GÜFBED/*GUSTIJ* (2021) 11 (1): 257-263
DOI: 10.17714/gumusfenbil.814413 Araştırma Makalesi / *Research Article*

$\Gamma_0(2^5p^2)$ nin normalliyeninin alt yörüngesel graflarındaki dörtgenler

Quadrilaterals in the suborbital graphs of the normalizer of $\Gamma_0(2^5p^2)$

Nazlı YAZICI GÖZÜTOK[*1,a]
[1]*Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 61080, Trabzon*

• Geliş tarihi / *Received*: 21.10.2020 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 27.11.2020 • Kabul tarihi / *Accepted*: 23.12.2020

Öz
Bu çalışmada, $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni $Nor(N)$ nin alt yörüngesel grafları araştırılmıştır. Burada N pozitif tam sayısı, 2^5p^2 şeklindeki doğal sayıları ve p sayısı da $p>3$ şartını sağlayan bir asal sayıyı ifade etmektedir. $Nor(N)$ nin genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin transitif olmadığı bilinmektedir. Bu transitif olmayan hareketten doğan grafların kenar şartları ve kenar şartları aracılığı ile de alt yörüngesel graflarda ne tür devreler olduğu araştırılmıştır. Yapılan çalışmanın sonucunda bu devrelerin yalnızca dörtgen devreler olacağı elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Alt yörüngesel graflar, Fuchs grupları, İmprimitif hareket

Abstract
In this paper, we investigate the suborbital graphs for the normalizer of $\Gamma_0(N)$ *in* $PSL(2,\mathbb{R})$, *where N will be of the form* 2^5p^2, *p is a prime and p > 3. It is known that the action of the normalizer* $Nor(N)$ *on the extended rational numbers* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *is non transitive. The edge conditions of the graphs arising from this non transitive action and then using these edge conditions, which kind of circuits the suborbital graphs have are investigated. Finally, we show that these circuits are only quadrilaterals.*

Keywords*: Suborbital graphs, Fuchsian groups, Imprimitive action*

[*a] Nazlı YAZICI GÖZÜTOK; nazliyazici@ktu.edu.tr, Tel: (0462) 377 42 59, orcid.org/0000-0002-3645-0623

1. Giriş

Γ modüler grubun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin transitif olduğu bilinmektedir. Jones vd. (1991) bu hareketi kullanarak alt yörüngesel grafları tanımlamış ve çalışmıştır. Bu grafların en temel olanı iyi bilinen ve üzerinde yeteri kadar çalışma yapılmış olan Farey grafıdır. Benzer düşünceyle $Nor(N)$ grubu için de alt yörüngesel graflar bir çok çalışmaya konu olmuştur (Güler ve Kader, 2010; Kader vd., 2010; Güler vd., 2011; Güler vd., 2016; Beşenk vd., 2019; Güler vd., 2019; Yazıcı Gözütok ve Güler, 2019; Kader vd., 2020). N nin kare bölensiz pozitif bir tam sayı olduğu durumlar için $Nor(N)$ nin alt yörüngesel graflarındaki tüm devreler (Keskin, 2006) çalışmasında incelenmiştir. $Nor(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketini transitif yapan tüm N değerleri için benzer inceleme (Keskin ve Demirtürk, 2009) çalışmasında yapılmıştır. Fakat $Nor(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin transitif olmadığı durumlar için çalışmalar devam etmektedir. Bunun amacı tüm N değerlerini kapsayacak bir çözümün elde edilebilmesidir. Bu çalışmada ise $Nor(N)$ nin kombinatorik özelliklerinin incelenmesi ve bu özelliklerin kullanılarak bir graf karakterizasyonunun elde edilmesi amaçlanmıştır.

$\Gamma_0(N) = \{g \in \Gamma \,:\, c \equiv 0 \,(mod\, N)\}$ grubu, modüler grubun en iyi bilinen kongrüans altgruplarından biridir. $\Gamma_0(N)$ nin normalliyeni $Nor(N)$ de moonshine gruplarının (Conway ve Norton,1977) çalışılmasıyla önemli bir yere sahip olmuştur ve bu sebeple de bir çok çalışmaya konu olmuştur. $Nor(N)$,

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix},\; ade^2 - bcN/h^2 = e \qquad (1)$$

şeklindeki matrislere karşılık gelen dönüşümlerden oluşan gruptur. (1) denklemindeki tüm parametreler birer tam sayı olup h, $h^2|N$ şartını sağlayan, 24 sayısının en büyük bölenini ifade etmektedir. Determinant olan e ise N/h^2 sayısının tam bölenidir. Bu durum $e||N/h^2$ ile ifade edilir ve $r||s \iff (r, s/r) = 1$ ile tanımlanır.

