf içi uygulamaların bunun bir sebebi olabileceğini iddia etmişlerdir. Öğretmen ve öğretmen adaylarının argüman değerlendirme sürecinde yüzeysel faktörlere (örn., argümanda kullanılan yöntem, matematiksel semboller) odaklandıklarını gösteren bu bulgular, katılımcıların sınıf içi uygulamalarında benzer bir yaklaşım izleyecekleri anlamı taşıyabilir. Öğretim programlarında yer alan; "öğrenciler sunulan açıklamaları kabul etmek için yüksek standartlar geliştirmelidir" ve öğrenciler "sunulan bu açıklamaları irdelemeli, formüle etmeli ve eleştirmelidir ki sınıf bir araştırma topluluğu haline gelsin" (NCTM, 2000; s. 346) ifadeleri sınıf içinde sunulan argümanların titizlikle incelenmesi gerektiğinin önemini vurgulamaktadırlar. Öğrencilerin NCTM'in belirttiği bu hedeflere ulaşabilmesi için, öncelikle, öğretmenlerin matematiksel argümanları eleştirebilmesi ve bu argümanlarda kullanılan muhakeme türünü ayırt edebilmesi beklenmelidir.

Çalışmaya katılan öğretmen ve öğretmen adayları sunulan argümanları değerlendirme sürecinde genellikle analitik düzeydeki argümanları daha ikna edici bulsalarda, örnek kullanımına dayalı argümanların sınıf ortamında kullanışlı olduğunu savunmuşlardır. Knuth (2002b) matematik öğretmenlerinin deneysel argümanların sınırlılıklarını bilmelerine rağmen öğrencilere uygun olduğunu düşündükleri için ispat olarak kabul ettiklerini belirtmiştir. Martin ve Harel (1989) ise matematiksel bir ifadenin geçerliliği belirli birkaç örnek ile kanıtlayan bir öğretmenin sınıfında bulunan öğrencilerin deneysel argümanların ispat olduğunu düşündüğünü kanıtlamıştır. Bu yönüyle ele alındığında, öğretmen ve öğretmen adaylarının deneysel argümanların sınıf içinde kullanımlarında sınırlılıklarının farkında olmaları gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

Çalışmaya katılan öğretmen ve öğretmen adaylarının argüman oluşturma ve argümanlarını tamamlama sürecinde yaşadıkları zorlukları gösteren tüm bu bulgular öğretmen ve öğretmen adaylarının matematiksel ispat oluşturma ve matematiksel argümanları değerlendirmeye yönelik daha fazla deneyime sahip olması gerektiğini vurgulamaktadır. Öğretim programlarının (örn., CCSSI, 2010; NCTM, 2000; MEB, 2018) matematiksel ispatların anaokulundan lise son sınıfa kadar matematik derslerinin vazgeçilmez bir parçası olması yönündeki tüm bu önerilerinin hayata geçirilmesinin tek yolu şüphesiz öğretmenlerin bu önerileri uygulamaya hazır olması ile mümkündür. Bunu sağlamak için lisans eğitimi sürecinde ve sonrasında hizmet içi eğitimler ile öğretmenlerin matematiksel ispatlara yönelik deneyimlerinin artırılması önemli görülmektedir.

Etik Kurul İzin Bilgisi: ***Bu çalışmanın verileri 2019 yılında toplanmıştır***.

Yazar Çıkar Çatışması Bilgisi: *Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir*.

Yazar Katkısı: *Yazarlar çalışmaya eşit oranda katkı sağlamıştır*

Kaynakça

Aylar, E. (2014). *7. Sınıf öğrencilerin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi*. Yayımlanmamış doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In Pimm D. (Ed.), *Mathematics teachers and childre*n (ss.216-235). London: Hodder and Stoughton.

Bell, A. W. (1976). A Study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 351–382.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., ve Demirel, F. (2011). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Pegem Yayınları.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for mathematics*. Retrieved from http://corestandards.org/asserts/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (2. Baskı). USA: Publications.

Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları*. Yayımlanmamış doktora tezi, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

Çontay, E. G. ve Paksu, D. A. (2018). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları ortaya koyan ifadelerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitim Dergisi, 10(*1), 59-100. Doi: 10, 16949/turkbilmat.397109

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(2), 47-71.

Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In I. Schwank (Ed.), *European research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 125–139). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The Mathematical Association of America Monthly, 110,* 886-899.

Güler, G. ve Ekmekci, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(1), 59-83.

Harel, G. ve Rabin, J. (2010). Teaching practices associated with the authoritarian proof scheme. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*, 14–19.

Harel, G. ve Sowder, L. (1998). Students proof schemes. *Research in Collegiate Mathematics Education*, *3*, 234–282.

Harel, G. ve Sowder, L. (2007). Towards a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematical teaching and learning* (pp. 805–842). Washington, DC: NCTM

Knuth, E.J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 61–88.

Martin, G. ve Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 41–51.

MEB (2018). *Matematik dersi öğretim program (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar*). Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lover secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41*(1), 47-68.

NCTM (2000). *Principles and standard for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Okumus, S. ve Zeybek Simsek, Z. (2021). Prospective mathematics teachers' use of linguistic signifiers in the context of angles formed by two lines cut by a transversal. *Journal of Mathematical Behavior, 63*, 10089. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100890

Simon, M. A. ve Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 3-31.

Singleton, R. A. ve Straits, B.C. (2005). *Approaches to social research* (4th ed.). New York: Oxford University Press.

Stylianides A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education, 38,* 289-321.

Stylianides, A. ve Stylianides, G. (2009). Proof construction and evaluation. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 237–253.

Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics, 8* (1), 27-34.

Weber, K., Inglis, M. ve Mejia-Ramos, J.P. (2014) How mathematicians obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist, 49*(1), 36-58. DOI: 10.1080/00461520.2013.865527

Weiss, M.ve Herbst, P. (2015). The role of theory building in the teaching of secondary geometry. *Educational Studies Mathematics, 89***,** 205–229. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9599-x

Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitapevi.

Zeybek-Simsek, Z. (2020). Constructing-evaluating-refining mathematical conjectures and proofs. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 21*(2), 197-215.

Ekler

Ek 1: Matematiksel İfadeler Formu

1. "Herhangi ardışık 3 tamsayının toplamı ortadaki sayının 3 katına eşittir." matematiksel ifadesi doğru mu? Yanlış mı? Cevabınızı kanıtlayınız. (Aylar, 2014).
2. "1 + 3 + 5 + ... + (2n − 1) = **n.n=n²** "matematiksel ifadesi doğru mu? Yanlış mı? Cevabınızı kanıtlayınız. (Güler ve Ekmekci, 2016).
3. "Bir tam sayının rakamları toplamı 3 ile bölünürse, bu rakam 3 ile bölünebilir." Matematiksel ifadesi doğru mu? Yanlış mı? Cevabınızı kanıtlayınız. (Çontay, 2017).
4. "b tek doğal sayı ise 8, $b^2 - 1\,'i$ böler" matematiksel ifadesi doğru mu? Yanlış mı? Cevabınızı kanıtlayınız. (Çontay ve Paksu, 2018).

Ek 2: Matematiksel ifade 1 için Sunulan Argüman Temsilleri

Argüman 1:

İfadenin doğruluğunu Merve şu şekilde göstermiştir: n-1, n ve (n+1) üç ardışık sayı olsun.

n-1+ n +(n+1)=3n ise, üç sayının toplamı ortadaki n sayısının 3 katıdır. Bu yüzden ifade doğrudur.

Argüman 2:

İfadenin doğruluğunu Belma şu şekilde göstermiştir:

Belma'nın cevabı

Bence ***doğru***; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım.
2 + 3 + 4 = 9
9 = 3. 3
Yani ortadaki sayının 3 katı.

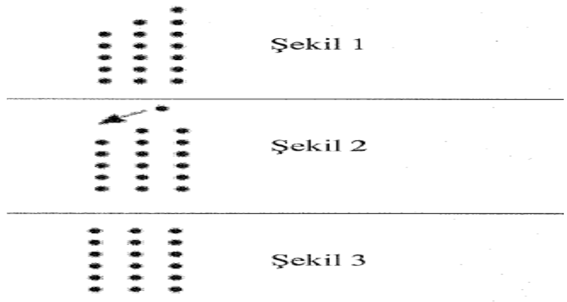
Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım.
21 + 22 + 23 = 66
66 = 3. 22
Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım.

