İMO Teknik Dergi, 2011 5689-5711, Yazı 365

Anlık Basınç Yükü Altındaki Kompozit Plakların Karışık SEM ile Analizi

Cenk AKSOYLAR*
Mehmet H. OMURTAG**

ÖZ

Anlık basınç yükünün tabakalı kompozit plakların dinamik davranışına etkisi, karışık sonlu elemanlar metodu ile incelenmiştir. Anlık basınç yükünün zaman içinde değişimi, literatürde sıklıkla kullanılan farklı analitik fonksiyonlar: i) Adım yükü, ii) N-Basınç dalgası, iii) Friedlander fonksiyonu kullanılarak ifade edilmiştir. Ayrıca geometrik olarak doğrusal olmayan etkilerin tabakalı kompozit plakların titreşim periyoduna etkisi de incelenmiştir. Karışık sonlu eleman formülasyonunda geometrik olarak doğrusal olmayan etkiler von Kármán teorisi kapsamında ele alınmıştır. Dinamik analizler, sönüm etkileri de dikkate alınarak Newmark metodu ile gerçekleştirilmiştir. Analizlerde sistem matrisi üzerinde kondensasyon yapılmamış, iç kuvvetlerin ve momentlerin de zamana göre türevleri hesaplara katılmıştır.

Anahtar kelimeler: Karışık sonlu eleman metodu, von Kármán plak teorisi, dinamik analiz, anlık basınç yükü

ABSTRACT

Mixed Finite Element Analysis of Composite Plates under Blast Loading

The dynamic behavior of composite laminated plates under blast loads has been investigated by the mixed finite element method. The change of blast load in time is idealized by using some common functions: i) Step load, ii) N-Pulse, iii) Friedlander function. Also, the effect of geometrical nonlinearity on the period of vibration of the composite laminated plate has been investigated. In the mixed finite element formulation, the nonlinear effects are considered in view of the von Kármán theory. Dynamic analyses are performed with the Newmark method by taking damping into account. In the analyses no condensation is applied to the system matrix and time derivatives of in-plane forces and moments are also calculated.

Keywords: Mixed finite element method, von Kármán plate theory, dynamic analysis, blast load

---

Not: Bu yazı
- Yayın Kurulu'na 17.03.2010 günü ulaşmıştır.
- 31 Aralık 2011 gününe kadar tartışmaya açıktır.

* İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul - cenk.aksoylar@gmail.com
** İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul - omurtagm@itu.edu.tr

1. GİRİŞ

Plak yapı elemanları, endüstri yapılarında, uçaklarda, gemilerde, savunma sanayinde v.b. oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yapıların yakınlarında oluşan patlamalar, türbülanslar ve şok dalgaları bu yapılar üzerinde anlık basınç kuvvetleri oluştururlar.

Plak yapılarının, anlık basınç yükü altındaki doğrusal olmayan davranışları uzun yıllardır araştırmacıların ilgisini çekmektedir. Bu konuda yapılan öncü çalışmalar arasında [1, 2] gösterilebilir. [2] çalışmasında çelik kare plakların anlık basınç yükü altındaki davranışlarını analitik ve deneysel olarak incelemiştir. Bir diğer analitik ve deneysel çalışma olan [3]'de takviyeli ve takviyesiz plaklar incelenmiştir. Ayrıca [4, 5] çalışmalarında takviyeli ve takviyesiz alüminyum uçak panelleri analitik ve deneysel olarak incelenmiştir. [6] çalışmasında ise düzlem içi rijitlik ve ataletlerin anlık basınç yükü etkisindeki tabakalı kompozit plakların dinamik davranışına etkisi incelenmiştir. Ayrıca basit mesnetli tabakalı kompozit plakların, anlık basınç yükü etkisindeki doğrusal olmayan dinamik davranışı farklı açıklık oranları ve tabaka yerleşimleri dikkate alınarak [7] çalışmasında incelenmiştir.

İdeal anlık basınç yüklerinin modellenmesi için literatürde sıklıkla adım yükü, N-Basınç dalgası, sinüs fonksiyonu veya Friedlander fonksiyonu kullanılmaktadır. [8, 9] çalışmalarında kompozit plakların dinamik davranışları farklı basınç yükü modelleri kullanılarak incelenmiş ve karşılaştırılmıştır.

Plakların dinamik davranışının incelenmesinde kullanılan karışık sonlu eleman metodunda, yer değiştirmelerin yanı sıra iç kuvvetlerin de bağımsız değişken olarak ele alınması, bu metoda analitik ve hesapsal açılardan bazı avantajlar kazandırmaktadır. Bu metodunun, doğrusal olmayan statik ve serbest titreşim problemlerindeki bazı ilk uygulamaları [10 ~ 12] çalışmalarında yapılmıştır. Karışık sonlu elemanlar metodunun, geometrik olarak doğrusal olmayan dinamik problemlerdeki, yazarların bilgisi dahilinde, tek uygulaması [13] çalışmasında tek tabakalı izotrop malzemeli plaklar için yapılmıştır. Bu metodun, tabakalı kompozit plakların statik, serbest titreşim ve stabilite problemlerindeki bazı uygulamaları arasında [14, 15] gösterilebilir.

Bu çalışmada, anlık basınç yükünün tabakalı kompozit plakların dinamik davranışına etkisi, karışık sonlu elemanlar metodu ile geometrik olarak doğrusal olmayan etkiler de dikkate alınarak incelenmiştir. Doğrusal olmayan davranış von Kármán teorisi kapsamında ele alınmış ve artımsal formülasyon kullanılarak doğrusallaştırılmıştır. Dinamik analizler Newmark metodu kullanılarak gerçekleştirilmiş ve iterasyonlarda Newton-Raphson metodu kullanılmıştır. Bu amaçla, önce ele alınan plak üzerinde, ağ sayısı ve zaman adım aralığı için parametrik çalışmalar yapılmıştır. Ardından doğrusal olmayan etkiler nedeniyle, plağın periyodunda oluşan değişiklikler incelenmiştir. Daha sonra, anlık basınç yükü için literatürde bulunan farklı analitik ifadeler kullanılarak analizler gerçekleştirilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Tabakalı kompozit plakların dinamik davranışları ilk defa bu çalışmada karışık sonlu eleman formülasyonu ile incelenmiştir.

2. TEORİK FORMÜLASYON

2.1. Alan Denklemleri

Kirchhoff plak teorisine ait yer değiştirme alanları ve von Kármán teorisinde kullanılan şekil değiştirme bağıntıları literatürde sıkça açıklanmıştır. Plak orta düzleminde, x, y, z yönlerinde oluşan yer değiştirmeler u, v, w şeklinde tanımlanırsa, von Kármán şekil değiştirmeli Kirchhoff plak teorisi için kinematik bağıntılar;

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 - z w_{,xx} \\
\varepsilon_{yy} &= v_{,y} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 - z w_{,yy} \\
\varepsilon_{xy} &= \tfrac{1}{2}\left(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} - 2z w_{,xy}\right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ve $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$ şeklinde elde edilir. Ayrıca elde edilen bu şekil değiştirmeler, düzlem içi şekil değiştirme ve eğrilik bileşenlerine ayrılabilir.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x^0 , \qquad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y^0 , \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 \tag{2.2}$$

Burada, düzlem içi şekil değiştirme ve eğrilik bileşenleri sırasıyla;

$$\varepsilon_x^0 = u_{,x} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2, \qquad \varepsilon_y^0 = v_{,y} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2, \qquad \gamma_{xy}^0 = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \tag{2.3}$$

$$\kappa_x^0 = -w_{,xx} , \qquad \kappa_y^0 = -w_{,yy} , \qquad \kappa_{xy}^0 = -2 w_{,xy} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca mühendislik kayma şekil değiştirmesi, $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ olarak tariflenir.

Keyfi doğrultuda yerleştirilmiş ortotrop bir malzemenin, plak eksenlerindeki bünye bağıntıları;

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada gerilme ve şekil değiştirme vektörleri, sırasıyla, $\boldsymbol{\sigma} = \left\{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}\right\}^T$ ve $\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}\right\}^T$ olarak ifade edilirse, rijitlik (elastisite) matrisi $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{T}^{-T}$ şeklinde elde edilir. Burada $\mathbf{T}$ dönüşüm matrisini, $\tilde{\mathbf{Q}}$ ise malzeme eksenlerindeki elastisite matrisini ifade eder.

Tabakalı plaklarda (2.5)'de verilen bünye bağıntısı, (2.2) ifadesinin de yardımıyla, her bir tabaka için;

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \mathbf{Q}_k\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} + z\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}}\right) \qquad k = 1, 2, ..., L \tag{2.6}$$

olarak ifade edilir. Burada L toplam tabaka sayısını, k indisi ise ele alınan tabakanın numarasını belirtmektedir.