Akbaş ve Singerman (1992) $Nor(N)$ nin en önemli iki alt grubunu $\Gamma_C(N) = \{g \in Nor(N) : \det(g) = 1\}$, ve $\Gamma_W(N) = \{g \in Nor(N) : \ h = 1\}$ şeklinde tanımlamıştır. Bu çalışmada, imprimitif hareketi oluşturmak için $\Gamma_C(N)$ grubu kullanılacaktır.

2. Ana sonuçlar

Bu kısımdan itibaren N sayısı 2^5p^2 şeklindeki bir doğal sayıyı ifade edecektir. Burada, p sayısı, $p > 3$ şartını sağlayan bir asal sayıdır. Bu durumda tanım gereği $h = 4$ olacaktır. Dolayısıyla e, $N/h^2 = 2p^2$ sayısının tam bölenleri olan $1, 2, p^2, 2p^2$ sayıları olarak bulunabilir. Sonuç olarak, $Nor(N)$ nin 4 tip elemanı aşağıdaki biçimdedir:

$$T_1 = \begin{pmatrix} a & b/4 \\ 8p^2c & d \end{pmatrix}, ad - 2bcp^2 = 1 \qquad (2)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 2a & b/4 \\ 8p^2c & 2d \end{pmatrix}, 4ad - 2bcp^2 = 2\;(2ad - bcp^2 = 1) \qquad (3)$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} ap^2 & b/4 \\ 8p^2c & dp^2 \end{pmatrix}, adp^4 - 2bcp^2 = p^2\;(adp^2 - 2bc = 1) \qquad (4)$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 2ap^2 & b/4 \\ 8p^2c & 2dp^2 \end{pmatrix}, 4adp^4 - 2bcp^2 = 2p^2\;(2adp^2 - bc = 1). \qquad (5)$$

Lemma 2.1. (Akbaş ve Singerman, 1992) $2^{\alpha}3^{\beta}p_3^{\alpha_3} \ldots p_r^{\alpha_r}$, n pozitif tam sayısının bir asal çarpanlara parçalanışı olsun. Bu takdirde $Nor(n)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif hareket eder ancak ve ancak $\alpha \leq 7$, $\beta \leq 3$ ve her $i = 3, \ldots, r$ için $\alpha_i \leq 1$ dir.

Sonuç 2.2. $Nor(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif değildir.

Hareket transitif olmadığından, $Nor(N)$ nin, üzerinde transitif hareket edeceği, $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın maksimal bir alt kümesini bulunmalıdır.

Lemma 2.3. (Akbaş ve Singerman, 1992) $d|n$ olsun. Bu takdirde $(a, d) = 1$ olmak üzere $\frac{a}{d}$ nin $\Gamma_0(n)$ altındaki $\binom{a}{d}$ yörüngesi

$$\left\{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \;:\; (n, y) = d, a \equiv \frac{xy}{d}\, mod(d, n/d)\right\} \qquad (6)$$

kümesidir. Dahası $d|n$ olmak üzere, $\binom{a}{d}$ yörüngelerinin sayısı $\varphi(d, n/d)$ dir. Burada φ, Euler fonksiyonudur.

Yukarıdaki lemma ve (6) kullanılırsa aşağıdaki tablolar elde edilir:

Tablo 1. N nin bölenleri

1	2	2 2	2 3	2^4	2 5
p	2 $.p$	2 2$.p$	2 3$.p$	$2^4.p$	2 5$.p$
p 2	2 $.p^2$	2 2$.p^2$	2 3$.p^2$	$2^4.p^2$	2 5$.p^2$

Tablo 2. Yörüngelerin sayısı

$p-1$	$p-1$	$2p-2$	$2p-2$	$p-1$	$p-1$

Teorem 2.4. $\widehat{\mathbb{Q}}(2^5p^2) = \binom{1}{1} \cup \binom{1}{2} \cup \binom{1}{2^2} \cup \binom{1}{2^4} \cup \binom{1}{2^5} \cup \binom{1}{p^2} \cup \binom{1}{2p^2} \cup \binom{1}{2^2p^2} \cup \binom{1}{2^3p^2} \cup \binom{1}{2^4p^2} \cup \binom{1}{2^5p^2}$ kümesi $Nor(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki bir maksimal yörüngesidir.