Daha büyük sayılar denediğimde ise,
101 + 102 + 103 = 306
306 = 3 . 102
Üç ayrı deneme yaptım üçünde de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.

(Aylar, (2014)'den alıntılanmıştır).

Argüman 3:

İfadenin doğruluğunu Cem şu şekilde göstermiştir:



Şekil 2’deki gibi en yüksek sütundaki noktayı en kısa sütuna hareket ettirerek her sütundaki nokta sayılarını eşitledim. O halde 3 sütundaki toplam nokta sayısı ortadaki sütunun 3 katına eşittir.

(Miyazaki (2000)’den uyarlanmıştır).

Research Article

Pamukkale University Journal of Education 54: 357-384 [2022]
doi: 10.9779.pauefd. 814059

Investigating Mathematics and Prospective Mathematics Teachers' Argument Construction and Evaluation Processes *

Tugce Dalkılıc** Zulfiye Zeybek Simsek***

• ***Received:*** *21.10.2020* • ***Accepted:*** *19.10.2020* • ***Online First:*** *26.11.2021*

Abstract

The emphasis on mathematical proofs in recent mathematics standards leads to increased attention for developing students' reasoning, questioning, and justifying skills. Seeing these standards as an essential element for mathematical understanding calls for teachers' strong mathematical knowledge. However, it has been documented that those teachers and prospective teachers have difficulties constructing proofs. In this study, the argument construction and evaluation processes of teachers and prospective teachers were aimed to be analyzed. In line with these goals, semi-structured interviews were conducted with three in-service and three prospective teachers. During the individual interviews, the participants were presented with four mathematical statements, and they were asked to justify them. In addition, three arguments for each statement constructed by the researchers were presented. The responses of the participants were analyzed by using the descriptive analysis method. Although the participants were able to construct arguments most of the time, it was also documented that some of the participants struggled with constructing a general argument, or they tended to construct an empirical argument instead. During the argument evaluation processes, some participants gained conviction by external factors. Additionally, the participants considered empirical arguments essential for constructing the proof.

Keywords: argument construction, argument evaluation, proving, proof schemes, teacher education

Cited:

Dalkılıç T, ve Zeybek Şimşek, Z. (2022). Investigating Mathematics and Prospective Mathematics Teachers' Argument Construction and Evaluation Processes. *Pamukkale University Journal of Education*, *54*, 357-384.doi:10.9779.pauefd.814059

---

* Part of the data shared in this study was presented at an international conference held in Amasya.

** Mathematics Teacher, Tokat, Türkiye, https://orcid.org/0000-0002-4211-2372, tugcealkn64@gmail.com

*** Associate Professor, Tokat Gaziosmanpasa University, https://orcid.org/0000-0003-1601-8654, zulfiye.zeybek@gop.edu.tr

Introduction

Mathematical reasoning and proof have been emphasized as one of the most important goals for mathematics education at all grade levels (National Ministry of Education [MEB], 2018; National Council of Mathematics Teachers [NCTM], 2000). The importance of proof stems not only from the fact that it forms the basis for comprehending mathematical concepts, but it also stems from the fact that it is an essential tool for comprehending the structure of mathematics as a discipline and mathematical communication (Knuth, 2002b). The emphasis on the concept of proof in school mathematics raises the debate about whether the concept of proof should be integrated as an important component of mathematics classes at all grade levels from early elementary to high school (CCSSI, 2010; NCTM, 2000).

The importance of developing high-level skills such as reasoning abstractly, constructing conjectures and arguments, critical thinking, analyzing arguments has been emphasized in the mathematics curriculum (CCSSI, 2010; MEB, 2018; NCTM, 2000). In the widely accepted mathematics standards in the United States—The Common Core State Standards for Mathematics [CCSSI], 2010—the importance of mathematical reasoning and proof for all students from kindergarten to high school is emphasized in the 'Standards for Mathematical Practice' by echoing the importance of (a) reasoning abstractly and quantitatively, (b) constructing viable arguments and critiquing the reasoning of others, and (c) attending to precision (p. 6-8). These standards suggest that reasoning and proof activities should not only be planned as stand-alone activities; instead, they should be incorporated as an indispensable part of students’ daily mathematical experiences at all grade levels.

Knuth (2002a) argues that these suggestions for making mathematical proofs an important component of students' daily mathematical experiences at every grade level increase mathematics teachers' expectations and responsibilities. Teachers’ and prospective teachers’ conceptions of proof undoubtedly constitute an essential factor affecting how and to what extent mathematics teachers would apply these suggestions. For example, Martin and Harel (1989) argue that the students in the classrooms of teachers who think that empirical arguments could be considered a valid way to prove a mathematical statement might show similar thinking habits. Considering the suggestions that mathematical proofs should be an essential part of mathematics classrooms from earlier grade levels, it becomes important to examine mathematics teachers' argument construction and evaluation processes. Accordingly, this study focuses on the argumentation construction and evaluation processes of middle school mathematics teachers and prospective teachers.

When the relevant literature is examined, it is seen that teachers and prospective teachers have various difficulties in proving (see Simon and Blume, 1996; Stylianides and Stylianides, 2009; Zeybek-Simsek, 2020). It could be argued that these difficulties usually arise from understanding the mathematical concepts, comprehending and applying the logical structure of the proof, or using the mathematical language correctly (see Epp, 2003; Zeybek-Simsek, 2020). Stylianides and Stylianides (2009) states that studies on mathematical proofs generally focus only on learners' argument construction processes or only on the processes of evaluating arguments constructed by researchers. However, considering that argument construction and evaluation processes involve different cognitive levels, it is thought that considering these processes separately might reveal different pictures about learners' perceptions of proof. Stylianides and Stylianides (2009) claim that examining the argument construction and evaluation processes together will provide the opportunity to make more accurate interpretations of learners' levels of proof. In line with this suggestion, this study aims to examine the ability of mathematics teachers and prospective teachers to evaluate the presented arguments and their level of argument construction.

The following research problems guided the study:

1. At what level do the mathematics teachers construct the arguments to justify the truth/falsity of the presented mathematical statements?
    a. What are the criteria for evaluating the arguments presented by mathematics teachers?
2. At what level are the prospective mathematics teachers' arguments to justify the truth/falsity of the presented mathematical statements?
    a. What are the criteria for evaluating the presented arguments by prospective mathematics teachers?

Definitions of Mathematical Proof

The realization of the role changes between deductive (logical) and inductive (experimental) reasoning and that both reasoning serves as an important tool in the development of mathematical thinking ability played an important role in the development of the concept of proof (Harel & Sowder, 2007). Suggestions that proof should be at the center of mathematics classrooms at all grade levels (CCSSI, 2010; MEB, 2018; NCTM, 2000) have led mathematics educators to examine the role/mission of proof in school mathematics and to define the concept of proof from a holistic perspective (see Balacheff, 1988; Stylianides, 2007). When the relevant literature is examined, it could be concluded that the definitions of the concept of proof focus on different dimensions of the concept (formal dimension and sociocultural dimension). According to Dede and Karakuş (2014), the formal dimension of a mathematical proof deals mostly with the foundations used in the verification process of a mathematical statement such as the definitions, the propositions, rules, the justifications of which has been proven beforehand, or the premises such as postulate and axiom that do not require proof. The social and cultural dimension of the proof, on the other hand, consists of the processes, procedures, and methods used for the validity of the proof (Dede & Karakuş, 2014). Thus, when examining the definitions of mathematical proof, both the formal dimension of the proof and the socio-cultural dimension should be taken into consideration.