Tabakalı plaklarda membran kuvvetleri ve eğilme momentleri sırasıyla;

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}z = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{M} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} z \mathrm{d}z = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}}\end{aligned} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, membran kuvvetleri, $\mathbf{N} = \left\{ N_x \quad N_y \quad N_{xy} \right\}^T$ ve eğilme momentleri $\mathbf{M} = \left\{ M_x \quad M_y \quad M_{xy} \right\}^T$ olarak tariflenmiştir. Ayrıca h plağın toplam kalınlığını ifade etmektedir. Rijitlik (elastisite) matrisinin terimleri;

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{L} \left(Q_{ij} \right)_k \left(z_k - z_{k-1} \right),\ B_{ij} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{L} \left(Q_{ij} \right)_k \left(z_k^2 - z_{k-1}^2 \right),\ D_{ij} = \tfrac{1}{3} \sum_{k=1}^{L} \left(Q_{ij} \right)_k \left(z_k^3 - z_{k-1}^3 \right) \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilir. Karışık sonlu eleman formülasyonunun Hellinger-Reissner fonksiyoneli ile elde edilmesi sırasında, düzlem içi şekil değiştirmelerin ve eğriliklerin, iç kuvvetler cinsinden ifade edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla (2.7) ifadesinin tersi alınırsa, sonuç $\boldsymbol{\varepsilon}^u = \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma$ yapısında;

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{,x} + \frac{1}{2}\left(w_{,x} \right)^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}\left(w_{,y} \right)^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \\ -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} A'_{11}N_{xx} + A'_{12}N_{yy} + A'_{13}N_{xy} + B'_{11}M_{xx} + B'_{12}M_{yy} + B'_{13}M_{xy} \\ A'_{21}N_{xx} + A'_{22}N_{yy} + A'_{23}N_{xy} + B'_{21}M_{xx} + B'_{22}M_{yy} + B'_{23}M_{xy} \\ A'_{31}N_{xx} + A'_{32}N_{yy} + A'_{33}N_{xy} + B'_{31}M_{xx} + B'_{32}M_{yy} + B'_{33}M_{xy} \\ H'_{11}N_{xx} + H'_{12}N_{yy} + H'_{13}N_{xy} + D'_{11}M_{xx} + D'_{12}M_{yy} + D'_{13}M_{xy} \\ H'_{21}N_{xx} + H'_{22}N_{yy} + H'_{23}N_{xy} + D'_{21}M_{xx} + D'_{22}M_{yy} + D'_{23}M_{xy} \\ H'_{31}N_{xx} + H'_{32}N_{yy} + H'_{33}N_{xy} + D'_{31}M_{xx} + D'_{32}M_{yy} + D'_{33}M_{xy} \end{array} \right\} \tag{2.9}$$

elde edilir. Burada komplians matrisinin alt matrisleri, $\mathbf{D}' = \left(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \right)^{-1}$, $\mathbf{B}' = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}' = \mathbf{H}'$, $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}'\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ şeklinde tanımlanır.

Von Kármán şekil değiştirmeli Kirchhoff plak teorisine ait denge denklemleri, virtüel iş metodu ile;

$$\begin{aligned} q_x + N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ q_y + N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\ q_z + M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} + \left(N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y} \right)_{,x} + \left(N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y} \right)_{,y} &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklinde elde edilir. Burada q_x, q_y, q_z sırasıyla x, y, z doğrultusunda plağa etkiyen dış kuvvetlerdir.

2.2. Sonlu Eleman Formülasyonu

Karışık sonlu eleman formülasyonu Hellinger-Reissner (HR) fonksiyonelinden elde edilmiştir. Bunun için, HR fonksiyonelinin ilk varyasyonunun sıfıra eşitlenmesi gerekir. HR fonksiyonelinin ilk varyasyonu;

$$\delta \Pi_{HR} = \int_\Omega \left[\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}} \right)^T \delta \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\sigma}} + \left(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\sigma}} \right)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} - \mathbf{b}^T \delta \mathbf{U} \right] \mathrm{d}A - \int_S \hat{\mathbf{t}}^T \delta \mathbf{U} \mathrm{d}S \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\sigma}} = \{ N_x \quad N_y \quad N_{xy} \quad M_x \quad M_y \quad M_{xy} \}^T$ iç kuvvet vektörünü, $\mathbf{b} = \{ q_x \quad q_y \quad q_z \}^T$ plak yüzeyine etkiyen dış yükleri, $\mathbf{U} = \{ u \quad v \quad w \}^T$ plak orta düzleminde oluşan yer değiştirmeleri ve $\hat{\mathbf{t}} = \{ t_x \quad t_y \quad t_z \}^T$ plak sınırlarındaki mekanik sınır koşullarını ifade etmektedir. Ayrıca $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}}$ plaktaki düzlem içi şekil değiştirmelerin ve eğriliklerin sırasıyla yer değiştirmeler ve iç kuvvetler cinsinden ifade edilmesidir ve (2.9) ’da tanımlanmıştır. HR fonksiyonelinin ilk varyasyonuna, (2.9)’daki ifadelerin (2.11)’e yerleştirilmesiyle ulaşılır. Sonlu eleman formülasyonunda C^0 süreklilik şartına sahip şekil fonksiyonlarının kullanılabilmesi için, “w” yer değiştirmelerinde bulunan ikinci derece türevlerin, bir derece düşürülmesi gerekir. Bu terimlere Green teoremi uygulandıktan sonra karışık sonlu eleman formülasyonunun doğrusal olmayan denklemleri;

$$\begin{aligned}
\delta \Pi'_{HR} = & \int_\Omega \left[u_{,x} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,x} \right)^2 \right] \delta N_x + \left[v_{,y} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,y} \right)^2 \right] \delta N_y + \left[u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \right] \delta N_{xy} \mathrm{d}A \\
& + \int_\Omega \left[-A'_{11} N_x - A'_{12} N_y - A'_{13} N_{xy} - B'_{11} M_x - B'_{12} M_y - B'_{13} M_{xy} \right] \delta N_x \mathrm{d}A \\
& + \int_\Omega \left[-A'_{21} N_x - A'_{22} N_y - A'_{23} N_{xy} - B'_{21} M_x - B'_{22} M_y - B'_{23} M_{xy} \right] \delta N_y \mathrm{d}A \\
& + \int_\Omega \left[-A'_{31} N_x - A'_{32} N_y - A'_{33} N_{xy} - B'_{31} M_x - B'_{32} M_y - B'_{33} M_{xy} \right] \delta N_{xy} \mathrm{d}A \\
& + \int_\Omega \left[-H'_{11} N_x - H'_{12} N_y - H'_{13} N_{xy} - D'_{11} M_x - D'_{12} M_y - D'_{13} M_{xy} \right] \delta M_x \mathrm{d}A \\
& + \int_\Omega \left[-H'_{21} N_x - H'_{22} N_y - H'_{23} N_{xy} - D'_{21} M_x - D'_{22} M_y - D'_{23} M_{xy} \right] \delta M_y \mathrm{d}A \\
& + \int_\Omega \left[-H'_{31} N_x - H'_{32} N_y - H'_{33} N_{xy} - D'_{31} M_x - D'_{32} M_y - D'_{33} M_{xy} \right] \delta M_{xy} \mathrm{d}A \\
& + \int_\Omega \left[w_{,x} \delta M_{x,x} + w_{,y} \delta M_{y,y} + w_{,y} \delta M_{xy,x} + w_{,x} \delta M_{xy,y} \right] \mathrm{d}A \\
& + \int_\Omega \left[N_x \delta u_{,x} + N_{xy} \delta u_{,y} - q_x \delta u \right] \mathrm{d}A + \int_\Omega \left[N_{xy} \delta v_{,x} + N_y \delta v_{,y} - q_y \delta v \right] \mathrm{d}A \\
& + \int_\Omega \left[N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y} + M_{x,x} + M_{xy,y} \right] \delta w_{,x} \mathrm{d}A \\
& + \int_\Omega \left[\left(N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y} + M_{y,y} + M_{xy,x} \right) \delta w_{,y} - q_z \delta w \right] \mathrm{d}A \\
& + \int_S \left[\hat{t}_i \delta u_i - w_{,x} n_x \delta M_x - w_{,y} n_y \delta M_y - (w_{,x} n_y + w_{,y} n_x) \delta M_{xy} \right] \mathrm{d}S \\
& - \int_S \left[\left(M_x n_x + M_{xy} n_y \right) \delta w_{,x} + \left(M_y n_y + M_{xy} n_x \right) \delta w_{,y} \right] \mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde elde edilir.

Elde edilen bu doğrusal olmayan denklemler, artımsal formülasyon kullanılarak doğrusallaştırılmıştır. Değişkenlerin sahip olduğu son değer, ${}^{p+\Delta p}\overline{N}_x$, ${}^{p+\Delta p}\overline{N}_y$, ${}^{p+\Delta p}\overline{N}_{xy}$, ${}^{p+\Delta p}\overline{M}_x$, ${}^{p+\Delta p}\overline{M}_y$, ${}^{p+\Delta p}\overline{M}_{xy}$, ${}^{p+\Delta p}\overline{u}$, ${}^{p+\Delta p}\overline{v}$, ${}^{p+\Delta p}\overline{w}$, başlangıç değeri ile bir artımın toplamı olarak;

$$ {}^{p+\Delta p}\overline{N}_x = {}^{p}N_x + \overset{+}{N}_x\,, \quad {}^{p+\Delta p}\overline{M}_x = {}^{p}M_x + \overset{+}{M}_x\,, \quad {}^{p+\Delta p}\overline{w} = {}^{p}w + \overset{+}{w} \tag{2.13} $$

ifade edilebilir. Burada, ${}^{p+\Delta p}\overline{\ldots}$ değişkenlerin sahip olduğu son değeri, ${}^{p}\ldots$ değişkenlerin başlangıç değerini ve $\overset{+}{\ldots}$ değişkendeki artımı ifade eder. (2.13)'deki artımsal ifadeler, (2.12) denkleminde yerine yerleştirilir ve üçüncü ve daha yüksek mertebeli terimler ihmal edilirse, karışık sonlu eleman formülasyonunun doğrusallaştırılmış denklemleri;

$$ \overset{++}{\mathbf{K}}_L \overset{+}{\mathbf{X}} + {}^{p}\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL} \overset{+}{\mathbf{X}} = {}^{p+\Delta p}\mathbf{Q} - {}^{p}\overset{+}{\mathbf{F}}\,, \quad \text{ve} \quad {}^{p+\Delta p}\overline{\mathbf{X}} = {}^{p}\mathbf{X} + \overset{+}{\mathbf{X}} \tag{2.14} $$

yapısında elde edilir. Burada $\overset{++}{\mathbf{K}}_L$ sistem matrisinin doğrusal terimlerini, ${}^{p}\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL}$ sistem matrisinin başlangıç değerlerine göre elde edilen doğrusal olmayan terimlerini, ${}^{p}\overset{+}{\mathbf{F}}$ başlangıç değerlerine göre elde edilen düzeltme vektörünü, ${}^{p+\Delta p}\mathbf{Q}$ ise son durumda sisteme etkiyen yükleri ifade eder. Karışık sonlu eleman formülasyonunda kullanılan bilinmeyen vektörü,

$$ \mathbf{X} = \left\{ N_x \quad N_y \quad N_{xy} \quad M_x \quad M_y \quad M_{xy} \quad u \quad v \quad w \right\}^T \tag{2.15} $$

