

## Elastik Zeminlere Oturan Plakların Sonlu Izgara Yöntemi ile Yaklaşık Çözümü

A. Halim KARAŞİN\*  
Polat GÜLKAN\*\*

### ÖZ

Elastik zemine oturan plaklara mühendislik mekaniğinde geniş bir uygulama alanına sahip olması nedeniyle büyük ilgi gösterilmektedir. Birçok mühendislik yapılarında yatay ve dikey yüklerin zemine aktarılması önemli bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Genelleştirilmiş zeminlerde model plak ve zemin arasındaki temas noktasında sadece basınç değil aynı zamanda yaylı momentlerin de olduğu varsayılmaktadır. Bu çalışmada iki parametrelili elastik zeminlerle taşınan kiriş elemanları için bilinen rijitlik matrisleri geliştirilerek plakların ızgara şeklinde modellenmesi sağlanmıştır. Bu modelleme ile iki parametrelili zeminlere oturan plaklar için bir sonlu ızgara çözümü geliştirilmiştir. Bu sayısal metot ile zeminin süreksiz ve gelişigüzel değişimi gibi parametrik değişimlerin bulunması halinde de uygulanabilir olması önemli bir avantajdır. Bu metot kullanılarak çeşitli sınır ve yükleme tiplerine sahip plak problemleri çözümlerinde makul sonuçlar elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Elastik zemin, Izgara ile modelleme, Plak analizi

### ABSTRACT

#### An Approximate Finite Grid Solution for Plates on Elastic Foundations

Plates on elastic foundations have received considerable attention due to their wide applicability in engineering mechanics. In many engineering structures transmission of vertical or horizontal forces to the foundation is a major challenge. As a first approach to model it may be assumed that the foundation behaves elastically. For two parameter elastic foundations the model assumes that at the point of contact between plate and foundation there is not only pressure but also moments caused by interaction between the springs. In this study, the exact stiffness matrix of the beam element on two-parameter elastic foundation is extended to plates. Some examples of plates on two-parameter elastic

---

Not: Bu yazı

- Yayın Kurulu'na 13.11.2006 günü ulaşmıştır.
- 30 Eylül 2008 gününe kadar tartışmaya açıktır.

\* Dicle Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Diyarbakır - karasin@dicle.edu.tr

\*\* Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Ankara - pgulkan@ce.metu.edu.tr

foundation were solved by the finite grid solution. Comparison with known analytical solutions and other numerical solutions yields accurate results.

**Keywords:** Elastic foundation, Grids, Plate analysis

## 1.GİRİŞ

Zemin yapı ilişkisi bir bütün olarak birçok uygulamanın ilgisini oluşturmaktadır. Birçok mühendislik yapılarında yatay ve dikey yüklerin zemine aktarılması önemli bir problem olarak karşılanmaktadır. Karmaşık yapılarından dolayı zeminlere oturan plaklar için uygun bir analitik model bulmanın zorluğu nedeniyle bazı basitleştirilmiş modeller geliştirilmiştir. [1], [2], [3] İlk olarak 1867’de Winkler zeminini elastik bir davranış gösterdiği varsayımıyla modellemiştir. Bu modelleme çökme ve basıncın küçük ve birbirleriyle orantılı olması koşulu ile yükün kaldırılmasıyla elemanların orijinal hallerine döneceğini varsayar. Bu varsayımda zeminin tepki kuvvetleri her noktada taşıdığı plağın çökmesiyle orantılı olduğu formülasyona girmiştir.

$$p(x, y) = k_I w(x, y) \quad (1)$$

Bu formülde  $p(x,y)$  zemine etkiyen basınç,  $w(x,y)$  zemin çökme miktarı (L),  $k_I$  Winkler parametresini ( $F/L^3$ ) ifade eder.

Daha gerçekçi bir yaklaşım ile 1940’ta Filonenko – Borodich tarafından zeminin Winkler modelinde temsil edildiği yayların uçları sabit bir çekme T kuvvetine eşit gergin elastik membranlarla bağlı olduğu farz edilmiştir.

$$p(x, y) = k_I w(x, y) + T \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

Winklerin öngördüğü zemin modellemesini 1946’da Hetenyi iki boyutlu kiriş veya üç boyutlu elastik plak problemlerine uygulanabilirliğini saptamıştır.

$$D \left( \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 * \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \right) + k_I w(x, y) = q(x, y) \quad (3)$$

Daha sonra 1954’te Pasternak ise yaylar arasında bir kesme etkileşimi olduğunu farz etmiştir. Bu yaklaşımla yayların üst uçları sadece düşey kesme deformasyonlarına dirençli sıkıştırılmayan bir tabaka ile bağlandığı varsayılmıştır. Buna göre  $k_G$  Pasternak ikinci parametresi ( $F/L$ ) olarak ifade edilmektedir.

$$p(x, y) = k_I w(x, y) + k_G \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Genelleştirilmiş temel olarak 1964’te Kerr tarafından adlandırılan başka bir modelde ise zeminlerde model plak ve zemin arasındaki temas noktasında sadece basınç değil aynı zamanda yaylı momentlerin de olduğu varsayılmaktadır. Bu momentlerin dönme açısı ile ikinci zemin parametresi,  $k_\theta$ , ile orantılı olduğu kabul edilmektedir.