İspat. $Nor(N)$ nin elemanlarının $\binom{1}{1}$ yörüngesi üzerindeki hareketi incelenirse:

1.Tip $T_1 = \begin{pmatrix} a & b/4 \\ 8p^2c & d \end{pmatrix}, \det(T_1) = ad - 2bcp^2 = 1$, burada a ve d tam sayılarının tek olduğu açıktır.

$$\begin{pmatrix} a & b/4 \\ 8p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4a+b}{2^2(8p^2c+d)} \quad \ldots(*)$$

1) b ve d tek ise $(*) = \frac{4a+b}{2^2(8p^2c+d)} \in \binom{1}{2^2}$

2) d tek, b çift ve $2||b$ ise $(*) = \frac{2a+b_0}{2(8p^2c+d)} \in \binom{1}{2}$

3) d tek, b çift ve $2^2||b$ ise $(*) = \frac{a+b_1}{8p^2c+d} \in \binom{1}{1}$

2.Tip $T_2 = \begin{pmatrix} 2a & b/4 \\ 8p^2c & 2d \end{pmatrix}, \det(T_2) = 2ad - bcp^2 = 1$, burada b ve c tektir.

$$\begin{pmatrix} 2a & b/4 \\ 8p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{8a+b}{2^3(4p^2c+d)} \quad \ldots(**)$$

1) b ve d tek ise $(**) = \frac{8a+b}{2^3(4p^2c+d)} \in \binom{1}{2^3}$

2) d çift, b tek ve $2||d$ ise $(**) = \frac{8a+b}{2^4(2p^2c+d_0)} \in \binom{1}{2^4}$

3) d çift, b tek ve $2^2||d$ ise $(**) = \frac{8a+b}{2^5(p^2c+d_1)} \in \binom{1}{2^5}$

3. ve 4. tip elemanlar ve a, b, c, d nin aynı seçimleri ile diğer yörüngeler benzer şekilde hesaplanır. ■

Lemma 2.5. (Biggs ve White, 1979) (G, Δ) bir transitif permütasyon grubu olsun. (G, Δ) primitiftir ancak ve ancak $\alpha \in \Delta$ nın sabitleyeni olan G_α, G nin bir maksimal alt grubudur.

Yukarıdaki lemmadan herhangi bir α elemanı için $G_\alpha < H < G$ oluyorsa, bu takdirde Δ, trivial olmayan bir $G-$invaryant denklik bağıntısı içerir. Transitiflikten dolayı Δ nın her elemanı $g \in G$ için $g(\alpha)$ şeklindedir. Böylece Δ üzerindeki trivial olmayan $G-$invaryant denklik bağıntılarından biri aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad g' \in gH. \tag{7}$$

(7) bağıntısına göre blokların (denklik sınıfları) sayısı $|G: H|$ indeksi ile hesaplanabilir. Ayrıca α yı içeren blok $H(\alpha)$ kümesidir. Bu fikirden yola çıkarak, çalışmada $G = Nor(N)$, $\Delta = \widehat{\mathbb{Q}}(2^5p^2)$, $G_\alpha = Nor(N)_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ve H olarak da $H_0(N) = \left\langle \Gamma_C(N), \begin{pmatrix} 2a & b/4 \\ 8p^2c & 2d \end{pmatrix} \right\rangle$ grubu alınacaktır. Dolayısıyla $Nor(N)_\infty < H_0(N) < Nor(N)$ bağıntısı imprimitif hareket oluşturur.