şeklinde tanımlanır. Sistem matrisleri, düzeltme vektörü ve yük vektörü;

$$ \overset{++}{\mathbf{K}}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NM} & \mathbf{K}_{NU} \\ \mathbf{K}_{MN} & \mathbf{K}_{MM} & \mathbf{K}_{MU} \\ \mathbf{K}_{UN} & \mathbf{K}_{UM} & [0] \end{bmatrix}, \quad {}^{p}\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \mathbf{K}^{nl}_{NU} \\ [0] & [0] & [0] \\ \mathbf{K}^{nl}_{UN} & [0] & \mathbf{K}^{nl}_{UU} \end{bmatrix}, \quad {}^{p}\overset{+}{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathbf{F}_M \\ \mathbf{F}_U \end{Bmatrix} \tag{2.16} $$

yapısında oluşur. Alt matrislerin ve vektörlerin elamanları Ek'de verilmiştir.

Artımsal formülasyonda sonuçların yakınsaklığını arttırmak ve ard arda yapılan adımlar sonucunda hataların artmasını engellemek için, elde edilen sonuçlar bir iterasyon prosedürü kullanılarak düzeltilmiştir. İterasyon prosedürü olarak, hızlı yakınsaması ve basitliği nedeniyle Newton-Raphson metodu seçilmiştir. Çözüm yöntemine, Newton-Raphson metodunun eklenmesiyle, (2.14)'de verilen yapı,

$$ \begin{aligned} &\overset{++}{\mathbf{K}}_L \overset{+}{\mathbf{X}}{}^{(i)} + {}^{p+\Delta p}\overset{++}{\mathbf{K}}{}^{(i-1)}_{NL} \overset{+}{\mathbf{X}}{}^{(i)} = {}^{p+\Delta p}\mathbf{Q} + {}^{p+\Delta p}\overset{+}{\mathbf{F}}{}^{(i-1)} \\ &{}^{p+\Delta p}\overline{\mathbf{X}}{}^{(i)} = {}^{p+\Delta p}\mathbf{X}^{(i-1)} + \overset{+}{\mathbf{X}}{}^{(i)} \end{aligned} \tag{2.17} $$

haline gelir.

Burada (i) indisi iterasyon adımını belirtir. İterasyonun yürütülmesinde kullanılan başlangıç koşulları, ${}^{p+\Delta p}\mathbf{X}^{(0)} = {}^{p}\mathbf{X}$, ${}^{p+\Delta p}\overset{+}{\mathbf{F}}{}^{(0)} = {}^{p}\overset{+}{\mathbf{F}}$, ${}^{p+\Delta p}\overset{++}{\mathbf{K}}{}^{(0)}_{NL} = {}^{p}\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL}$ olarak tariflenir. Elde edilen düzeltme vektörü, ${}^{p+\Delta p}\overset{+}{\mathbf{F}}{}^{(i)}$ daha önceden belirlenen bir değerin altına düşene kadar iterasyona devam edilir.

Sonlu eleman formülasyonunda dört noktalı dörtgen elemanlar kullanılmıştır. Değişkenler izoparametrik formülasyonla, $N_x = \sum_{i=1}^{4} N_{xi}\phi_i, \ldots, w = \sum_{i=1}^{4} w_i\phi_i$ şeklinde tariflenmiştir. Burada $N_{xi}, \ldots, w_i$ nodal değişkenlerin büyüklüklerini , i nodal indeksi ve ϕ_i ise bilineer şekil fonksiyonlarını belirtmektedir.

2.3. Dinamik Analizler

Von Kármán şekil değiştirmeli Kirchhoff plak teorisine ait hareket denklemleri, dönme ataletleri ihmal edilerek,

$$
\begin{aligned}
q_x + N_{x,x} + N_{xy,y} - \rho h\ddot{u} &= 0 \\
q_y + N_{xy,x} + N_{y,y} - \rho h\ddot{v} &= 0 \\
q_z + M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} + \left(N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y}\right)_{,x} + \left(N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y}\right)_{,y} - \rho h\ddot{w} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

şeklinde ifade edilir. Burada ρ malzeme yoğunluğunu, $\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}$ ise plak orta noktasının ivmelerini göstermektedir. Artımsal hareket denklemi matris notasyonunda,

$$
\mathbf{M}\,\overset{+}{\ddot{\mathbf{X}}} + \mathbf{C}\,\overset{+}{\dot{\mathbf{X}}} + \left(\overset{++}{\mathbf{K}}_L + {}^{t}\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL}\right)\overset{+}{\mathbf{X}} = \Delta\mathbf{Q} \tag{2.19}
$$

olarak ifade edilir. Burada $\mathbf{C}$ Rayleigh sönüm matrisini ve $\Delta\mathbf{Q} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q} - {}^{t}\mathbf{Q}$ ise artımsal dış yükü gösterir. Kütle matrisi, $\mathbf{M}$ ‘in terimleri ise,

$$
\mathbf{M} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \mathbf{M}_{UU} \end{bmatrix}, \quad
\mathbf{M}_{UU} = \begin{bmatrix} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}\,\rho h\overset{+}{\ddot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\delta}\,\overset{+}{v}\,\rho h\overset{+}{\ddot{v}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\delta}\,\overset{+}{w}\,\rho h\overset{+}{\ddot{w}} \end{bmatrix} \tag{2.20}
$$

şeklinde tanımlanır. Artımsal hareket denklemindeki t ve $t+\Delta t$ indisleri, (2.17) denkleminde kullanılan p ve $p+\Delta p$ adım indislerinin yerine kullanılmıştır.

Sönüm matrisinin karışık SEM uygulamaları çok sınırlıdır. Genellikle deplasman tipi SEM kullanılan Rayleigh sönümü, karışık SE uyarlanarak bu çalışmada,

$$\mathbf{C} = a_1\mathbf{M} + a_2\mathbf{K}_L \tag{2.21}$$

şeklinde kullanılmıştır.

Burada a_1 ve a_2 sırasıyla kütle ve rijitlik matrisi çarpanlarıdır ve $a_1 = 2\zeta\omega_i\omega_j / \left(\omega_i + \omega_j\right)$, $a_2 = 2\zeta / \left(\omega_i + \omega_j\right)$ denklemleri ile hesaplanır. Burada ω_i ve ω_j, sistemin ζ sönüm oranına sahip iki açısal frekansıdır. Sönüm matrisinin hesaplanmasında sistem matrisinin doğrusal olmayan parçasının katkısı bilerek alınmamıştır. Von Kármán plak teorisine göre yapılan analizlerde, çökmeler arttıkça sistem rijitleşmektedir. Bu rijitleşme, sönüm matrisinin hesaplanmasında sistem matrisin doğrusal olmayan terimleri göz önüne alınırsa, istenilmeyen oranda yüksek sönümlere neden olmaktadır.

Hareket denkleminin çözümünde Newmark metodu kullanılmıştır. Bu metot, yer değiştirme ve hızın,

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{X}} &= {}^{t}\dot{\mathbf{X}} + \left[(1-\gamma)\Delta t\right]{}^{t}\ddot{\mathbf{X}} + \left(\gamma\,\Delta t\right){}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{X}} \\
{}^{t+\Delta t}\mathbf{X} &= {}^{t}\mathbf{X} + (\Delta t)\,{}^{t}\dot{\mathbf{X}} + \left[(0.5-\beta)(\Delta t)^2\right]{}^{t}\ddot{\mathbf{X}} + \left[\beta(\Delta t)^2\right]{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{X}}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

şeklinde idealize edilmesine dayanır. Burada β ve γ Newmark parametreleridir. Bu çalışmada yapılan analizlerde, $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ olarak alınmıştır. (2.19)'da verilen artımsal hareket denkleminde kullanılmak üzere (2.22) ifadesi,

$$\begin{aligned}
\overset{+}{\ddot{\mathbf{X}}} &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\overset{+}{\mathbf{X}} - \frac{1}{\beta(\Delta t)}{}^{t}\dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{2\beta}{}^{t}\ddot{\mathbf{X}} \\
\overset{+}{\dot{\mathbf{X}}} &= \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)}\overset{+}{\mathbf{X}} - \frac{\gamma}{\beta}{}^{t}\dot{\mathbf{X}} + \Delta t\left[1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right]{}^{t}\ddot{\mathbf{X}}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

şeklinde düzenlenir ve (2.19) ifadesine yerleştirilirse, artımsal hareket denklemi,

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{K}}\overset{+}{\mathbf{X}} = \Delta\hat{\mathbf{Q}} \\
&\hat{\mathbf{K}} = \overset{++}{\mathbf{K}}_L + {}^{t}\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL} + \left[\gamma/\beta(\Delta t)\right]\mathbf{C} + \left[1/\beta(\Delta t)^2\right]\mathbf{M} \\
&\Delta\hat{\mathbf{Q}} = \Delta\mathbf{Q} + \left[1/\beta(\Delta t)\mathbf{M} + \gamma/\beta\mathbf{C}\right]{}^{t}\dot{\mathbf{X}} + \left[1/2\beta\mathbf{M} + (\gamma/2\beta - 1)(\Delta t)\mathbf{C}\right]{}^{t}\ddot{\mathbf{X}}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

olarak elde edilir. Artımsal hareket denklemi ile elde edilen sonuçlar, (2.17) ifadesinde verilen iterasyon metoduyla iyileştirilmiştir.