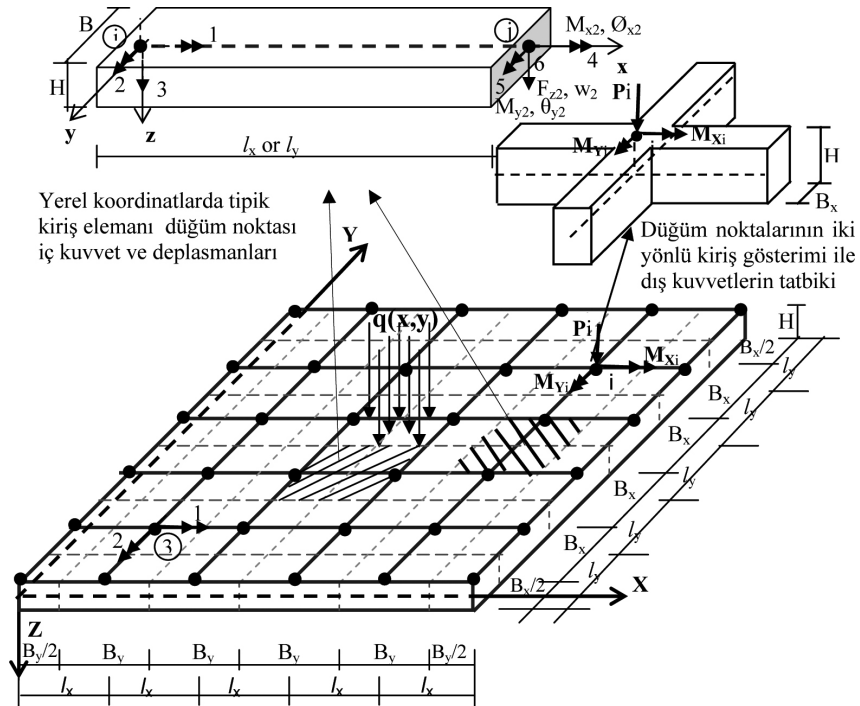


## Elastik Zeminlere Oturan Plakların Sonlu İzgara Yöntemi ile Yaklaşık Çözümü

Denklem (6)'nın çözümü için belli yük ve sınır şartlarına göre, sonlu elemanlar yöntemi (FEM), sınır elemanlar yöntemi (BEM), sonlu farklar yöntemi (FDM) gibi sayısal metotlardan faydalanılabilir. Bu çalışmada iki parametrelili ( $k_1, k_2$ ) elastik zeminlerde taşınan kiriş elemanları için daha önce çıkartılan [4],[5] rijitlik matrisleri geliştirilerek plakların ızgara şeklinde modellenmesi sağlanmıştır. Bu modelleme ile geliştirilmiş zeminlere oturan plaklar için geliştirilmiş bir sonlu ızgara çözümü geliştirilmiştir. Bu sayısal metot ile zeminin süreksiz ve gelişigüzel değişimi, plak kalınlığının değişmesi gibi parametrik değişimlerin bulunması halinde de uygulanabilir olması önemli bir avantajdır.

## 2. PLAKLARIN İZGARA ELEMANLARI OLARAK MODELLENMESİ

Değişik yük ve zemin şartları için bir veya iki parametrelili ( $k_1, k_2$ ) elastik zeminlerde taşınan kirişler için bulunan rijitlik matrisini geliştirilmiş zeminlere oturan plaklara uygulaması yapılmıştır. İki parametrelili zeminlere oturan plakların kesin bir rijitlik matrisine sahip sonlu şerit elemanların oluşturduğu bir ızgara sistemi ile temsili varsayılmaktadır. Bu plakların, münferit parçacıklarla modellenmesi için ızgara benzetmesi yapılarak aynı düzlemde bulunan Şekil 2' de gösterildiği gibi dikdörtgen plak geometrisini verecek şekilde birbirleriyle kesişen iki paralel kiriş grubuyla temsil edilmiştir[6]. Bu varsayım sonucu farklı geometrideki plaklarında modellenebilmesi mümkündür.