NCTM (2000) defines proof as “arguments that contain the conclusion carefully deduced from the hypotheses” (p.55) in general. Bell proposes another definition that highlights the formal dimension of proof. Bell (1976) defines proof as “a directed tree of statements, connected by implications, whose endpoint is the conclusion and whose starting points are either in the data or are generally agreed facts or principles” (p. 26). According to Yıldırım (2000), the proof is “is a reasoning process, which we can call logical judgment, to reach the necessary conclusion through the rules of logical inference of some premises (postulates or propositions whose proof has been given) that are considered to be true” (p.51). While these definitions focus solely on the proving process that uses a mathematically valid way, they ignore the basic elements of mathematical proofs and especially the social elements in the stage of proving (Bieda, 2010). Simon and Blume (1996) argue that the expression of “proof is based on statements and principles that are known, proven or accepted” in the definitions which underline the formal aspect of proof should be changed with the expression of “proof is an argument that is built on knowledge accepted by the community, is considered logical by the community, and consists of ideas that agree with previously accepted knowledge by community” (p. 6). Similarly, Stylianides (2007) defines proof as “a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:

1. It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification;
2. It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to or within the conceptual reach of the classroom community; and

3. It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of the classroom community ” (p.291).

It is thought that the definition proposed by Stylianides (2007) would be useful in examining the evaluation processes of the participants' arguments. In this definition, the proof is not limited to formal proofs; rather, the characteristics of the classroom community and the conceptual access limits of the learners are considered. A similar approach is followed in this study, which deals with how teachers and prospective teachers justify whether the presented mathematical statements are true. For this reason, all kinds of justifications presented by the participants in the study to demonstrate the correctness of mathematical statements are referred to as mathematical arguments instead of mathematical proofs.

Proof Schemes

According to Harel and Sowder (1998), proof schema focuses on the methods of proving and includes all cognitive processes used while constructing a proof. In this respect, proof schemes include all cognitive processes that an individual employs to prove mathematical statements' truth (or falsity). Proof schemes, which include all the mathematical thinking processes that an individual uses to persuade himself or others, also show the preferences made by the individual during the proof process (Harel & Sowder, 1998; 2007).

In the relevant literature, the approaches of individuals in the process of proving are generally categorized into two main categories as empirical (example based) and deductive (formal proof) (Bell, 1976; Van Dormolen, 1977). For example, Bell (1976) classifies the approaches in the proving process into two main classes: experimental and deductive justification. According to Bell (1976), while the accuracy of the claim is ensured by checking a few examples in empirical justification, logical inferences are used in deductive justification. It could be said that Van Dormolen (1977) proposes a similar classification. Along with the studies that classify learners’ proof construction characteristics mainly into two categories, there are also studies in which these categories are further detailed more comprehensively by dividing them into subcategories. For example, while Balacheff (1988) proposes two main classes as pragmatic and conceptual proof, he later classifies the pragmatic proof scheme into three subgroups. Balacheff (1988), who examined the students' use of examples and their purposes more comprehensively, classifies pragmatic proofs into three subgroups: naive empiricism, critical experimentation, and generic example. Balacheff (1988) customizes its conceptual proof as a thought experiment. Similarly, Harel and Sowder (1998; 2007) classify the character of individuals’ proving process at three main levels as external, empirical, and analytical.

Table 1. *Proof Schemes and Subcategories*

External Proof Scheme	Empirical Proof Scheme	Analytical Proof Scheme
Authoritarian	Inductive	Transformational
Symbolic	Perceptual	Axiomatic
Ritual		

While individuals generally depend on external sources (e.g., textbook, teacher) in their argument construction process at the external proof scheme, they usually tend to reach general judgments from specific examples at the practical level. On the other hand, at the level of analytical proof, individuals construct their arguments through logical inferences. These categories proposed by Harel and Sowder (1998) could be summarized in Table 1.

Harel and Sowder (2007) emphasize that the external proof scheme is common among students by stating that “…in the eyes of the students, the proof should have a certain appearance determined by the teachers…” (p. 822). Harel and Rabin (2010) also document that thinking based on authority (external proof scheme) is common among university students. Considering that the external proof scheme could be common among the participants of this study, the proof taxonomy introduced by Harel and Sowder (1998; 2007), in which the external proof scheme was comprehensively discussed, was adopted as the conceptual framework for the study. The proof schemes in Table 1 served as a guide in designing the data collection tools and in the analysis of the arguments constructed by the participants. The next section will explain more detailed information about how these categories in Table 1 were employed.

Method

Research Design

This study, which aimed to investigate the argument construction and evaluation processes of mathematics teachers and prospective mathematics teachers, was designed as a qualitative research study. A case study, one of the qualitative research methods, was designed to understand how the participants construct and evaluate mathematical arguments. According to Creswell (2007), a case study is a qualitative research approach in which the researcher's opinions are determined by making a detailed analysis of the event or events with more than one data collection tool such as observation, interview, reports. The recommendations of making mathematical proofs an indispensable part of mathematics lessons at all grade levels constitute why we determine our case as mathematics teachers and future mathematics teachers since we believe that they are at the center of these recommendations. Although it was not one of our purposes to compare these two groups examining both groups that were at the target of these recommendations was thought important to examine.

Participants

The participants consisted of three mathematics teachers (Deniz, Zehra & Merve[1]) working in middle schools located in the Black Sea Region and three prospective mathematics teachers (Nurgül, Aslı & Şeyma) who were in their third year of a teacher education program at a state university located in the same region. Participants were selected using the convenience sampling method. According to Singleton and Straits (2005), convenience sampling is expressed as the researcher taking a sufficient number of members from the group to have access easily and determining them as a sample.

All mathematics teachers participating in the study were female, and their years of teaching experiences varied between 2-10 years. Deniz had 10 years of teaching experience, Zehra had 2 years of teaching experience, and Merve had 5 years of teaching experience by the time the data was collected. Having different years of teaching experience and volunteering to participate in the study consisted of some of the mathematics teachers' selection criteria. All prospective mathematics teachers participating in the study were also female, and they were all juniors by the time the data was collected. The fact that the prospective teachers had completed most of their education courses and that they had not yet completed the teaching practice courses consisted of some of the selection criteria of the prospective teachers. Since the study aimed to examine the argument construction and evaluation processes of the participants, the fact that the prospective teachers had completed most of their courses was thought to increase the richness of the data collected. Knuth (2002b) stated that although mathematics teachers knew the limitations of empirical arguments, they accepted them as proofs since they believed such arguments might be more suitable for students. Considering this context, the prospective teachers had not yet completed the teaching

[1] All names used in the study are pseudonyms

practice courses was thought important considering the possibility of evaluating the presented arguments according to their criteria rather than looking from the student perspective. The willingness of the prospective teachers to participate in the study constituted another selection criterion.

Data Collection Tools and Data Collection Process

Given that the study aimed to analyze the argument construction and evaluation processes of mathematics teachers and prospective teachers, the Mathematical Statements Form, which included four mathematical statements, and the Argument Representations Form, which consisted of three arguments prepared for each statement in the form of the mathematical statement, were used as data collection tools. In order to collect the data, semi-structured individual interviews lasting 45-60 minutes were conducted with the participants, and all interviews were video recorded. One of the authors conducted individual interviews in an empty classroom environment. During the individual interviews, the participants were first asked to evaluate each mathematical statement in the form of the mathematical statement and to decide whether the statement was true (or false). During the interview, “How did you come to this conclusion?” “Why do you think this statement is true?” or “Can you explain how you decided?” were implemented as probing questions. The participants were given sufficient time to construct their arguments for the statements. Then, three arguments at various levels in the argument representations form were presented to the participants one by one and they were expected to evaluate these arguments. In this process, the probing questions such as: “Is this argument convincing?”, “Does this argument constitute a proof?”, “How did you decide?” were implemented to get the participants to provide more detailed explanations of their thoughts.

Mathematical statements forms.

Four mathematical statements were used in the form of the mathematical statement (see Appendix 1). Mathematical statements in this form were presented to the teachers and prospective teachers one by one, and the participants were asked to justify the truth/falsity of each statement presented. The relevant literature was used while preparing the mathematical statements in the form (Aylar, 2014; Çontay, 2017; Çontay & Paksu, 2018; Güler & Ekmekci, 2016). It was aimed to ensure that the mathematical statements were within the conceptual reach of the participants.

Argument representations form.

In argument representations form, three different arguments for each statement in the form of the mathematical statement, 12 arguments in total, were used. This form was designed to describe the argument evaluation processes of teachers and prospective teachers and understand the criteria for what constitutes a mathematical proof for the participants. The participants were asked to decide which of the arguments presented in this form constituted a mathematical proof and to explain their reasons. Arguments in this form were designed as arguments with different characteristics such as algebraic, axiomatic, visual, generic examples, or example-based (empirical) arguments. For example, while argument 1 used for mathematical statement 1, was an algebraic argument representation based on the use of algebraic expressions, argument 2 was used as an empirical argument representation since it was based on a few examples. On the other hand, argument 3 used for the same statement was a generic example argument. While preparing the arguments in the argument, representations from the relevant literature was again used to guide this process (e.g., Aylar, 2014; Miyazaki, 2000). The arguments in the argument representations form designed for mathematical statement 1 are displayed in Appendix 2.