2.4. Anlık Basınç Yükü

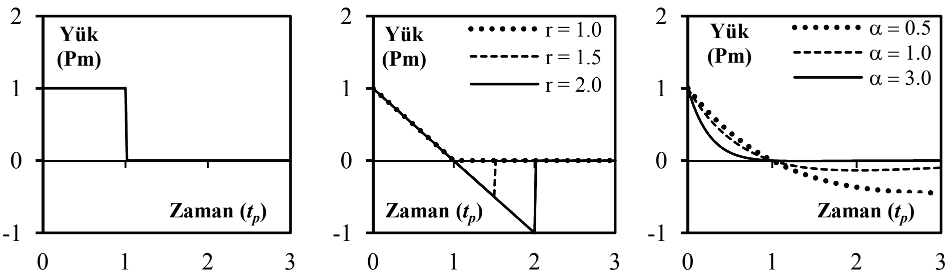
Yapıların yakınlarında oluşan patlamalar, türbülanslar, sonik patlamalar ve şok dalgaları bu yapılar üzerinde anlık basınç kuvvetleri oluştururlar. Eğer bu patlamalar yeteri kadar uzakta ise, yükün etkileri plak üzerinde düzgün yayılı olarak tanımlanır ve yük ideal anlık basınç yükü olarak adlandırılır. İdeal anlık basınç yükünün zaman içinde değişimini tarif etmek için literatürde sıklıkla kullanılan fonksiyonlar arasında; *i)* adım yükü, *ii)* N-Basınç dalgası ve *iii)* Friedlander fonksiyonu sayılabilir. Bu fonksiyonlar;

Adım Yükü:
$$P(t) = \begin{cases} P_m & 0 \le t \le t_p \\ 0 & t_p < t \end{cases} \tag{2.25}$$

N-Basınç Dalgası:
$$P(t) = \begin{cases} P_m\left(1 - t/t_p\right) & 0 \le t \le rt_p \\ 0 & rt_p < t \end{cases} \tag{2.26}$$

Friedlander Fonksiyonu:
$$P(t) = P_m\left(1 - t/t_p\right)e^{-\alpha t/t_p} \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanır. Burada P_m maksimum basınç değerini, t_p basıncın pozitif kısımdaki etki süresini ifade eder. N-Basınç dalgası ifadesindeki r uzunluk faktörüdür ve $r = 1$ üçgen yüklemeyi, $r = 2$ simetrik yüklemeyi, $1 < r < 2$ ise antisimetrik yüklemeyi tanımlar. Friedlander fonksiyonundaki α ise basınç dalgasının formunu belirleyen parametredir. Adım yükü, N-Basınç dalgası ve Friedlander fonksiyonu ile tariflenen anlık basınç yüklerinin zaman içinde değişimi Şekil 2.1'de verilmiştir.



a) Adım Yükü *b) N-Basınç Dalgası* *c) Friedlander Fonksiyonu*

Şekil 2.1. Anlık basınç yüklerinin zaman içinde değişimi

3. SAYISAL ANALİZLER

İTÜ Kompozit Yapı Laboratuarında, anlık basınç yükü etkisindeki kompozit plakların dinamik davranışları deneysel olarak incelenmektedir. Bu deneylerde kullanılan bir plağın geometrik ve malzeme özellikleri bu çalışmanın tüm sayısal analizlerinde kullanılmıştır. İncelenen ankastre mesnetli plak (tüm kenarlarda; $u = v = w = 0$) 300×300mm boyutlarında, Karbon (K), Aramid (A) ve Cam (C) malzemelerinden oluşan 9 tabaka ile üretilmiştir. Tabakaların yerleşimi K/K/K/A/A/A/C/C/C şeklindedir. Malzemelerin özellikleri Çizelge 3.1'de verilmiştir. Tüm dinamik analizlerde Rayleigh sönümü $5 \times \mathbf{M} + 0.00001 \times \mathbf{K}$ olarak alınmıştır.

Çizelge 3.1. Malzeme özellikleri

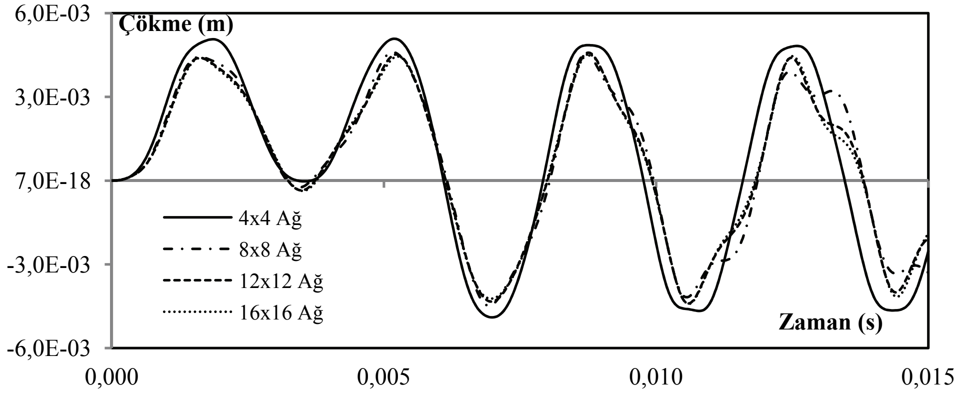
	Cam/Epoksi	**Aramid/Epoksi**	**Karbon/Epoksi**
Elastisite modülü, $E_1\,(\mathrm{GPa})$	18.5	19.6	46.7
Elastisite modülü, $E_2\,(\mathrm{GPa})$	18.5	19.6	46.7
Kayma modülü, $G_{12}\,(\mathrm{GPa})$	2.7	1.2	2.8
Poisson oranı, υ	0.14	0.09	0.20
Yoğunluk, $(\mathrm{kg/m^3})$	1793	1320	1399
Tabaka kalınlığı, (mm)	0.24	0.21	0.33

Sayısal analizler üç aşamalı olarak gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada, dinamik analizlerde kullanılacak ağ sıklığı ve zaman adımı büyüklüğüne ait parametrik çalışmalar yapılmıştır. Parametrik çalışmalarda anlık basınç yükü plak üzerinde düzgün yayılı olarak ve zaman içindeki değişimi adım yükü şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak en uygun ağ sıklığı ve zaman adımı seçilmiştir. İkinci aşamada ise, doğrusal olmayan etkiler nedeniyle, plakta oluşan çökmelerin artmasıyla değişen periyod incelenmiştir. Son aşamada ise seçilen ağ sıklığı ve zaman adımı değerleri kullanılarak, plak üzerindeki farklı anlık basınç yüklerinin etkileri incelenmiştir.

3.1. Parametrik Analizler

Ağ Sıklığı: Bölüm 3'de tanımlanan ankastre mesnetli kompozit plak 4×4, 8×8, 12×12 ve 16×16 ağ sıklıkları kullanılarak çözülmüştür. Zaman adımı $\Delta t = 0.0001\mathrm{s}$ olarak alınmış ve anlık basınç yükü plak üzerinde düzgün yayılı olarak dağıtılmıştır. Yükün zaman içindeki dağılımı, (2.25) ifadesinde verilen adım fonksiyonu şeklinde, maksimum basınç değeri, $P_m = 12\,000\mathrm{Pa}$ ve etkime süresi $t_p = 0.005\mathrm{s}$ olarak tanımlanmıştır. Analizler sonucunda elde edilen plak orta noktası çökmesi Şekil 3.1'de verilmiştir. Ayrıca plak orta noktasında oluşan maksimum çökme değerleri Çizelge 3.2'de verilmiş ve karşılaştırılmıştır.

Ağ sıklığına ait yapılan parametrik çalışma neticesinde 4×4'lük ağdan sonraki değerlerin birbirine yeteri kadar yakın olduğu görülmüştür. Bu nedenle diğer analizlerde 8×8'lik ağ kullanılmıştır.



Şekil 3.1. Plak orta noktası çökmesi

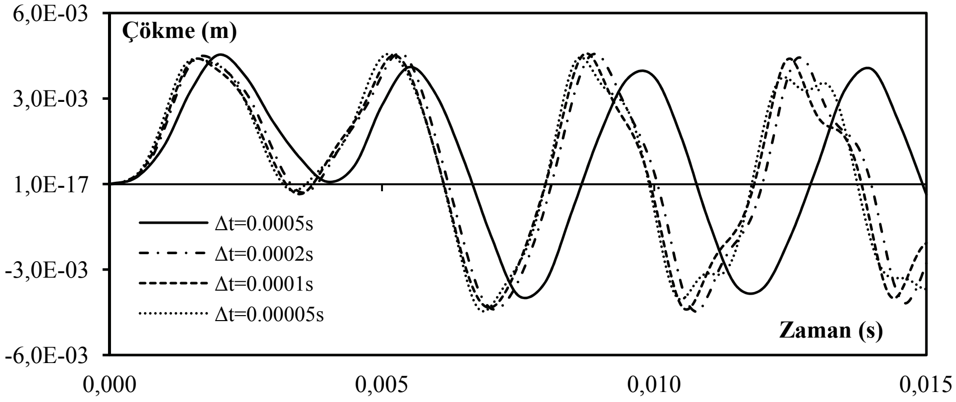
Çizelge 3.2. Plak orta noktası maksimum çökme değerleri

	Çökme (m)	Fark (%)*
4×4 Ağ	0.00508	12.67
8×8 Ağ	0.00459	1.68
12×12 Ağ	0.00456	1.09
16×16 Ağ	0.00451	-

*: Farklar 16×16'lık ağ kullanılarak elde edilen sonuçlara göre hesaplanmıştır.