Şekil 2. Dikdörtgen bir plağın birbirlerine dik iki kiriş grubuyla ızgara şeklindeki gösterimi ve düğüm noktalarındaki iç ve dış kuvvet ile deplasmanlar.

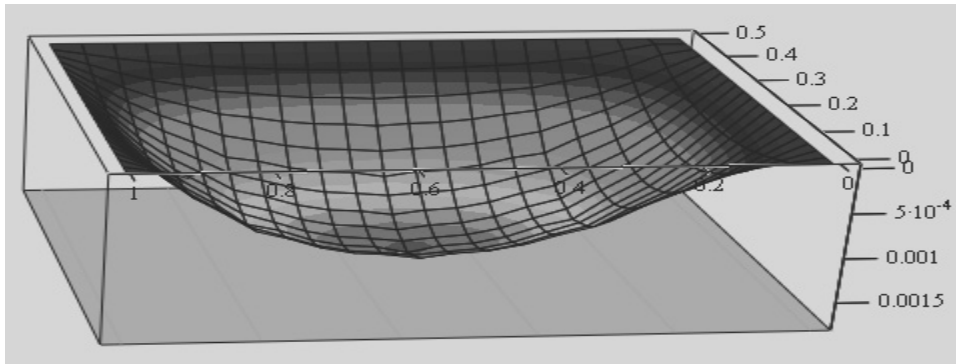
Kiriş elemanlarının her biri tekil bir eleman şeklinde ele alınmakta ve bunların rijitlik, geometrik rijitlik ve kütle matrisleri kapalı çözüm denklemleriyle ifade edilmektedir. Münferit olarak modellenen bir plağın Şekil 1’ de gösterildiği gibi her uçta eksenel dönme, eğilme ve düşey deplasman olmak üzere üç serbestlik derecesine sahip kiriş elemanlarınca temsil edilmektedir. Kapalı rijitlik matris katsayıları gerekli dönüşümlerle global eksen takımlarına taşınmaktadır. İki parametrelili zemine oturan prizmatik elemanlar için bulunan kesin rijitlik matrislerine burulma rijitliği de eklenerek 6X6 boyutunda eleman rijitlik matrisi elde edilmiştir. Benzer şekilde geometrik rijitlik ile kütle matrisleri de plakların burkulma ve serbest titreşim problemlerini çözmeye yönelik sonlu ızgara metoduna uyarlanmıştır.

### 3. SAYISAL UYGULAMALAR

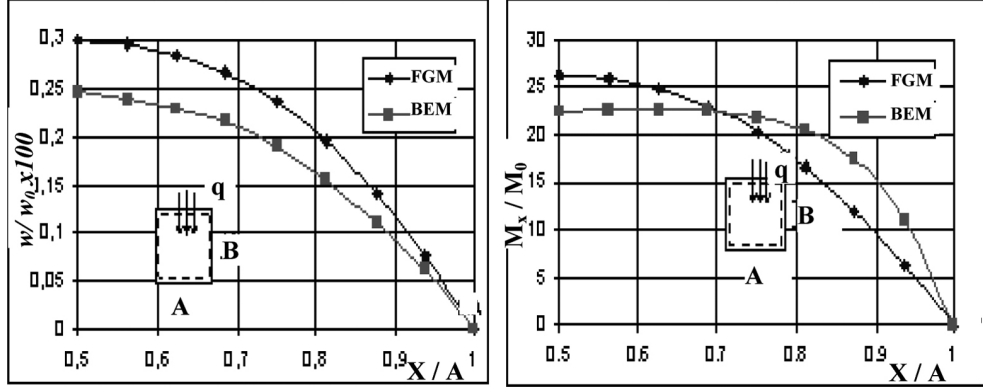
Genelleştirilmiş, diğer bir ifadeyle iki parametrelili, zemine oturan plakların geliştirilen sonlu ızgara çözümünün geçerliliğinin kontrolü için literatürde bulunan diğer sayısal metotlar ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu amaçla düşey yüklere maruz dikdörtgen plaklar ile burkulma ve serbest titreşim problemleri ele alınmıştır.