Data Analysis Process

The data analysis process occurred in three steps. In the first step, the data obtained from the interview records were transcribed separately for each participant. In the second step, the responses given by the participants to each of the statements in the form of the mathematical statement were analyzed. How the participants justified the statements in the form of the mathematical statement was analyzed individually by the researchers first. In this process, the descriptive analysis method was applied. Buyukozturk et al. (2011) defined descriptive analysis as classifying the obtained information based on existing codes. Table 1 was used as external codes in the descriptive analysis process. This process aimed to examine the reasons underlying the arguments constructed by the participants in-depth. If the arguments were based on a sense of trust in an external authority, these arguments were classified as external arguments, while if there was an effort to generalize from a few specific cases; these arguments were classified as empirical arguments. If logical inferences and a tendency to justify for all cases in the statement domain were indeed employed in the argument, these types were classified as analytical arguments. The researchers came together to compare their classifications, and this process continued until a full agreement was achieved.

The process of evaluating the arguments of the participants in the form of argument representations was analyzed at the last step. As in the second step, the researchers first analyzed the data individually and then compared their analyses. In this process, the criteria for evaluating the participants' arguments were examined based on the definition of proof proposed by Stylianides (2007). In this process, it was examined which criteria the participants focused on while evaluating the arguments. These criteria were determined as “modes of representation”, “characteristics of the classroom community,” or “foundation,” as stated in the definition. For example, if the participant found the presented argument convincing only because of the external features (e.g., the method used such as proof by induction or the mathematical symbols used in the argument), this response was classified as " modes of representation". However, if the participant stated that the method, definition, or statements used in the presented argument were correct and valid for the entire set covered by the presented argument, this response was classified as "foundation". Similarly, the responses were classified as “classroom community” if they focused on criteria such as the appropriateness of the presented arguments for the students or whether the arguments would be convincing for the students.

Findings

This study aimed to investigate the proof construction and evaluation processes of mathematics teachers and prospective teachers and the difficulties they experienced during this process. Through mathematical statements and argument representation forms, the participants’ processes of evaluating the truth/falsity of presented mathematical statements, justifying their decisions, and constructing arguments, as well as evaluating the presented arguments were examined. In this section, the teachers' findings and the prospective teachers' findings will be presented separately.

Findings Regarding Argument Construction and Evaluation Processes of Mathematics Teachers

In this section, the findings regarding the mathematics teachers’ (Deniz-Zehra-Merve) responses to the mathematical statements form and their argument construction processes will be shared first. Afterward, the findings of mathematics teachers' argument evaluation processes will be shared.

Findings regarding the mathematical statements form.

All findings gathered from the mathematical statements form are presented cumulatively in Table 2.

Table 2. *Classification of teachers' arguments for mathematical statements*

	M.S.1	M.S.2	M.S.3	M.S.4
No Argument		Merve		Zehra
External Argument				
Empirical Argument		Deniz	Deniz-Zehra	Deniz
Analytical Argument	Deniz-Zehra-Merve	Zehra	Merve	Merve

Note: Mathematical statements are expressed as M.S.1, M.S.2, M.S.3, M.S.4.

It was seen that the mathematics teachers participating in the study were able to decide on the truth/falsity of the presented mathematical statements in general, and they could construct an argument to justify their decision. However, it was also among the findings that two teachers (Merve and Zehra) had difficulties in constructing arguments for two statements (Mathematical Statement 2 and Mathematical Statement 4) in the mathematical statements form. In addition, it was recognized that some prospective teachers constructed arguments that were coded at an empirical level to justify the presented statements.

For mathematical statement 1, it was documented that all the teachers participating in the study constructed a valid logical argument for all numbers. A representation of this situation is displayed in Figure 1.

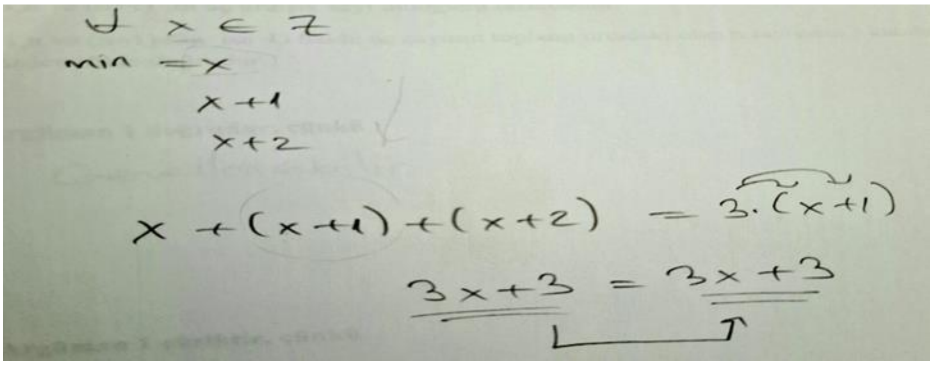


Figure 1. *Analytical Argument Representation by Merve*

As seen in Figure 1, Merve constructed a valid argument for all integers by using mathematical concepts and processes such as consecutive number definition and distributive property. For this reason, this argument that Merve constructed for mathematical statement 1 was classified as an analytical argument.

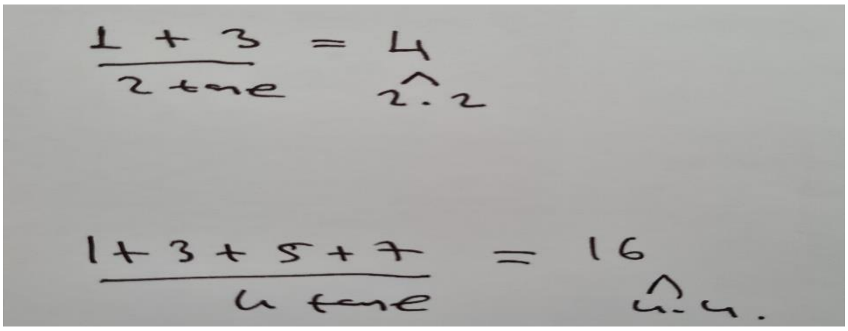


Figure 2. *Empirical Argument Representation by Deniz*

For mathematical statement 2, Deniz tried to construct an argument by using specific examples. As shown in Figure 2, Deniz first stated that the sum of two consecutive odd numbers (1 and 3) she chose was 4 and expressed 4 as 2 x 2. She stated that the result would be the square of the number of the terms. Later, Deniz wrote the sum of four consecutive odd numbers (1, 3, 5, and 7) and said that the sum of these numbers was 16 and that it again could be expressed by multiplying the number of terms by itself. It was understood from the expression of "I prove the statement in this way", Deniz reached a generalization from these two specific examples. Deniz's generalization of the statement would include all consecutive odd numbers from these two examples, which constituted the reason why this argument was classified as an empirical argument.