Zaman Adımı: Dinamik analizlerde kullanılacak en uygun zaman adım aralığını belirlemek için parametrik bir çalışma yapılmıştır. Bölüm 3'de tanımlanan ankastre mesnetli kompozit plağın ilk üç doğal titreşim periyodu sırasıyla, $T_1 = 0.00572\text{s}$, $T_2 = T_3 = 0.00279\text{s}$ 'dir. Newmark metodu ile gerçekleştirilen doğrusal dinamik analizlerde, zaman adım aralığı genellikle, $\Delta t = T_1/10$ olarak seçilmektedir. Bu nedenle örnek plak, $\Delta t = 0.0005\text{s}$, $\Delta t = 0.0002\text{s}$, $\Delta t = 0.0001\text{s}$ ve $\Delta t = 0.00005\text{s}$ zaman adım aralıkları kullanılarak çözülmüştür. Ağ sıklığı 8×8 olarak alınmış ve anlık basınç yükü plak üzerinde düzgün yayılı olarak dağıtılmıştır. Yükün zaman içindeki dağılımı, (2.25) ifadesinde verilen adım fonksiyonu şeklinde, maksimum basınç değeri, $P_m = 12\,000\text{Pa}$ ve etkime süresi $t_p = 0.005\text{s}$ olarak tanımlanmıştır. Analizler sonucunda elde edilen plak orta noktası çökmesi Şekil 3.2'de verilmiştir. Ayrıca plak orta noktasında oluşan maksimum çökme değerleri Çizelge 3.3'de verilmiş ve karşılaştırılmıştır.

Farklı zaman adım aralıkları kullanılarak yapılan analizlerde, sistemde oluşan maksimum çökme değerlerinde büyük farklılıklar oluşmasa da, $\Delta t = 0.0005\text{s}$ zaman adımıyla yapılan analizlerde plağın titreşim frekansında değişiklikler olmaktadır. Von Kármán plak teorisinde, çökmelerin artması plağın rijitliğini arttırmakta ve titreşim periyodunun azalmasına neden olmaktadır. Von Kármán plak teorisinin bu özelliği göz önünde bulundurularak, devam eden analizlerde zaman adım aralığının $\Delta t = 0.0001\text{s}$ olarak kullanılması uygun görülmüştür.



Şekil 3.2. Plak orta noktası çökmesi

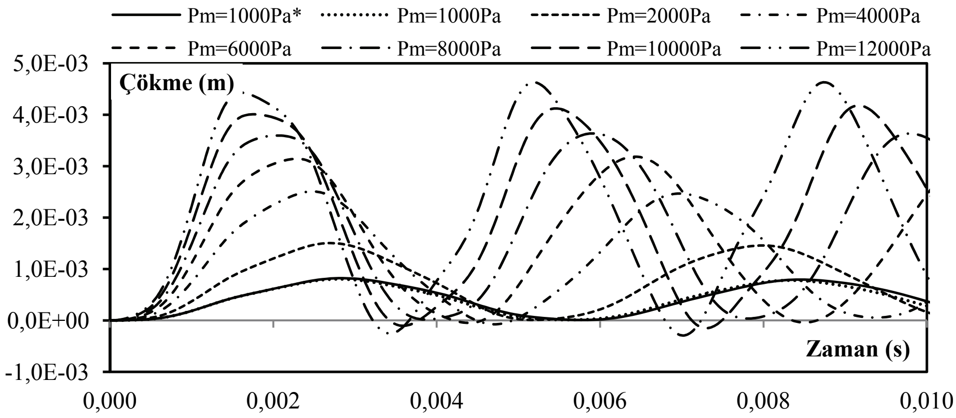
Çizelge 3.3. Plak orta noktası maksimum çökme değerleri

	Çökme (m)	Fark (%)*
$\Delta t = 0.0005\text{s}$	0.00453	-0.660
$\Delta t = 0.0002\text{s}$	0.00454	-0.414
$\Delta t = 0.0001\text{s}$	0.00456	-0.011
$\Delta t = 0.00005\text{s}$	0.00456	-

*: Farklar $\Delta t = 0.00005\text{s}$ zaman adımı kullanılarak elde edilen sonuçlara göre hesaplanmıştır.

3.2. Doğrusal Olmayan Davranışın Periyoda Etkisi

Von Kármán plak teorisinde, geometrik olarak doğrusal olmayan etkiler, çökmenin artmasıyla plağın rijitliğinin artmasına ve periyodun azalmasına neden olur. Bu etkinin belirlenmesi için ankastre mesnetli kompozit örnek plak sekiz ayrı yük seviyesi altında çözülmüştür. Dinamik analizlerde ağ sıklığı 8×8 ve zaman adım aralığı, $\Delta t = 0.0001\text{s}$ alınmıştır. Yükün zaman içindeki dağılımı, (2.25) ifadesinde verilen adım fonksiyonu şeklinde ve etkime süresi $t_p = 0.010\text{s}$ olarak tanımlanmıştır. Yükün maksimum basınç değeri, $P_m = 1000\text{Pa}$ ’dan $P_m = 12\,000\text{Pa}$ ’a kadar arttırılmıştır. Analizler sonucunda elde edilen plak orta noktası çökmeleri Şekil 3.3’de verilmiştir.



Şekil 3.3. Plak orta noktası çökmesi

(*: Doğrusal analiz sonucu)

Şekil 3.3'de verilen plak orta noktası çökmelerinden, yük arttıkça plağın periyodunun azaldığı görülmektedir. Plağın doğrusal olmayan periyodunu yaklaşık olarak belirlemek için, çökme tepkisinde ilk iki yerel maksimum noktası arasında geçen zaman hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Çizelge 3.4'de verilmiştir.

Çizelge 3.4. Plak periyodunun çökmeye bağlı değişimi

Yük (Pa)	$w_{\max}/h$	$T_{\Delta t}$ [1]	Oran[2]
1 000[3]	0.348	0.0057	**0.997**
1 000	0.341	0.0055	**0.962**
2 000	0.637	0.0053	**0.927**
4 000	1.063	0.0045	**0.787**
6 000	1.348	0.0041	**0.717**
8 000	1.540	0.0038	**0.664**
10 000	1.768	0.0037	**0.647**
12 000	1.961	0.0036	**0.629**

[1]: Yaklaşık periyod ilk iki yerel maksimum arasındaki zaman farkı olarak hesaplanmıştır.

[2]: Yaklaşık periyodun sistemin birinci doğal titreşim periyoduna, $T_1 = 0.00572\text{s}$ oranıdır.

[3]: Sonuçlar doğrusal dinamik analizden elde edilmiştir.

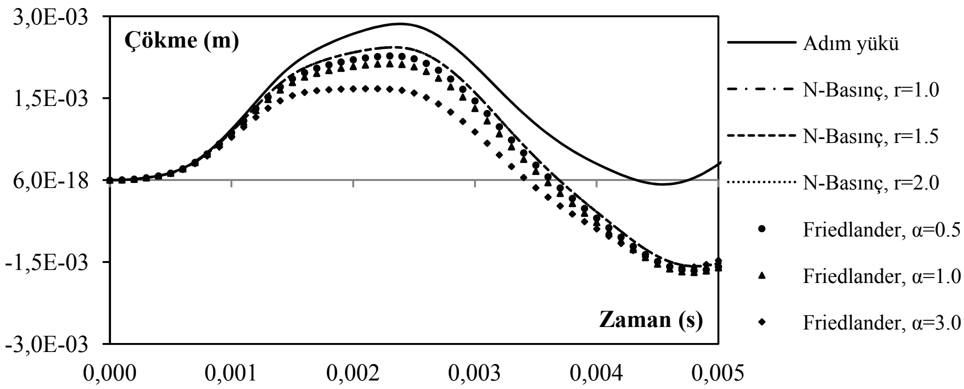
Doğrusal dinamik analiz sonuçları kullanılarak hesaplanan yaklaşık periyodun, sistemin birinci doğal titreşim periyoduna çok yakın olması, kullanılan metodun gerçekçi sonuçlar verdiğini göstermektedir. Doğrusal olmayan etkiler dikkate alındığında, plak orta noktası çökmesi kalınlığın %30'unu geçtiğinde, periyotta azalma başlamaktadır. Çökmeler plak kalınlığının iki katına ulaştığında ise sitemin periyodu, birinci doğal titreşim periyodunun %62'sine kadar azalmaktadır.