Teorem 2.6. Yukarıdaki imprimitif hareketten doğan bloklar yalnızca [0] ve [∞] bloklarıdır. Dahası bu bloklar aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$[0] = \binom{1}{1} \cup \binom{1}{2} \cup \binom{1}{2^2} \cup \binom{1}{2^4} \cup \binom{1}{2^5} \tag{8}$$

$$[\infty] = \binom{1}{p^2} \cup \binom{1}{2p^2} \cup \binom{1}{2^2p^2} \cup \binom{1}{2^3p^2} \cup \binom{1}{2^4p^2} \cup \binom{1}{2^5p^2}. \tag{9}$$

İspat. $|Nor(N): H_0(N)| = 2$ olduğundan blok sayısının 2 olduğu görülür. Diğer yandan, $Nor(N)$ nin (2)-(5) denklemleriyle verilen elemanlarının 0 ve ∞ üzerindeki hareketlerinden (8) ve (9) bloklarının yapısı elde edilir.

Sims, (1967) bir Δ kümesi üzerinde hareket eden bir G permütasyon grubunun alt yörüngesel grafları fikrini ortaya atmıştır. Bu grafların köşe kümeleri Δ dır. Sims'in teorisi özetle şunu ifade etmektedir: (G, Δ) transitif permütasyon grubu olmak üzere $g \in G$ ve $(\alpha, \beta) \in \Delta \times \Delta$ için G nin $\Delta \times \Delta$ üzerindeki hareketi $g(\alpha, \beta) = (g(\alpha), g(\beta))$ ile tanımlanır. Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir. (α, β) elemanının yörüngesi $O(\alpha, \beta)$ ile ifade edilir. $O(\alpha, \beta)$ yörüngesi kullanılarak $G(\alpha, \beta)$ nın bir alt yörüngesel grafı oluşturulabilir. Bu grafın köşeleri Δ nın elemanları ve γ köşesinden δ köşesine bir kenar olması için gerek ve yeter şart $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ olmasıdır. γ dan δ ya yönlendirilmiş bir kenar $(\gamma \to \delta)$ ile ifade edilir. Her bir kenar, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Im(z) > 0\}$ üst yarı düzlemi üzerinde bir hiperbolik jeodezik olarak ifade edilebilir. Eğer $\alpha = \beta$ ise $G(\alpha, \alpha)$ alt yörüngesel grafına kendiyle eşleşmiştir denir. v_i, $i = 1, \dots, m$, $m \geq 3$ köşeler olmak üzere, $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_m \to v_1$ şeklinde köşelerin bir sıralı dizimine m uzunluklu bir devre denir. Eğer $m = 3$ ya da 4 ise devreye sırasıyla üçgen ya da dörtgen denir.

Bu çalışmada, G, $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2, \mathbb{R})$ deki normalliyeni ve Δ, genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi olacaktır. $Nor(N)$, $\widehat{\mathbb{Q}}(2^5p^2)$ üzerinde transitif hareket eder ve her $O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafı, $u/p^2 \in \widehat{\mathbb{Q}}(2^5p^2)$ için bir $(\infty, u/p^2)$ çifti içerir. $Nor(N)$, blokları transitif olarak permüte ettiğinden tüm alt graflardaki bloklar izomorftur. Dolayısıyla yalnızca [∞] bloğundaki köşelere bakmak yeterlidir. Burada $G(\infty, u/p^2)$ nin [∞] bloğundaki alt grafını $F(\infty, u/p^2)$ ile ifade edeceğiz.

Teorem 2.7. r/s , $x/y \in [\infty]$ olsun. O halde, $r/s \ \mapsto x/y \in F(\infty, u/p^2) \Leftrightarrow$

i. $32p^2 \,||\, s \Longrightarrow x \equiv \pm ur \ (mod\ p^2)\,,\ y \equiv \pm us \ (mod\ p^2)\,, ry - sx = \pm p^2$

ii. $8p^2 \,||\, s \Longrightarrow x \equiv \pm 4ur \ (mod\ p^2)\,,\ y \equiv \pm 4us \ (mod\ p^2)\,, ry - sx = \pm 4p^2$

iii. $4p^2 \,||\, s \Longrightarrow x \equiv \pm 8ur \ (mod\ p^2)\,,\ y \equiv \pm 8us \ (mod\ p^2)\,, ry - sx = \pm 4p^2$

iv. $p^2 \,||\, s \Longrightarrow x \equiv \pm 32ur \ (mod\ p^2)\,,\ y \equiv \pm 32us \ (mod\ p^2)\,, ry - sx = \pm p^2.$

İspat. $r/s \ \mapsto x/y \in F(\infty, u/p^2)$ olsun. Bu durumda, $Nor(N)$ normalliyeninde bir A elemanı vardır öyle ki A, $(\infty, u/p^2)$ ikilisini $(r/s, x/y)$ ikilisine gönderir. Yani, $A(\infty) = r/s$ ve $A(u/p^2) = x/y$ yazılır.