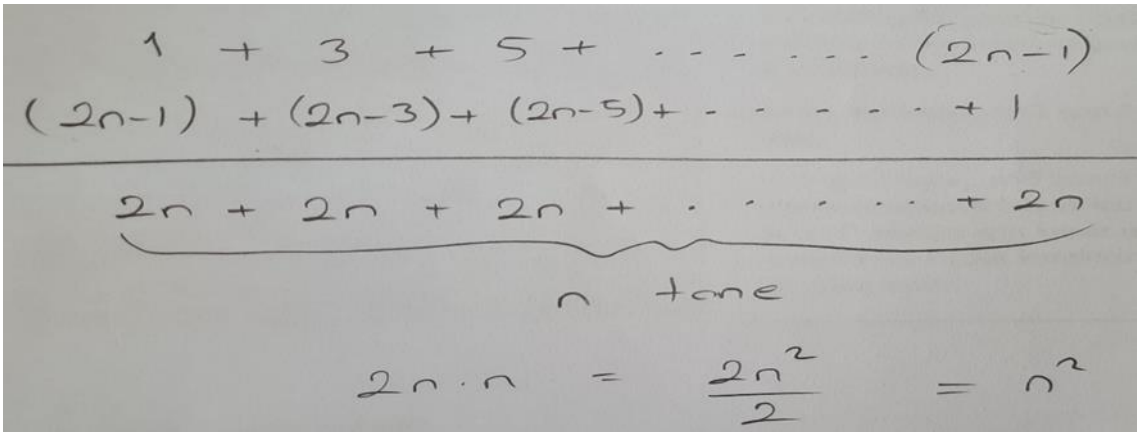


Figure 3. *Analytical Argument Representation by Zehra*

It was observed that Zehra attempted to construct a general argument for mathematical statement 2 by employing algebraic expressions. Zehra wrote the sum of consecutive odd numbers from 1 to 2n-1 in a row and then repeated each term from 2n-1 to 1, one under the other (see Figure 3). She tried to justify the mathematical statement by showing that the sum of each term was equal to 2n. Since Zehra's argument was general (it included the sum of all consecutive odd numbers) and was logical, it was classified as an analytical argument.

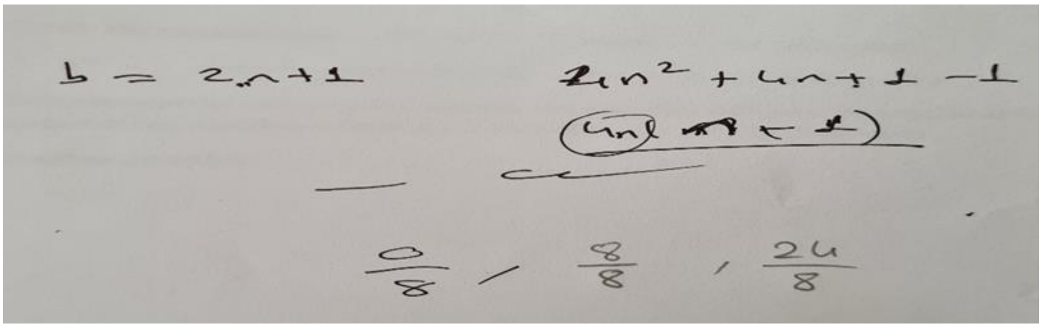


Figure 4. *Empirical Argument Representation by Deniz*

For mathematical statement 4, Deniz tried to construct a general argument by using odd number definitions, algebraic expressions, and relevant mathematical operations, as seen in Figure 4. Stating that b=2n +1 using the odd number definition, Deniz showed the equation of $b^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1$. Deniz put this equation in the common parenthesis of 4n and said that the expression of $4n(n + 1)$ was a multiple of 4 and would be divisible by 4. However, she did not know whether the expression was divisible by 8. Having difficulty in concluding, Deniz stated that the expression for b=1, 3, and 5 would be equal to 0, 8, and 24, and these values would be divided by 8 without a remainder. It was observed that Deniz had difficulty in completing her argument based on the definition of odd numbers and algebraic expressions and then preferred the use of examples and developed another argument. This argument based on the use of examples was classified as an empirical argument.

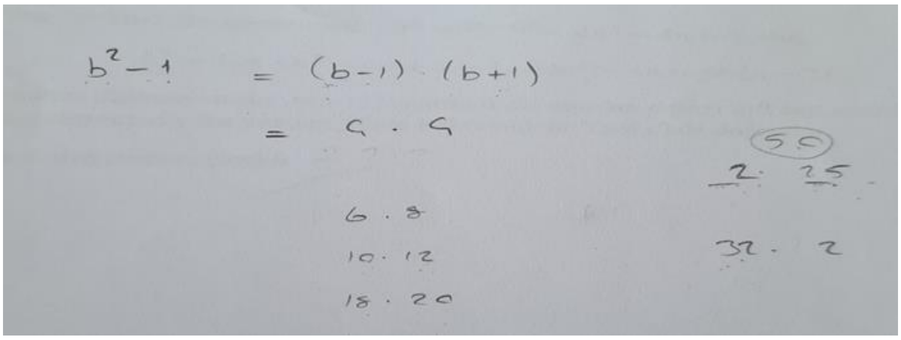


Figure 5. *No Argument Representation by Zehra*

Zehra: If I do the first thing that comes to my mind (b-1). I write it as (b+1). b is an odd number, subtracting 1 from an odd number makes an even number, and if I add 1 to an odd number, it also makes an even number. Even numbers are divisible by 2. So since 8 is 2.2.2, it means dividing by 2 three times. It is divisible by 8.

Researcher: So, is the product of two even numbers always divisible by 8? How do you justify that?

Zehra: Hmm, yes, it doesn't apply to all of them. For example, 2x2 becomes 4. I can't prove it, but if I multiply even numbers such as 6.8, 10.12, or separate the number 50 like 2.25, but this time 25 is an odd number, no I can't prove it. I can't turn it into a proof...

As seen in Figure 5 for mathematical statement 4, Zehra tried to construct an argument using algebraic expressions but stated that she could not prove this statement because she could not complete the argument. Therefore, Zehra's argument was coded as No Argument for this statement.

Findings regarding the argument representations form.

The findings regarding the argument evaluations of the mathematics teachers participating in the study are presented in Table 3.

Table 3. *Classifying the processes of mathematics teachers' evaluation of the arguments*

	M.S.1			M.S.2			M.S.3			M.S.4		
	A1	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A2	A3
Representation Modes			Deniz			Deniz		Zehra	Deniz			Deniz Zehra Merve
Classroom Community				Deniz Merve								
Foundations	Deniz Zehra Merve	Deniz Zehra Merve	Zehra Merve	Zehra	Deniz Zehra Merve	Zehra Merve	Deniz Zehra Merve	Deniz Merve	Zehra Merve	Deniz Zehra Merve	Deniz Zehra Merve	

Note: Arguments were stated as A1, A2, and A3. Mathematical statements were stated as M.S.1, M.S.2, M.S.3, and M.S.4.

It was seen that the teachers who participated in the study mostly evaluated the arguments according to the criterion of foundations. According to mathematics teachers, it was important for an argument to be logical (using correct definitions and propositions) to be considered proof. The participating teachers stated "the feature of being a general argument accepted by everyone" as an essential criterion when analyzing the arguments presented. In addition, the teachers sometimes evaluated the presented arguments according to the criteria of "presentation modes" and "class community characteristics."

During the individual interviews, the mathematics teachers stated that examples were important in the learning environment, and empirical arguments might be more useful than analytical arguments in the classroom environment. For example, by stating "examples are more concrete for students", "we can use examples to verify mathematical statements" for argument 1 presented for mathematical statement 2, Deniz argued that experimental arguments should be preferred in the classroom environment since they are appropriate for students. For this reason, it was thought that Deniz primarily considered the characteristics of the classroom community while evaluating the argument.

During the individual interviews, it was seen that mathematics teachers found the mathematical symbols used in some of the arguments were convincing. For example, Deniz's explanation for argument 3 presented for mathematical statement 2, such as "I don't need to evaluate the argument because of the symbol $\sum$, the argument is a proof anyway," showed that symbols were considered an essential part of proofs and the arguments that included such symbols were accepted as convincing in proof. Similarly, Deniz stated that argument 3 employed the proof by induction method. Therefore the argument could be considered as proof. Statements such as, "Because we learned the induction method at college", "This method [proof by induction] is one of the methods for proving" showed that Deniz considered a mode of representation as a criterion in the argument evaluation process.

According to another study finding, mathematics teachers found the presented mathematical arguments convincing if they looked like the arguments they constructed. For example, while evaluating argument 1 presented for mathematical statement 1, Merve's statement of "It is a proof very similar to the proof I have constructed. Justified by using variables. This is how I did it, so the argument is correct" showed that the similarities between argument 1 and her argument were influential in her evaluation process.

Findings Regarding Argument Construction and Evaluation Processes of Prospective Mathematics Teachers

In this section, the findings of the prospective mathematics teachers' (Nurgül-Aslı-Şeyma) arguments for mathematical statements will be shared first. Afterward, the findings regarding the prospective mathematics teachers' argument evaluation processes will be shared.

Findings regarding the form of the mathematical statement.