3.3. Farklı Anlık Basınç Yükü Altında Plak Davranışı

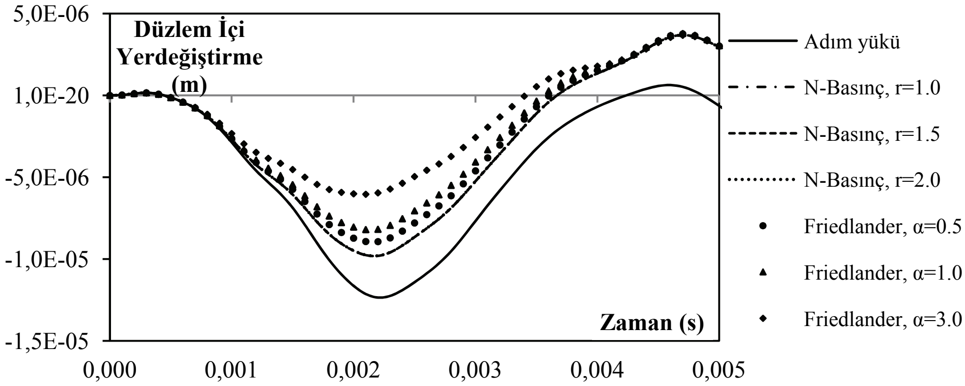
Farklı anlık basınç yüklerinin davranışa olan etkilerini incelemek amacıyla, ankastre mesnetli kompozit örnek plak Bölüm 2.4'de tanımlanan üç ayrı ideal anlık basınç yükü altında çözülmüştür. Analizler bir adet adım yükü, üç adet N-Basınç dalgası $\left(r=1.0, 1.5, 2.0\right)$ ve üç adet Friedlander fonksiyonu $\left(\alpha=0.5, 1.0, 3.0\right)$ kullanarak yapılmıştır. Yükün maksimum değeri için iki farklı değer kullanılmıştır $\left(P_m=5\,000\text{Pa}, 10\,000\text{Pa}\right)$. Ayrıca basıncın pozitif bölgedeki etki süresi, $t_p=0.005\text{s}$ olarak tanımlanmıştır. Analitik model 8×8'lik ağ ile oluşturulmuş ve zaman adımı aralığı, $\Delta t=0.0001\text{s}$ olarak kullanılmıştır.

$P_m=5\,000\text{Pa}$ 'lık yükün kullanıldığı analizler sonucunda elde edilen plak orta noktası çökmesi, plak simetri ekseni dörtte biri düzlem içi yer değiştirmesi ve plak alt yüzeyi orta noktası şekil değiştirmesi sırasıyla Şekil 3.4 ~ 3.6'da verilmiştir. Aynı tepkilerin $P_m=10\,000\text{Pa}$ için olan değerleri ise Şekil 3.7 ~ 3.9'da verilmiştir. Farklı anlık basınç yükleri için plakta elde edilen tepkilerin maksimumları, $P_m=5\,000\text{Pa}$ ve $P_m=10\,000\text{Pa}$ yük durumları için Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6'da karşılaştırılmıştır.

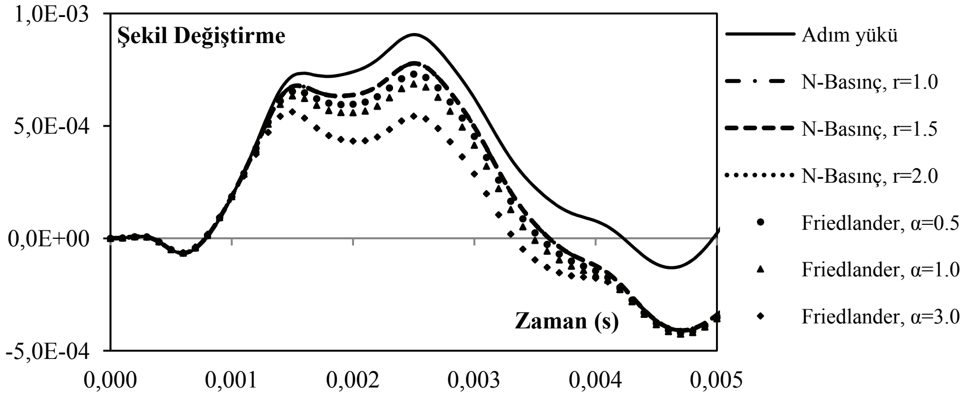
Tüm analizlerde en büyük tepkiler (plak orta noktası çökmesi, plak simetri ekseninin dörtte birinde oluşan düzlem içi yer değiştirme ve plak alt yüzeyi orta noktasında oluşan şekil değiştirme) adım yükü altında gerçekleşmiştir. Benzer şekilde en küçük tepkiler ise $\alpha=3.0$ katsayılı Friedlander yükü altında oluşmuştur. $P_m=5\,000\text{Pa}$ 'lık maksimum basınç yükü altında, farklı anlık basınç yükleri altında plak orta noktasında oluşan çökmeler, adım yükü altında oluşan çökmenin %59'una kadar azalırken bu azalma $P_m=10\,000\text{Pa}$ 'lık maksimum basınç yükü dikkate alındığında %72 olmaktadır. İncelenen plakta, farklı anlık basınç yükleri altında oluşan tepkiler arasındaki fark, yükün şiddeti arttıkça oransal olarak azalmaktadır. İncelenen tüm ideal anlık basınç yükleri altında maksimum çökmeler, yükün basınç bölgesinde oluşurken, $r=2.0$ katsayılı N-Basınç yükü altında maksimum çökme yükün emme bölgesinde oluşmuştur.



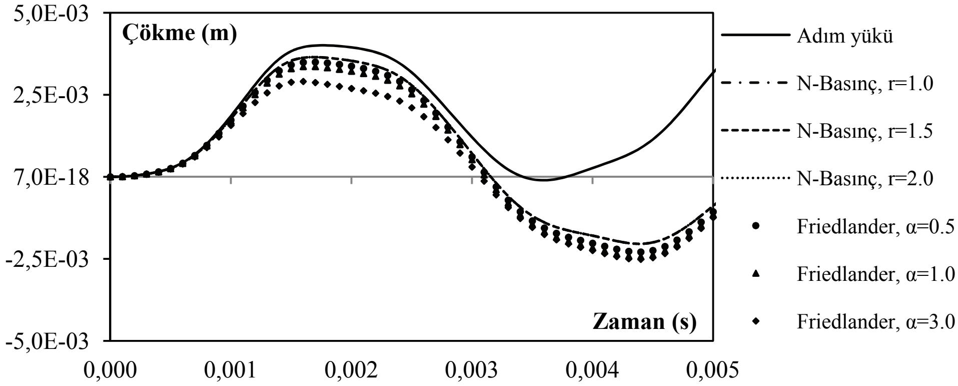
Şekil 3.4. Plak orta noktası çökmesi, $w\ (P_m = 5000Pa)$



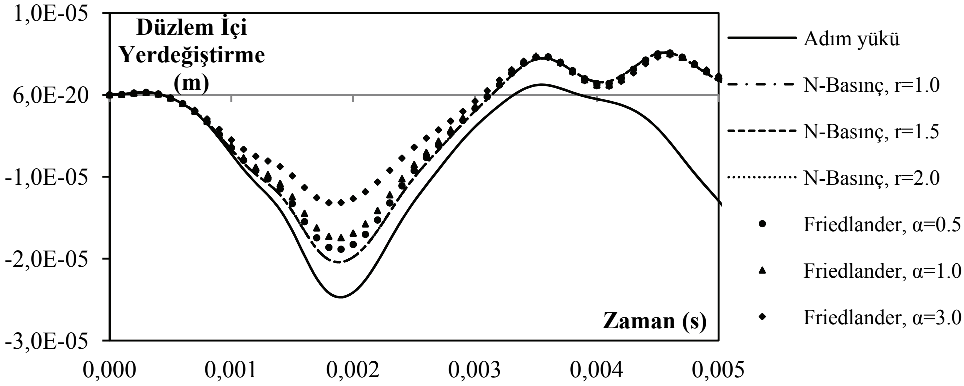
Şekil 3.5. Plak simetri ekseninin dörtte biri düzlem içi yer değiştirmesi, $u\ (P_m = 5000Pa)$



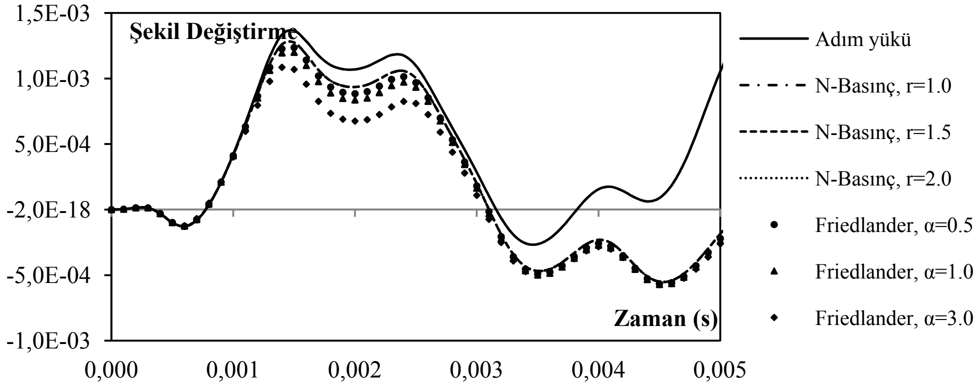
Şekil 3.6. Plak alt yüzeyi orta noktası şekil değiştirmesi, $\varepsilon_{xx}\ (P_m = 5000Pa)$



Şekil 3.7. Plak orta noktası çökmesi, $w \ (P_m = 10\,000 Pa)$



Şekil 3.8. Plak simetri ekseninin dörtte biri düzlem içi yer değiştirmesi, $u \ (P_m = 10\,000 Pa)$



Şekil 3.9. Plak alt yüzeyi orta noktası şekil değiştirmesi, $\varepsilon_{xx} \ (P_m = 10\,000 Pa)$

Çizelge 3.5. Plakta oluşan maksimum tepkiler ve karşılaştırması ($P_m = 5\,000 Pa$)