1. Durum. $32p^2 \parallel s$ olsun. Bu durumda $(\infty, u/p^2)$ ikilisini $(r/s, x/y)$ ikilisine gönderen dönüşüm $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 32p^2c & d \end{pmatrix}$, $ad - 32bcp^2 = 1$ formunda olmalıdır. $A_1(\infty) = \frac{a}{32p^2c} = \frac{r}{s}$ olup $a = r$ ve $s = 32p^2c$ elde edilir. Diğer yandan $A_1\left(\frac{u}{p^2}\right) = \frac{au+bp^2}{32p^2cu+dp^2} = \frac{x}{y}$ ifadesinden $x \equiv ur\ (mod\ p^2)$ ve $y \equiv us\ (mod\ p^2)$ bulunur. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 32p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & au + bp^2 \\ 32p^2c & 32p^2cu + dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix} \tag{10}$$

dır. (10) eşitliğinden $ry - sx = p^2$ elde edilir.

2. Durum. $8p^2 \parallel s$ olsun. Bu durumda $(\infty, u/p^2)$ ikilisini $(r/s, x/y)$ ikilisine gönderen dönüşüm $A_2 = \begin{pmatrix} a & b/4 \\ 8p^2c & d \end{pmatrix}$, $ad - 2bcp^2 = 1$ formunda olmalıdır. Burada a, d tam sayıları tektir. $A_2(\infty) = \frac{a}{8p^2c} = \frac{r}{s}$ olup $a = r$ ve $s = 8p^2c$ elde edilir. Diğer yandan $A_2\left(\frac{u}{p^2}\right) = \frac{4au+bp^2}{32p^2cu+4dp^2} = \frac{x}{y}$ ifadesinden $x \equiv 4ur\ (mod\ p^2)$ ve $y \equiv 4us\ (mod\ p^2)$ bulunur. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 4a & b \\ 8p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 4au + bp^2 \\ 8p^2c & 8p^2cu + dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4r & x \\ s & y/4 \end{pmatrix} \tag{11}$$

dır. (11) eşitliğinden $ry - sx = 4p^2$ elde edilir.

3. Durum. $4p^2 \parallel s$ olsun. Bu durumda $(\infty, u/p^2)$ ikilisini $(r/s, x/y)$ ikilisine gönderen dönüşüm $A_3 = \begin{pmatrix} 2a & b/4 \\ 8p^2c & 2d \end{pmatrix}$, $2ad - bcp^2 = 1$ formunda olmalıdır. Burada a tam sayısı tektir. $A_3(\infty) = \frac{a}{4p^2c} = \frac{r}{s}$ olup $a = r$ ve $s = 4p^2c$ elde edilir. Diğer yandan $A_3\left(\frac{u}{p^2}\right) = \frac{8au+bp^2}{32p^2cu+8dp^2} = \frac{x}{y}$ ifadesinden $x \equiv 8ur\ (mod\ p^2)$ ve $y \equiv 8us\ (mod\ p^2)$ bulunur. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 8a & b \\ 8p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a & 8au + bp^2 \\ 8p^2c & 8p^2cu + 2dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8r & x \\ 2s & y/4 \end{pmatrix} \tag{12}$$

dır. (12) eşitliğinden $ry - sx = 4p^2$ elde edilir.