The arguments constructed by the prospective teachers and their classifications are presented cumulatively in Table 4 below. As seen in the table, it was seen that the prospective teachers, except for Aslı, were able to construct an argument to justify the truth of the mathematical statements. Aslı, on the other hand, struggled to construct an argument for mathematical statement 3. Another extraordinary situation was that proof by induction and the use of algebraic expressions were the most common methods preferred by the prospective teachers.

Table 4. *Classification of prospective teachers' arguments for mathematical statements*

	M.S.1	M.S.2	M.S.3	M.S.4
No Argument			Aslı	
External Argument		Nurgül-Aslı	Şeyma	
Empirical Argument				Aslı
Analytical Argument	Nurgül-Aslı-Şeyma	Şeyma	Nurgül	Nurgül-Şeyma

For mathematical statement 1, Nurgül constructed two arguments in which she used algebraic expressions and employed the proof by induction method.

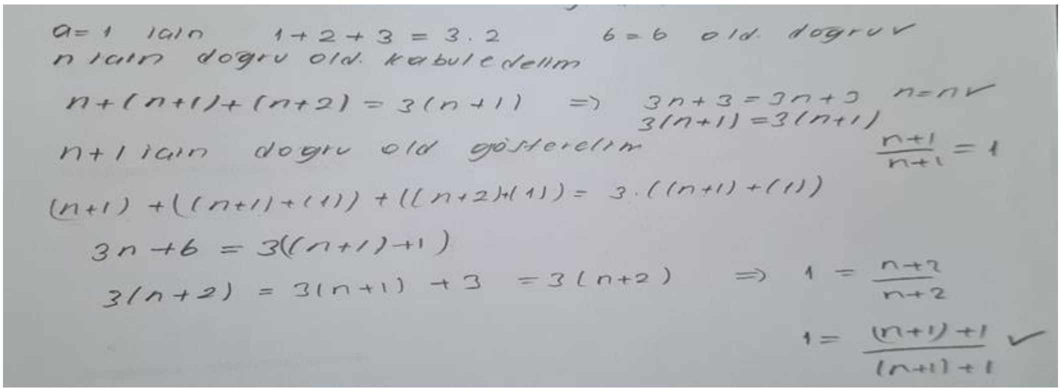


Figure 6. *The Analytical Argument Representation by Nurgül*

In one of the arguments Nurgül constructed, it was seen that she tried to employ the induction method (see Figure 6). However, it was important to note here that the prospective teacher looked for approval by using expressions such as “Am I doing it right?”, “I guess we were doing it like this” at every stage of the argument construction process and had difficulty employing the method correctly.

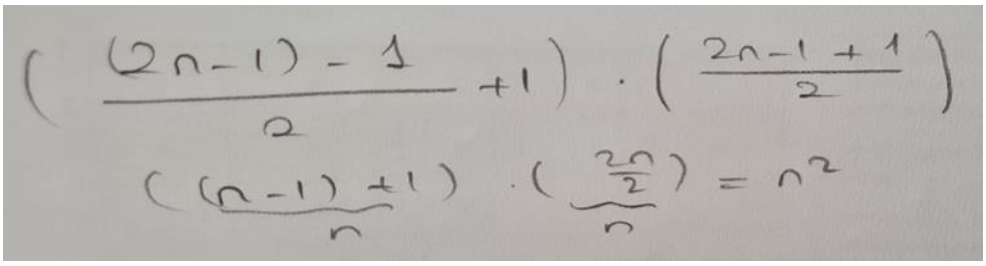


Figure 7**.** *External Argument Representation by Aslı*

For mathematical statement 2, Aslı constructed an argument using the sum of n terms formula, as seen in Figure 7 above. Although the prospective teacher tried to construct a general argument, she stated expressions such as “I did it with the formula”, “I probably couldn't prove it otherwise” during the individual interview. Additionally, she did not attempt to justify the formula; instead, she trusted an external source such as the formula. All these constitute why the prospective teacher's argument is classified as an external argument.

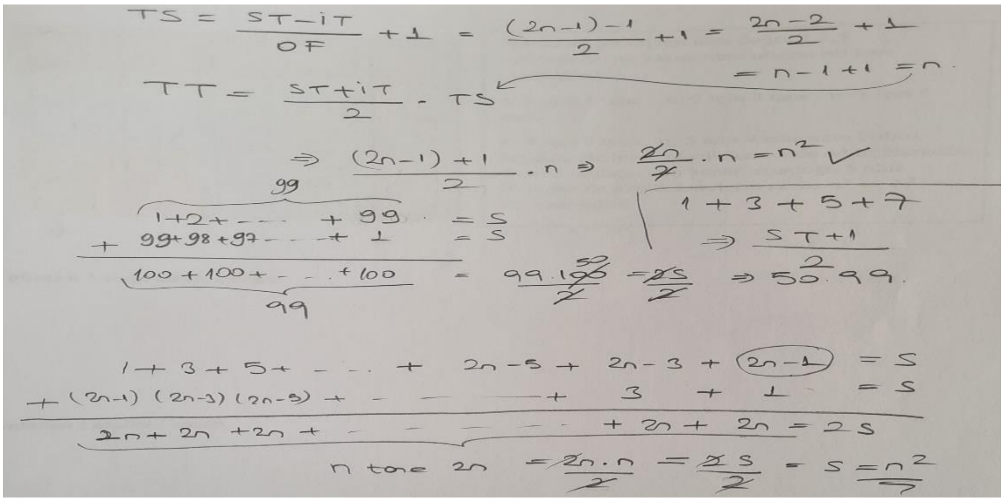


Figure 8. *Analytical Argument Representation by Şeyma*

For mathematical statement 2, Şeyma first found that the number of the terms in the given statement was n by applying the formula and then showed the statement's truth using the sum formula (see Figure 8). Unlike Aslı, Şeyma was able to construct a second argument by using a different strategy apart from solely focusing on the formula. Şeyma summed up the algebraic expressions by writing the sum of the n terms from 1 to 2n-1 and starting from 2n-1 to 1 with each term one under the other. Şeyma's argument was classified as an analytical argument because she justified the given mathematical statement by showing that the sum of both terms written under the other was 2n and the sum of the terms was n.

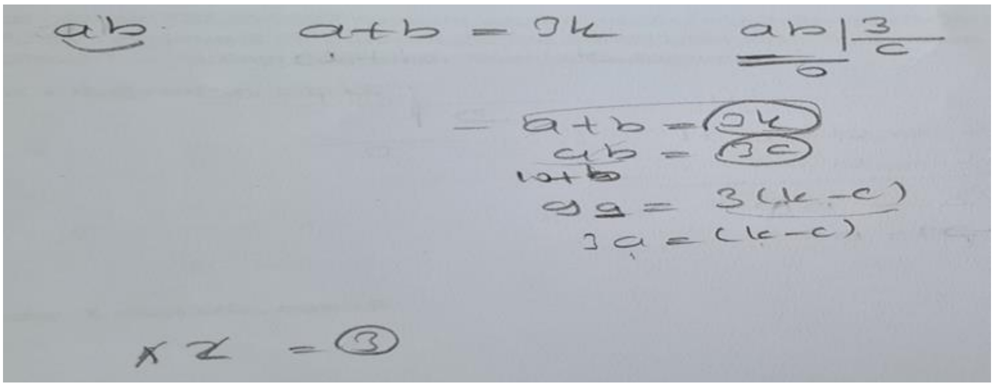


Figure 9. *No Argument Representation by Aslı*

As seen in Figure 9, Aslı tried to construct an argument for mathematical statement 3 using mathematical operations and concepts such as division and place value. However, Aslı stated that she could not complete her argument using expressions such as "The proof is true, but I cannot do it" during the interview. Therefore, Aslı's argument was evaluated in "No Argument" category.

Şeyma, on the other hand, showed a tendency to trust external authority by using expressions such as "We do it by rote", "Habits, that's how we learned", "I can't remember, we didn't question why it was 3 times at schools", "I trusted my teachers, I did not investigate".