Basınç Yükü	Çökme (10^{-3}m)		Düzlem İçi Yer Değiştirme (10^{-6}m)		Şekil Değiştirme (10^{-3})	
	Maks.	Oran	Maks.	Oran	Maks.	Oran
Adım Yükü	2.86		-12.4		0.91	
N-Basınç, $r = 1.0$	2.43	**0.85**	-9.8	**0.79**	0.78	**0.86**
N-Basınç, $r = 1.5$	2.43	**0.85**	-9.8	**0.79**	0.78	**0.86**
N-Basınç, $r = 2.0$	-2.71	**-0.95**	-10.9	**0.88**	0.79	**0.88**
Friedlander, $\alpha = 0.5$	2.28	**0.80**	-8.9	**0.72**	0.73	**0.81**
Friedlander, $\alpha = 1.0$	2.13	**0.75**	-8.2	**0.66**	0.69	**0.76**
Friedlander, $\alpha = 3.0$	1.67	**0.59**	-6.0	**0.49**	0.56	**0.62**

Çizelge 3.6. Plakta oluşan maksimum tepkiler ve karşılaştırması ($P_m = 10\,000 Pa$)

Basınç Yükü	Çökme (10^{-3}m)		Düzlem İçi Yer Değiştirme (10^{-6}m)		Şekil Değiştirme (10^{-3})	
	Maks.	Oran	Maks.	Oran	Maks.	Oran
Adım Yükü	4.03		-24.7		1.53	
N-Basınç, $r = 1.0$	3.65	**0.91**	-20.4	**0.83**	1.28	**0.83**
N-Basınç, $r = 1.5$	3.65	**0.91**	-20.4	**0.83**	1.28	**0.83**
N-Basınç, $r = 2.0$	-3.72	**-0.92**	-20.4	**0.83**	1.28	**0.83**
Friedlander, $\alpha = 0.5$	3.50	**0.87**	-18.8	**0.76**	1.24	**0.81**
Friedlander, $\alpha = 1.0$	3.36	**0.83**	-17.4	**0.71**	1.20	**0.78**
Friedlander, $\alpha = 3.0$	2.91	**0.72**	-13.2	**0.53**	1.09	**0.71**

4. SONUÇLAR

Anlık basınç yükü etkisindeki tabakalı kompozit plakların dinamik davranışları, karışık sonlu elemanlar metoduyla geometrik olarak doğrusal olmayan etkiler de dikkate alınarak dinamik olarak incelenmiştir. Dinamik analizlerde sistem matrisi üzerinde kondensasyon yapılmamış, iç kuvvetlerin ve momentlerin de zamana göre türevleri hesaplara katılmıştır. Tabakalı kompozit plakların dinamik davranışı, yazarların bilgisi dahilinde ilk defa bu çalışmada karışık sonlu elemanlar metodu ile incelenmiştir.

Analizlerde öncelikle doğrusal olmayan davranışın plağın titreşim periyoduna etkisi incelenmiştir. Doğrusal olmayan etkiler dikkate alındığında, plak orta noktası çökmesi kalınlığın %30'unu geçtiğinde, periyotta azalma başlamakta ve çökmeler plak kalınlığının iki katına ulaştığında ise sitemin periyodu, birinci doğal titreşim periyodunun %62'sine kadar azalmaktadır. Ardından faklı anlık basınç yüklerinin incelenen plak üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu analizler sonucunda maksimum tepkilerin adım yükü altında, minimum tepkilerin ise $\alpha = 3.0$ katsayılı Friedlander yükü altında oluştuğu gözlenmiştir. Ayrıca $r = 2.0$ katsayılı N-Basınç yükü altında maksimum çökme yükün emme bölgesinde oluşmuştur. İncelenen plakta, farklı anlık basınç yükleri altında oluşan tepkiler arasındaki fark, yükün şiddeti arttıkça oransal olarak azalmaktadır.

Semboller

a_1, a_2	: Rayleigh sönümü kütle matrisi ve rijitlik matrisi çarpanları,
h	: Toplam plak kalınlığı,
k	: Ele alınan tabakanın numarasını belirten alt indis,
p	: Yük adımını belirten indis,
r	: N-Basınç dalgasında uzunluk faktörü,
t_p	: Anlık basınç yükünün basınç bölgesindeki etki süresi,
u, v, w	: Plak orta düzleminde sırasıyla x, y, z eksenlerinde oluşan yer değiştirmeler,
x, y	: Plak yüzeyinin tanımlandığı kartezyen eksenler,
z	: Plak yüzeyine dik eksen,
E_1, E_2	: Ortotrop malzemenin 1 ve 2 eksenlerinde elastisite modülü,
G_{12}	: Ortotrop malzemenin 1 ve 2 eksenlerinde kayma modülü,
L	: Plaktaki toplam tabaka sayısı,
P_m	: Anlık basınç yükünün basınç bölgesindeki maksimum değeri,
S	: Plak sınırlarını tarifleyen eğri,
α	: Friedlander fonksiyonunda dağılım parametresi,
β, γ	: Newmark parametreleri,
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	: x, y, z eksen takımında şekil değiştirme tansörünün eksenel bileşenleri,
$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$	: x, y, z eksen takımında şekil değiştirme tansörünün kayma bileşenleri,

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	: x, y, z eksen takımında mühendislik kayma şekil değiştirmeleri,
ρ	: Plak malzemesinin yoğunluğu,
$\upsilon_{12}, \upsilon_{21}$	: Ortotrop malzemenin 1 ve 2 eksenlerinde Poisson oranı,
ω_i	: Sistemin *i*. modunun açısal frekansı,
ς	: Sönüm oranı,
Ω	: Plak orta yüzeyi,
$\mathbf{b} = \{q_x \quad q_y \quad q_z\}^T$	: Plak yüzeyine etkiyen, x, y, z doğrultularındaki kuvvetler,
$\hat{\mathbf{t}} = \{t_x \quad t_y \quad t_z\}^T$	: Plak sınırlarındaki mekanik sınır koşulları,
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$	: Tabakalı plağa ait rijitlik (elastisite) matrisinin alt matrisleri,
$\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{D}', \mathbf{H}'$	: Tabakalı plağa ait komplians matrisinin alt matrisleri,
$\overset{+}{\mathbf{F}}$	: Düzeltme vektörü
$\overset{++}{\mathbf{K}}_L$	: Doğrusal terimleri içeren sistem matrisi,
$\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL}$	: Doğrusal olmayan terimleri içeren sistem matrisi,
$\mathbf{M} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}^T$	: Plak orta ekseninde oluşan eğilme momentleri,
$\mathbf{N} = \{N_x \quad N_y \quad N_{xy}\}^T$	: Plak orta ekseninde oluşan membran kuvvetleri,
$\mathbf{U} = \{u \quad v \quad w\}^T$	: Plak orta noktasının x, y, z yönlerindeki yer değiştirmeleri,
$\dot{\mathbf{U}} = \{\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}\}^T$	: Plak orta noktasının x, y, z yönlerindeki hızı,
$\ddot{\mathbf{U}} = \{\ddot{u} \quad \ddot{v} \quad \ddot{w}\}^T$	: Plak orta noktasının x, y, z yönlerindeki ivmesi,
$\mathbf{Q}$	: Yük vektörü
$\mathbf{Q}$	: Plak eksenlerinde rijitlik (elastisite) matrisi,
$\tilde{\mathbf{Q}}$	: Malzeme eksenlerinde rijitlik (elastisite) matrisi,
$\mathbf{T}$	: Dönüşüm matrisi,
$\mathbf{X}$	: Karışık sonlu elemanın bilinmeyen vektörü

$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}\}^T$: Plak eksenlerinde şekil değiştirme,

$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} = \{\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \gamma_{xy}^0\}^T$: Plak eksenlerinde düzlem içi şekil değiştirme,

$\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}} = \{\kappa_x^0 \quad \kappa_y^0 \quad \kappa_{xy}^0\}^T$: Plak eksenlerinde eğrilik,

$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}\}^T$: Plak eksenlerinde gerilme,

(i) : İterasyon adımını belirten indis,

$\boldsymbol{\varepsilon}^u$: Düzlem içi şekil değiştirmelerin ve eğriliklerin yer değiştirmeler cinsinden ifadesi,

$\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma$: Düzlem içi şekil değiştirmelerin ve eğriliklerin iç kuvvetler cinsinden ifadesi,

$\boldsymbol{\sigma}^\sigma$: Plak orta düzleminde oluşan iç kuvvetler vektörü,

$\delta \prod_{HR}$: Hellinger – Reissner fonksiyonelinin ilk varyasyonu,

${}^{p+\Delta p}\overline{\dots}$: Değişkenlerin son değeri,

${}^{p}\dots$: Değişkenlerin başlangıç değeri,

$\overset{+}{\dots}$: Değişkenlerdeki artım,

Teşekkür

Bu makale TÜBİTAK tarafından desteklenen 106M450 nolu “Anlık Basınç Yükü Etkisindeki Homojen Olmayan Plakların Doğrusal Olmayan Dinamik Davranışının, Sonlu Elemanlarla Çözümü” projesi kapsamında gerçekleştirilen çalışmalardan hazırlanmıştır. Bu destek yazarlar tarafından teşekkürle karşılanmaktadır.

Kaynaklar

[1] Gupta, A.D., Gregory, F.H., Bitting, R.L., Bhattacharya, S., Dynamic analysis of am explosively loaded hinged rectangular plate, Computers and Structures, 26, 339-344, 1987.

[2] Houlston, R., DesRochers, C.G., Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, Computers and Structures, 26, 1-15, 1987.

[3] Yuen, S.C.K., Nurick, G.N., Experimental and numerical studies on the response of quadrangular stiffened plates. Part I: Subjected to uniform blast load, International Journal of Impact Engineering, 31, 55-83, 2005.