4. Durum. $p^2 \parallel s$ olsun. Bu durumda $(\infty, u/p^2)$ ikilisini $(r/s, x/y)$ ikilisine gönderen dönüşüm $A_4 = \begin{pmatrix} 2a & b/4 \\ 8p^2c & 2d \end{pmatrix}$, $2ad - bcp^2 = 1$ formunda olmalıdır. Burada a tam sayısı çift ve $4|a$ olur. $A_4(\infty) = \frac{a}{4p^2c} = \frac{a_0}{p^2c} = \frac{r}{s}$ olup $a_0 = r$ ve $s = p^2c$ elde edilir. Diğer yandan $A_4\left(\frac{u}{p^2}\right) = \frac{8au+bp^2}{32p^2cu+8dp^2} = \frac{32a_0u+bp^2}{32p^2cu+8dp^2} = \frac{x}{y}$ ifadesinden $x \equiv 32ur\ (mod\ p^2)$ ve $y \equiv 32us\ (mod\ p^2)$ bulunur. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 8a & b \\ 8p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a & 8au + bp^2 \\ 8p^2c & 8p^2cu + 2dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32r & x \\ 8s & y/4 \end{pmatrix} \tag{13}$$

dır. (13) eşitliğinden $ry - sx = p^2$ elde edilir.

Tersine, $32p^2 \parallel s \Rightarrow x \equiv \pm ur\ (mod\ p^2)$, $y \equiv \pm us\ (mod\ p^2)$, $ry - sx = \pm p^2$ olsun. Bu durumda $x = ur + bp^2$ ve $y = us + dp^2$ olacak şekilde b, d tam sayıları mevcuttur. Bu eşitlikler $ry - sx = p^2$ ifadesinde yerine yazılırsa $rd - bs = 1$ elde edilir. Buradan $T = \begin{pmatrix} r & b \\ s & d \end{pmatrix}$ matrisinin $H_0(N)$ nin elemanı olduğu görülür. $ii), iii), iv)$ durumları için benzer işlemler yapılarak önermeler doğrulanabilir. Diğer yandan başlangıçta alınan kenarın yönü değiştirilip, yani, $r/s \leftarrow x/y \in F(\infty, u/p^2)$ alınıp aynı işlemlerle hesaplama yapılırsa $i), ii), iii), iv)$ önermelerinin negatif işarete sahip kısımları da doğrulanabilir.

Teorem 2.7. $F(\infty, u/p^2)$ alt yörüngesel grafı üçgen devre içermez.

İspat. Kabul edelim ki $F(\infty, u/p^2)$ bir üçgen içersin. $H_0(N)$, $F(\infty, u/p^2)$ nin köşeleri üzerinde transitif hareket ettiğinden bu üçgen

$$\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{p^2} \overset{<}{\longrightarrow} \frac{x}{yp^2} \longrightarrow \frac{1}{0} \qquad (14)$$

şeklinde alınabilir.

$\frac{x}{yp^2} \longrightarrow \frac{1}{0}$ kenarını göz önüne alalım. Teorem 2.6. dan $-yp^2 = -4p^2$ yazılır. Buradan $y = 4$ bulunur. Ayrıca $8ux \equiv -1 \ (mod\ p^2)$ elde edilir. Dolayısıyla (14) üçgeni

$$\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{p^2} \overset{<}{\longrightarrow} \frac{x}{4p^2} \longrightarrow \frac{1}{0} \qquad (15)$$

şeklini alır.

(15) üçgeninin $\frac{u}{p^2} \overset{<}{\longrightarrow} \frac{x}{4p^2}$ kenarını ele alalım. Teorem 2.6. dan $x \equiv -32u^2 \ (mod\ p^2)$ ve $4up^2 - xp^2 = -p^2$ elde edilir. Buradan $x = 4u + 1$ bulunur.

$x = 4u + 1$ değeri $x \equiv -32u^2 \ (mod\ p^2)$ ve $8ux \equiv -1 \ (mod\ p^2)$ kongrüanslarında yerine yazılırsa sırasıyla $32u^2 + 4u + 1 \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ ve $32u^2 + 8u + 1 \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ elde edilir. Bu kongrüansların ortak çözülmesiyle $u \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ bulunur ki bu, $(u, p^2) = 1$ olmasıyla çelişir. Üçgenin yönünün tersine alınmasıyla da benzer çelişki elde edilir. Dolayısıyla $F(\infty, u/p^2)$ üçgen içermez. ■

Teorem 2.8. $F(\infty, u/p^2)$ alt yörüngesel grafının bir dörtgen içermesi için gerekli ve yeterli koşul $32u^2 \pm 8u + 1 \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $F(\infty, u/p^2)$ bir dörtgen içersin. $H_0(N)$, $F(\infty, u/p^2)$ nin köşeleri üzerinde transitif hareket ettiğinden bu dörtgen

$$\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{p^2} \overset{<}{\longrightarrow} \frac{x}{yp^2} \overset{<}{\longrightarrow} \frac{k}{lp^2} \longrightarrow \frac{1}{0} \qquad (16)$$

şeklinde alınabilir.