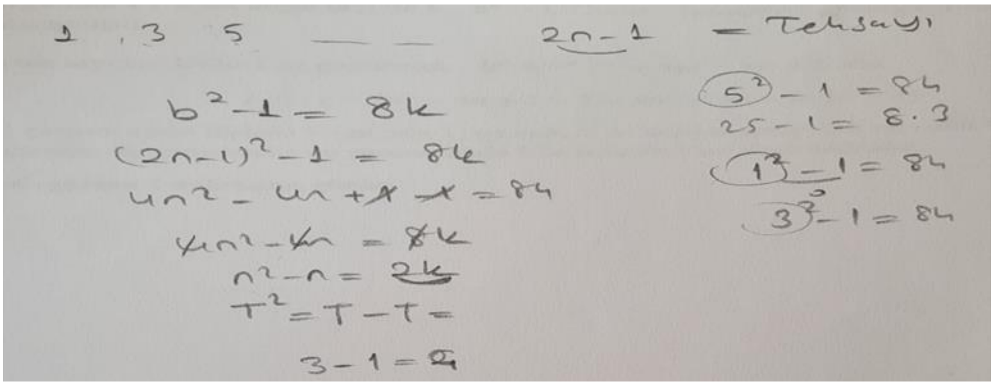


Figure 10**.** *Empirical Argument Representation by Aslı*

For Mathematical statement 4, Aslı tried to construct a general argument using algebraic expressions and odd number definitions. As shown in Figure 10, Aslı had difficulty concluding her argument. Aslı stated that $n^2 - n$ should be an even number by writing the expression $n^2 - n = 2k$, but she could not explain why it should be an even number. For this reason, it was observed that he could not make a general judgment. Aslı, who had difficulty in completing her argument, developed an argument based on 3 examples (for n=3, 5, and 1) and claimed that this argument would be sufficient. For this reason, Aslı's argument was classified as empirical.

It was recognized that prospective teachers usually attempted to construct arguments based primarily on mathematical definitions and algebraic expressions for all statements in the form of the mathematical statement. However, prospective teachers who had difficulty developing these arguments for some statements (e.g., MS3, MS4) either stated that they would not constitute proof or tended to construct arguments based on the use of examples. The tendency of prospective teachers to trust external authority (e.g., math formulas, university courses) was another remarkable situation during the individual interviews.

Findings regarding the form of the mathematical statement.

Table 5 displays the findings regarding evaluating the arguments presented for mathematical statements.

Table 5. *Classifying the processes of prospective teachers' evaluation of the arguments*

	M.S.1			M.S.2			M.S.3			M.S.4		
	A1	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A2	A3
Representation Modes	Aslı	Nurgül		Aslı	Aslı	Aslı		Aslı Nurgül Şeyma	Nurgül			Aslı Nurgül Şeyma
Classroom Community			Nurgül	Şeyma			Nurgül					
Foundations	Nurgül Şeyma	Aslı Şeyma	Aslı Şeyma	Nurgül	Nurgül Şeyma	Nurgül Şeyma	Aslı Şeyma		Aslı Şeyma	Aslı Nurgül Şeyma	Aslı Nurgül Şeyma	

As shown in Table 5, it was observed that the prospective teachers generally focused on the criterion of the foundation while evaluating the presented arguments. They usually evaluated the arguments based on whether the argument was general to cover all the possible cases that the statements were referring to. However, it was also noticed that the prospective teachers tended to focus on external factors, which were coded as representation modes while explaining why the presented arguments were convincing.

While evaluating the argument 1 presented for mathematical statement 1, Nurgül employed the expressions such as "Can I accept it? However, our teachers may not want it that way", "Proof by mathematical induction, deduction, proof by contradiction… whatever it is if we accept the opposite", which showed Nurgül's tendency to evaluate the arguments according to an external authority. However, Nurgül also stated: "I think it is necessary to make sure that the argument should prove for everything, and that is, the proof should be general", which showed that she used the criterion of being a general argument in the argument evaluation phase. Therefore, Nurgül evaluation for this argument was classified as a foundation. Similarly, Şeyma showed that she focused on the foundation in the argument evaluation process by stating: "the conditions of the proof should give correct results for all numbers or terms", "since n is any number and it is true for all propositions".

While evaluating argument 2 presented for mathematical statement 1, Aslı employed expressions such as "In our classes, it is always mentioned that there is no proof by providing examples, our teachers say so, therefore, we cannot accept examples as sufficient proofs". Using such expressions, Aslı indeed argued that an argument constructed based on the use of examples could not be considered a valid mathematics method. Although Aslı argued that using examples would not be considered a valid way for mathematical proofs, it was important to mention that she based her argument on an external authority (i.e., our teachers say so, in our classes it is mentioned that). For argument 3 presented for mathematical statement 2, Aslı again appealed to external reasons (the use of mathematical symbols) as an evaluation criterion by using expressions such as "The symbol $\sum$ is very nice, it is easier to accept, for generalization". For this reason, it was seen that the presentation mode was used as a criterion in Aslı's evaluation process.

It was recognized that prospective teachers who evaluated experimental arguments based on the use of examples generally did not evaluate these arguments as proofs. For example, when Şeyma evaluated argument 1 presented for the mathematical statement 3, she stated: "Proof by giving an example is unacceptable for all numbers, so we cannot accept it as a proof". Similarly, Nurgül referred the argument 2 presented for mathematical statement 4 as incomplete proof since generalization cannot be made from it. It was observed that the prospective teachers described the general aspect of proofs as one of the most important steps while examining and analyzing the given arguments.

Discussion and Conclusion

This study, in which the argument construction and evaluation processes of three prospective mathematics teachers studying at a state university and three mathematics teachers working at a public school were examined, documented that teachers and prospective teachers were able to verify the truth/falsity of the presented statements and then justify their evaluations. It was noted that the participants generally tended to construct arguments for the presented mathematical statements by using mathematical definitions and algebraic expressions. Although the participants mostly tended to construct a general argument, it was also among the findings that they struggled with constructing an argument, and some of them could not proceed to complete their arguments (see Table 2 and Table 4). During argument construction processes, the participant teachers and prospective teachers usually experienced difficulties from not knowing the proof methods and not applying them appropriately. For example, the prospective teacher Nurgül struggled with applying the induction method while constructing her argument, and she waited for approval from the researcher at every step of the argument construction process. Zehra, on the other hand, stated the equation of $b^2 - 1$ = *(b-1). (b+1)* while she was constructing an argument for mathematical statement 4. She was able to recognize the fact that *(b-1). (b+1)* was indeed the product of two even numbers. But then, using the odd number definition and the relations between numbers, she could not conclude that the expression *(b-1). (b+1)* was a multiple of 8. Although she tried to find a pattern among the numbers using specific examples, it was seen that Zehra could not complete her argument (see Figure 5). Douek (1999) calls all the information used in the mathematical argument construction process the reference corpus. According to Douek (1999), the reference corpus "contains not only reference statements, but also visual statements, and more generally, empirical evidence, statements accepted without question (i.e., "reference arguments" or "references")" (p. 130). Douek (1999) argues that it will be impossible to complete arguments if the reference corpus is not within the conceptual reach of the learner. When considered in this context, it was seen that all the difficulties experienced due to the methods of proving, mathematical definitions, relations, or the use of formulas, which should be among the reference corpus in the process of proving, constitute an obstacle for the participants.

It was noticed that the teachers and teacher candidates participating in the study tend to use examples when they struggle with constructing arguments. For example, for mathematical statement 4, Deniz tried to construct an argument using the odd number definition and algebraic expressions, but she had difficulty completing her argument. In this case, it was observed that Deniz tried to justify the truth of the statement by showing that the statement held true for specific examples (see Figure 4). Likewise, prospective teacher Aslı tried to construct an argument for mathematical statement 4 using algebraic expressions. However, when she could not reach a conclusion and complete the argument she attempted to construct, it was observed that she rather constructed an argument at an empirical level (see Figure 10). Mathematics educators state that students' justification habits should be similar to those of mathematicians and that students should use valid methods to demonstrate the truth of mathematical statements (Weber, Inglis, & Mejia-Ramos, 2014). One way to ensure this is for teachers and prospective teachers to be familiar with valid proofs used by mathematicians. In cases where participants failed to construct a general argument while proving the presented mathematical statements, their tendency to construct experimental arguments is considered insufficient when considered in this context.