[4] Veldman, R.L., Ari-Gur, J., Clum, C., DeYoung, A., Folkert, J., Effects of pre-pressurization on blast response of clamped aluminum plates, International Journal of Impact Engineering, Vol. 32, no.10 pp. 1678-1695, 2006.

[5] Veldman, R.L., Ari-Gur, J., Clum, C., Response of pre-pressurized reinforced plates under blast loading, Int. J. of Impact Engineering, Vol. 35, no. 4, pp. 240-250, 2008.

[6] Kazancı, Z., Mecitoğlu, Z., Hacıoğlu, A., Effect of in plane stiffnesses and inertias on dynamic behavior of a laminated composite plate under blast load, ASCE Earth & Space–2004, Houston, Texas, USA, 7-10 March, 484-491, 2004.

[7] Kazancı, Z., Mecitoğlu, Z., Nonlinear dynamic behavior of simply supported laminated composite plates subjected to blast load., J. Sound and Vib., 317(3-5), 883-897, 2008.

[8] Nayak, A.K., Shenoi, R.A., Moy, S.S.J., Transient response of composite sandwich plates, Composite Structures, 64, 249-267, 2004.

[9] Hause, T., Librescu, L., Dynamic response of anisotropic sandwich flat panels to explosive pressure pulses, Int. J. Impact Engng, 31, 607-628, 2005.

[10] Rodriguez L., Finite Element Nonlinear Analysis for Plates and Shells, Ph.D. Thesis, Dept. of Civil Engng., Massachusetts Institute of Technology, 1968.

[11] Cook, R.D., Eigenvalue problems with a mixed plate element, AIAA Journal, 7(5), 982-983, 1969.

[12] Tsay, C.S., Reddy, J.N., Stability and vibration of thin rectangular plates by simplified mixed finite elements, Journal of Sound and Vibration, 55, 289-302, 1977.

[13] Akay, H.U., Dynamic large deflection analysis of plates using mixed finite elements, Computers and Structures, 11, 1-11, 1980.

[14] Başar, Y., Omurtag, M.H., Free-vibration analysis of thin/thick laminated structures by layer-wise shell models, Computers and Structures, 74, 409-427, 2000.

[15] Doğruoğlu, A.N., Omurtag, M.H., Stability analysis of composite-plate foundation interaction by mixed FEM, ASCE, J. Engng. Mechanics, 126(9), 928-936, 2000.

EK

$$
\mathbf{F}_N=\left\{\begin{matrix}
\begin{pmatrix}
\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,u^i_{,x}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,\tfrac{1}{2}\left(w^i_{,x}\right)^2\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,A'_{11}N^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,A'_{12}N^i_{yy}\mathrm{d}A\\
-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,A'_{13}N^i_{xy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,B'_{11}M^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,B'_{12}M^i_{yy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,B'_{13}M^i_{xy}\mathrm{d}A
\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}
\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,v^i_{,y}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,\tfrac{1}{2}\left(w^i_{,y}\right)^2\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,A'_{21}N^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,A'_{22}N^i_{yy}\mathrm{d}A\\
-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,A'_{23}N^i_{xy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,B'_{21}M^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,B'_{22}M^i_{yy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,B'_{23}M^i_{xy}\mathrm{d}A
\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}
\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,u^i_{,y}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,v^i_{,x}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,w^i_{,x}w^i_{,y}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,A'_{31}N^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,A'_{32}N^i_{yy}\mathrm{d}A\\
-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,A'_{33}N^i_{xy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,B'_{31}M^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,B'_{32}M^i_{yy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,B'_{33}M^i_{xy}\mathrm{d}A
\end{pmatrix}
\end{matrix}\right\}
$$

$$
\mathbf{F}_M=\left\{\begin{matrix}
\begin{pmatrix}
\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx,x}\,w^i_{,x}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx}\,H'_{11}N^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx}\,H'_{12}N^i_{yy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx}\,H'_{13}N^i_{xy}\mathrm{d}A\\
-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx}\,D'_{11}M^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx}\,D'_{12}M^i_{yy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx}\,D'_{13}M^i_{xy}\mathrm{d}A
\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}
\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy,y}\,w^i_{,y}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy}\,H'_{21}N^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy}\,H'_{22}N^i_{yy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy}\,H'_{23}N^i_{xy}\mathrm{d}A\\
-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy}\,D'_{21}M^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy}\,D'_{22}M^i_{yy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy}\,D'_{23}M^i_{xy}\mathrm{d}A
\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}
\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy,x}\,w^i_{,y}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy,y}\,w^i_{,x}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy}\,H'_{31}N^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy}\,H'_{32}N^i_{yy}\mathrm{d}A\\
-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy}\,H'_{33}N^i_{xy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy}\,D'_{31}M^i_{xx}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy}\,D'_{32}M^i_{yy}\mathrm{d}A-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy}\,D'_{33}M^i_{xy}\mathrm{d}A
\end{pmatrix}
\end{matrix}\right\}
$$

$$
\mathbf{F}_U=\left\{\begin{matrix}
\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{u}_{,x}\,N^i_{xx}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{u}_{,y}\,N^i_{xy}\mathrm{d}A\\
\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{v}_{,x}\,N^i_{xy}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{v}_{,y}\,N^i_{yy}\mathrm{d}A\\
\begin{pmatrix}
\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,x}\,M^i_{xx,x}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,y}\,M^i_{yy,y}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,x}\,M^i_{xy,y}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,y}\,M^i_{xy,x}\mathrm{d}A\\
+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,x}\,w^i_{,x}N^i_{xx}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,x}\,w^i_{,y}N^i_{xy}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,y}\,w^i_{,x}N^i_{xy}\mathrm{d}A+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,y}\,w^i_{,y}N^i_{yy}\mathrm{d}A
\end{pmatrix}
\end{matrix}\right\}
$$

$$
\mathbf{K}_{NN}=\begin{bmatrix}
-\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,A'_{11}\overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,A'_{12}\overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\,A'_{13}\overset{+}{N}_{xy}\\
-\bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,A'_{21}\overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,A'_{22}\overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\,A'_{23}\overset{+}{N}_{xy}\\
-\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,A'_{31}\overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,A'_{32}\overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\,A'_{33}\overset{+}{N}_{xy}
\end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{K}_{NM}=\begin{bmatrix} -\bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,B'_{11}\,\overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,B'_{12}\,\overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,B'_{13}\,\overset{+}{M}_{xy} \\ -\bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,B'_{21}\,\overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,B'_{22}\,\overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,B'_{23}\,\overset{+}{M}_{xy} \\ -\bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,B'_{31}\,\overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,B'_{32}\,\overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,B'_{33}\,\overset{+}{M}_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{MN}=\begin{bmatrix} -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\,H'_{11}\,\overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\,H'_{12}\,\overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\,H'_{13}\,\overset{+}{N}_{xy} \\ -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{yy}\,H'_{21}\,\overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{yy}\,H'_{22}\,\overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{yy}\,H'_{23}\,\overset{+}{N}_{xy} \\ -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\,H'_{31}\,\overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\,H'_{32}\,\overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\,H'_{33}\,\overset{+}{N}_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{MM}=\begin{bmatrix} -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\,D'_{11}\,\overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\,D'_{12}\,\overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\,D'_{13}\,\overset{+}{M}_{xy} \\ -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{yy}\,D'_{21}\,\overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{yy}\,D'_{22}\,\overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{yy}\,D'_{23}\,\overset{+}{M}_{xy} \\ -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\,D'_{31}\,\overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\,D'_{32}\,\overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\,D'_{33}\,\overset{+}{M}_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{NU}=\begin{bmatrix} \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,\overset{+}{u}_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,\overset{+}{v}_{,y} & 0 \\ \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,\overset{+}{u}_{,y} & \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,\overset{+}{v}_{,x} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{UM}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,\overset{+}{M}_{xx,x} & \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,\overset{+}{M}_{yy,y} & \begin{pmatrix} \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,\overset{+}{M}_{xy,y} \\ +\bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,\overset{+}{M}_{xy,x} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{UN}=\begin{bmatrix} \bar{\delta}\,\overset{+}{u}_{,x}\,\overset{+}{N}_{xx} & 0 & \bar{\delta}\,\overset{+}{u}_{,y}\,\overset{+}{N}_{xy} \\ 0 & \bar{\delta}\,\overset{+}{v}_{,y}\,\overset{+}{N}_{yy} & \bar{\delta}\,\overset{+}{v}_{,x}\,\overset{+}{N}_{xy} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{MU}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx,x}\,\overset{+}{w}_{,x} \\ 0 & 0 & \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{yy,y}\,\overset{+}{w}_{,y} \\ 0 & 0 & \left(\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,x}\,\overset{+}{w}_{,y}+\bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,y}\,\overset{+}{w}_{,x}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{nl}_{NU}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,w^i_{,x}\,\overset{+}{w}_{,x} \\ 0 & 0 & \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,w^i_{,y}\,\overset{+}{w}_{,y} \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,w^i_{,x}\,\overset{+}{w}_{,y} \\ +\bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,w^i_{,y}\,\overset{+}{w}_{,x} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^{nl}_{UU}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,N^i_{xx}\,\overset{+}{w}_{,x}+\bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,N^i_{xy}\,\overset{+}{w}_{,y} \\ +\bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,N^i_{xy}\,\overset{+}{w}_{,x}+\bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,N^i_{yy}\,\overset{+}{w}_{,y} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{nl}_{UN}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,w^i_{,x}\,\overset{+}{N}_{xx} & \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,w^i_{,y}\,\overset{+}{N}_{yy} & \left(\bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,w^i_{,y}\,\overset{+}{N}_{xy}+\bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,w^i_{,x}\,\overset{+}{N}_{xy}\right) \end{bmatrix}$$