$\frac{k}{lp^2} \longrightarrow \frac{1}{0}$ kenarını göz önüne alalım. Teorem 2.6. dan $-lp^2 = -4p^2$ yazılır. Buradan $l = 4$ bulunur. Dolayısıyla (16) dörtgeni

$$\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{p^2} \overset{<}{\longrightarrow} \frac{x}{yp^2} \overset{<}{\longrightarrow} \frac{k}{4p^2} \longrightarrow \frac{1}{0} \qquad (17)$$

şeklini alır.

(17) dörtgeninin $\frac{u}{p^2} \overset{<}{\longrightarrow} \frac{x}{yp^2}$ kenarını ele alalım. Teorem 2.6. dan $x \equiv -32u^2 \ (mod\ p^2)$ ve $uyp^2 - xp^2 = -p^2$ elde edilir. Buradan $x = uy + 1$ bulunur.

$\frac{x}{yp^2} \overset{<}{\longrightarrow} \frac{k}{4p^2}$ kenarı için Teorem 2.6. kullanılırsa $k \equiv -4ux \ (mod\ p^2)$ ve $4xp^2 - kyp^2 = -4p^2$ elde edilir. Buradan $4x - ky = -4$ bulunur. $x = uy + 1$ ifadesi, elde edilen denklemde yerine yazılırsa $y(4u - k) = -8$ elde edilir. $y = 8$ için $k = 4u + 1$ ve $x = 8u + 1$ olarak bulunur. $k \equiv -4ux \ (mod\ p^2)$ ifadesinde $k = 4u + 1$ ve $x = 8u + 1$ eşitlikleri yazılırsa $32u^2 + 8u + 1 \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ elde edilir.

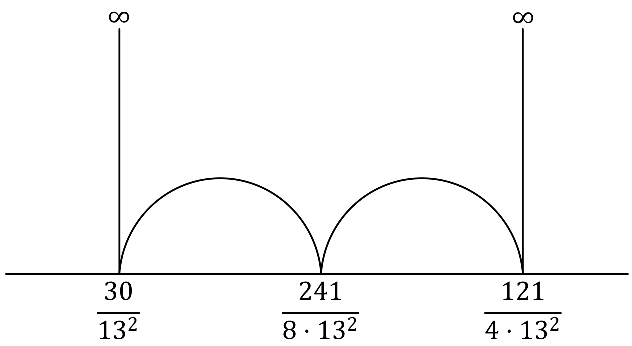
Benzer şekilde dörtgen $\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{p^2} \overset{>}{\longrightarrow} \frac{x}{yp^2} \overset{>}{\longrightarrow} \frac{k}{4p^2} \longrightarrow \frac{1}{0}$ şeklinde alındığında da $32u^2 - 8u + 1 \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ kongrüansı elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki $32u^2 \pm 8u + 1 \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ kongrüansı sağlansın. Göstereceğiz ki $F(\infty, u/p^2)$ alt yörüngesel grafı bir dörtgen içerir.

$$\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{p^2} \longrightarrow \frac{8u \pm 1}{8p^2} \longrightarrow \frac{4u \pm 1}{4p^2} \longrightarrow \frac{1}{0} \qquad (18)$$