It was observed that the participants had difficulties constructing arguments to prove the truth of mathematical statements and tending to rely on an external authority from time to time. It was noteworthy that teacher candidates tended to trust more on authority. For example, for the mathematical statement 3, Şeyma's statements as "...we do it by rote", "Habits, that's how we learned", "...we didn't question why she was tripled neither in the classroom nor at school. I used to trust my teachers, I never investigated why…" indicated her tendency to trust an authority. Okumus and Zeybek Simsek (2021) documented that rule-based thinking is common among teacher candidates, and they tend to accept the rules they learn as correct without questioning them. One of the reasons for this is that mathematical rules, formulas, and relations are usually presented ready-to-take in mathematics classes, and textbooks and students are expected to accept these rules without questioning (Weiss & Herbst, 2015). Creating classroom environments where the validity of mathematical rules and formulas is questioned and proven is considered important in eliminating the rule-based thinking structure, instead of such practices that require the acceptance of mathematical rules, formulas, and features without questioning.

Prospective teachers' tendency to trust external authority (e.g., mathematical formulas, mathematical methods) in the argument construction process also emerged in the argument evaluation process. It was observed that prospective teachers were influenced by external factors (e.g., mathematical symbols) while evaluating the presented arguments. For example, while evaluating argument 3 for mathematical expression 2, Aslı stated that she used extrinsic reasons (presentation modes) as an evaluation criterion by using expressions such as “The symbol ∑ is very nice, it's easier to accept for generalization”. Harel and Rabin (2010) stated that the external proof scheme is common among students at all grade levels and claimed that classroom practices might be a reason for this. These findings, which show that teachers and prospective teachers focus on external factors (e.g., the method or the mathematical symbols used in the argument) during the argument evaluation process, might mean that they might follow a similar approach in their classrooms. The statements such as “students must develop high standards to accept the arguments presented” and “the students should examine, construct, and critique these arguments so that the classroom becomes a research community” (NCTM, 2000; p. 346) in mathematics curriculum emphasize the importance of rigorous scrutiny of the arguments presented in the classroom. For students to reach these goals outlined by NCTM, teachers should be expected to critique mathematical arguments and distinguish the type of reasoning used in these arguments.

Although the teachers and prospective teachers who participated in the study generally found the arguments at the analytical level more convincing in the argument evaluation process, they claimed that the arguments based on examples were useful in the classroom environment. Knuth (2002b) stated that although mathematics teachers know the limitations of empirical arguments, they accept it as mathematical proof since they believe it is suitable for students. On the other hand, Martin and Harel (1989) proclaimed that the students in the classroom of a teacher who proved the validity of a mathematical statement with a few specific examples thought that empirical arguments could be valid proofs. Considering this aspect, teachers and prospective teachers must be aware of the limitations of using empirical arguments in the classroom.

All these findings, which document the difficulties experienced by the teachers and prospective teachers participating in the study in constructing and completing their arguments, emphasize that teachers and prospective teachers should have more experience with constructing and evaluating mathematical arguments. All these suggestions of making mathematical proofs indispensable for mathematics lessons from kindergarten to senior high school (e.g., CCSSI, 2010; NCTM, 2000; MEB, 2018) are only possible if teachers are ready to implement these suggestions. In order to achieve this, it is considered important to increase the experience of teachers with mathematical proofs during and after the teacher education program.

Ethical Approval: *The data used in this study was collected in 2019.*

Conflict Interest: *Authors have no conflict of interest to declare*.

Authors Contributions: *The authors have contributed equally to this paper*

References

Aylar, E. (2014). *7. Sınıf öğrencilerin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi*. Unpublished doctoral dissertation, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In Pimm D. (Ed.), *Mathematics teachers and childre*n (pp.216-235). London: Hodder and Stoughton.

Bell, A. W. (1976). A Study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 351–382.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2011). *Bilimsel araştırma yöntemleri.* Ankara: Pegem Yayınları.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for mathematics*. Retrieved from http://corestandards.org/asserts/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (2. Edition). USA: Publications.

Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları*. Unpublished doctoral dissertation, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

Çontay, E. G. & Paksu, D. A. (2018). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları ortaya koyan ifadelerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitim Dergisi, 10(*1), 59-100. Doi: 10, 16949/turkbilmat.397109

Dede, Y. & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(2), 47-71.

Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In I. Schwank (Ed.), *European research in mathematics* *education* (Vol. 1, pp. 125–139). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The Mathematical Association of America Monthly, 110*, 886-899.

Güler, G. & Ekmekci, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(1), 59-83.

Harel, G. & Rabin, J. (2010). Teaching practices associated with the authoritarian proof scheme. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*, 14–19.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students proof schemes. *Research in Collegiate Mathematics Education, 3*, 234–282.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Towards a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematical teaching and learning* (pp. 805–842). Washington, DC: NCTM

Knuth, E. J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 61–88.

Martin, G. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 41–51.

MEB (2018). *Matematik dersi öğretim program (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar*). Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lover secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41*(1), 47-68.

NCTM (2000). *Principles and standard for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Okumus, S. & Zeybek Simsek, Z. (2021). Prospective mathematics teachers' use of linguistic signifiers in the context of angles formed by two lines cut by a transversal. *Journal of Mathematical Behavior*, *63*, 10089. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100890

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 3-31.

Singleton, R. A. & Straits, B.C. (2005). *Approaches to social research* (4th ed.). New York: Oxford University Press.

Stylianides A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, *38*, 289-321.

Stylianides, A. & Stylianides, G. (2009). Proof construction and evaluation. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 237–253.

Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics, 8* (1), 27-34.

Weber, K., Inglis, M. & Mejia-Ramos, J.P. (2014) How mathematicians obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist, 49*(1), 36-58. DOI: 10.1080/00461520.2013.865527

Weiss, M. & Herbst, P. (2015). The role of theory building in the teaching of secondary geometry. *Educational Studies Mathematics, 89*, 205–229. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9599-x

Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitapevi.

Zeybek-Simsek, Z. (2020). Constructing-evaluating-refining mathematical conjectures and proofs. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 21*(2), 197-215.

Appendices

Appendix 1: Mathematical Statements Form

1. “The sum of any three consecutive numbers is equal to three times of the number in the middle” Is it true or false? Justify your response. (Aylar, 2014)
2. “$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n.n=n^2$” Is it true or false? Justify your response. (Güler & Ekmekci, 2016)
3. “ If the sum of the digits of a number is divisible by 3, then the number is divisible by 3.” Is it true or false? Justify your response. (Çontay, 2017)
4. “If b is an odd number, then b^2-1 is divisible by 8” Is it true or false? Justify your response. (Çontay & Paksu, 2018)

Appendix 2: Argument Representations for Mathematical Statement 1

Argument 1:
Merve justifies the statement as follows: Let n-1, n and (n+1) be three consecutive numbers. If n-1+n +(n+1) =3n, then the sum is three times of the middle number n. Thus, it is true.

Argument 2:
Belma justifies the statement as follows:

Belma'nın cevabı

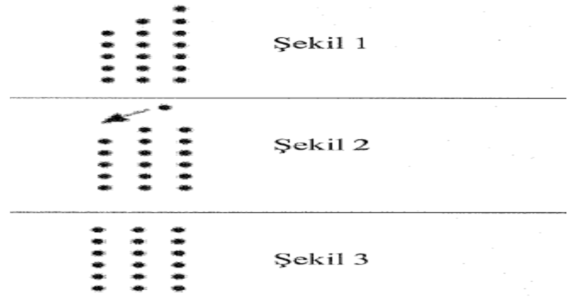
Bence ***doğru***; önce 2, 3 ve 4 sayılarını alalım.
2 + 3 + 4 = 9
9 = 3. 3
Yani ortadaki sayının 3 katı.

Sonra 21, 22 ve 23 sayılarını alalım.
21 + 22 + 23 = 66
66 = 3. 22
Yine ortadaki sayının 3 katına ulaştım.

Daha büyük sayılar denediğimde ise,
101 + 102 + 103 = 306
306 = 3 . 102
Üç ayrı deneme yaptım üçünde de doğru çıktı, bu nedenle ifade doğrudur.

(Adopted from Aylar,2014).

Argument 3:
Cem justifies the statement as follows:



As in Figure 2, I moved the point in the highest column to the shortest column to equalize the number of points in each column. So, the total number of points in the 3 columns is equal to 3 times the middle column.

(Adopted from Miyazaki, 2000)