dörtgenini ele alalım. $\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{p^2}$ kenarının $F(\infty, u/p^2)$ de olduğu Teorem 2.6. nın $i)$ şıkkından görülür. $\frac{4u+1}{4p^2} \longrightarrow \frac{1}{0}$ kenarı için $32u^2 \pm 8u + 1 \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ kongrüansı ile Teorem 2.6. nın $iii)$ şıkkı gerçeklenir. Dolayısıyla $\frac{4u+1}{4p^2} \longrightarrow \frac{1}{0}$ kenarı da $F(\infty, u/p^2)$ dedir. $\frac{u}{p^2} \longrightarrow \frac{8u \pm 1}{8p^2}$ kenarı için de $32u^2 \pm 8u + 1 \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ kongrüansı ile Teorem 2.6. nın $iv)$ şıkkı gerçeklenip, bu kenar da $F(\infty, u/p^2)$ dedir. Benzer şekilde, $\frac{8u \pm 1}{8p^2} \longrightarrow \frac{4u \pm 1}{4p^2}$ kenarı için de $32u^2 \pm 8u + 1 \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ kongrüansı ile Teorem 2.6. nın $ii)$ şıkkı gerçeklenip bu kenarın da $F(\infty, u/p^2)$ de olduğu görülür. Dolayısıyla (18) dörtgeni $F(\infty, u/p^2)$ dedir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Örnek 2.9. $p = 13$ asal sayısı için $Nor(2^5.13^2)$ nin hareketinden indirgenen $F\left(\infty, \frac{30}{13^2}\right)$ alt yörüngesel grafının içerdiği bir dörtgen devre $\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{30}{13^2} \longrightarrow \frac{241}{8 \cdot 13^2} \longrightarrow \frac{121}{4 \cdot 13^2} \longrightarrow \frac{1}{0}$ biçimindedir (Şekil 1).



Şekil 1. $F\left(\infty,\frac{30}{13^2}\right)$ alt yörüngesel grafiğin içerdiği bir dörtgen

Kaynaklar

Akbaş, M. and Singerman, D. (1992). The signature of the normalizer of $\Gamma_0(N)$, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, *165*, 77–86.

Beşenk, M., Güler, B. Ö. and Büyükkaya, A. (2019). Suborbital graphs for a non-transitive action of the normalizer, *Filomat*, *33* (2), 385–392, https://doi.org/10.2298/FIL1902385B

Biggs, N. L. and White, A. T. (1979). *Permutation Groups and Combinatorial Structures*, Cambridge University Press, Cambridge.

Conway, J. H. and Norton, S. P. (1977). Monstrous moonshine, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, *11*, 308–339.

Güler, B. Ö., Beşenk, M., Değer, A.H. and Kader, S. (2011). Elliptic elements and circuits in suborbital graphs, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, *40*(2), 203-210.

Güler, B. Ö., Beşenk, M. and Kader, S. (2019). On congruence equations arising from suborbital graphs, *Turkish Journal of Mathematics*, *43*(5), 2396–2404. https://doi.org/10.3906/mat-1905-93.

Güler, B. Ö., Kör, T. and Şanlı, Z. (2016). Solution to some congruence equations via suborbital graphs, *Springerplus*, *2016*(5), https://doi.org/10.1186/s40064-016-3016-5.

Güler, B. Ö. and Kader, S. (2010). Self-paired edges for the normalizer, *Algebras Groups and Geometries*, *27*(3), 369–376.

Jones, G. A., Singerman, D. and Wicks, K. (1991). The modular group and generalized Farey graphs, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, *160*, 316–338. https://doi.org/10.1017/CBO9780511661846.006

Kader, S., Güler, B. Ö. and Akşit, E. (2020). On quadrilaterals in the suborbital graphs of the normalizer, *Transactions on Combinatorics*, *9*(3), 147–159, https://doi.org/10.22108/TOC.2020.120019.1685

Kader, S., Güler, B. Ö. and Deger, A. H. (2010). Suborbital graphs for a special subgroup of the normalizer of $\Gamma_0(m)$, *Iran. Journal of Science and Technology Transactions A: Science*, *34* (4), 305–312.

Keskin, R. (2006). Suborbital graphs for the normalizer of $\Gamma_0(m)$, *European Journal of Combinatorics*, *27*, 193-206, https://doi.org/10.1016/j.ejc.2004.09.004.

Keskin, R. and Demirtürk, B. (2009). On suborbital graphs for the normalizer $\Gamma_0(N)$, The *Electronic Journal of Combinatorics*, *16*, 1-18.

Sims, C. C. (1967). Graphs and finite permutation groups, *Mathematische Zeitschrift*, *95*, 76–86, https://doi.org/10.37236/205.

Yazıcı Gözütok, N. and Güler, B. Ö. (2019). Elliptic elements of a subgroup of the normalizer and circuits in orbital graphs, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, *Special issue 3*, 11–21.