#### 3.1 İki parametrelili zemine oturan basit mesnetli dikdörtgen plaklarda eğilme:

Kenarları  $A = 1$  m,  $B = 0.5$  m ve sabit kalınlığı  $h = 0.05$  m olan bir iki parametrelili zemine oturan dikdörtgen bir plağa  $q = 6000$  kN/m<sup>2</sup>’lik yaylı bir yük uygulanmaktadır. Malzeme özellikleri; Plak Elastisite Modülü  $E = 2.1 \times 10^8$  kN/m<sup>2</sup>, Poisson oranı  $\nu = 0.3$ , ve zemin Parametreleri  $k_1 = 6.48 \times 10^4$  kN/m<sup>3</sup>,  $k_2 = 2250.0$  kN/m. Şekil 3’te Plağın üç boyutlu çökme grafiği verilmiştir. Sonuçların EI-Zafrany ve Fadhil [7]’in Sınır Eleman Metoduyla çözümüyle kıyaslayabilmek için  $w_0 = q(A.B)^2/D$  ve  $M_0 = q(A.B)$  olmak üzere  $w/w_0$  ve  $M/M_0$  boyutsuz parametrelerin hesaplanmıştır. Şekil 4’te  $w/w_0$  ve  $M/M_0$  boyutsuz parametrelerin uzun kenara paralel orta eksen ile değişimleri verilmiştir. Bu şekilde yer alan sapma miktarları kabul edilebilir sınırlar içerisinde yer almakla birlikte her iki metodun da yaklaşık olmasından dolayı mevcut çalışmanın, sonlu ızgara çözümünün (FGM), duyarlılığını tam olarak yansıtamamaktadır.



Şekil 3. İki parametrelili bir zemine oturan düzgün yaylı yüklü dört kenarı basit mesnetli (SSSS) dikdörtgen plağın üç boyutlu deformasyon eğrisi



Şekil 4. İki parametrelili zemine oturan düzgün yayılı yüklü dört kenarı basit mesnetli dikdörtgen plak (SSSS) için deformasyon ve momentlerin sonlu sınır elemanları metoduyla kıyaslanması

### 3.2 Farklı değişkenlikteki iki parametrelili zemine oturan Levy plaklarında eğilme problemleri:

Green fonksiyonları kullanılarak Lam ve Wang [8] tarafından karşılıklı iki kenarı basit mesnetli diğer iki kenarın basit, ankastre veya serbest olan Levy plakları için kesin çözümler geliştirilmiştir. Bu kesin çözümlerin mühendis ve araştırmacıların kullandığı sayısal metodların geçerliliği için kayda değer bir referans olduğu varsayılmıştır.

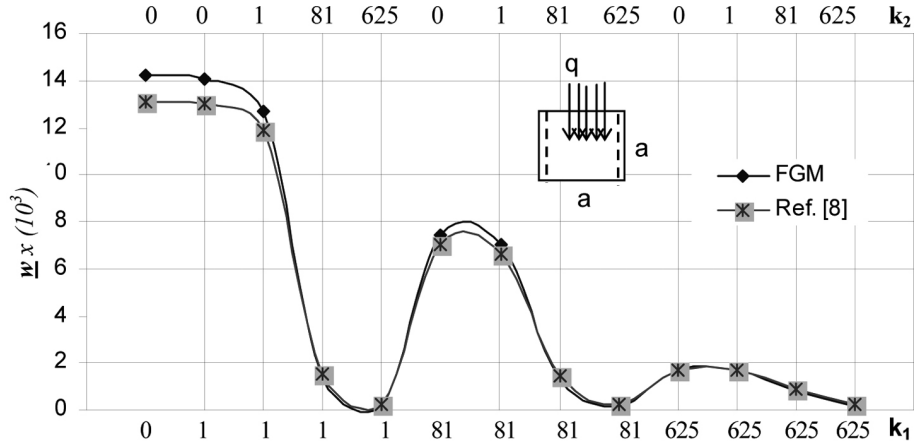
İki parametrelili bir zemine oturan sabit  $h$  kalınlıklı, kenar uzunlukları  $L_x$  ve  $L_y$ , elastisite modülü  $E$ , Poisson oranı  $\nu$  olan ve sabit bir  $q$  yayılı yüküne maruz Levy plaklar ele alınmıştır. Mevcut çalışmanın, Sonlu Izgara Çözümünün (FGM), koniksel kesin çözümlerle (Ref. [8]) kıyaslayabilmek için  $w(0.5,0.5)$  plağın orta noktasındaki sehimi,  $M_x(0.5,0.5)$  plağın orta noktasındaki momenti,  $k_1$  zeminin 1nci parametresi,  $k_2$  zeminin 2nci parametresi,  $D$  plak rijitliği  $\omega$  serbest titreşim frekansı,  $N_x$  ve  $N_y$  plak eksenel (inplane) yükleri olmak üzere aşağıdaki altı çizgili notasyonlardan oluşan boyutsuz parametreler kullanılmıştır.

$$\underline{w} = \frac{w(0.5,0.5) * D}{q * L_x^4 * 10^3}; \quad \underline{k}_1 = \frac{k_1 L_y^4}{D}; \quad \underline{k}_2 = \frac{k_2 L_y^2}{D}$$

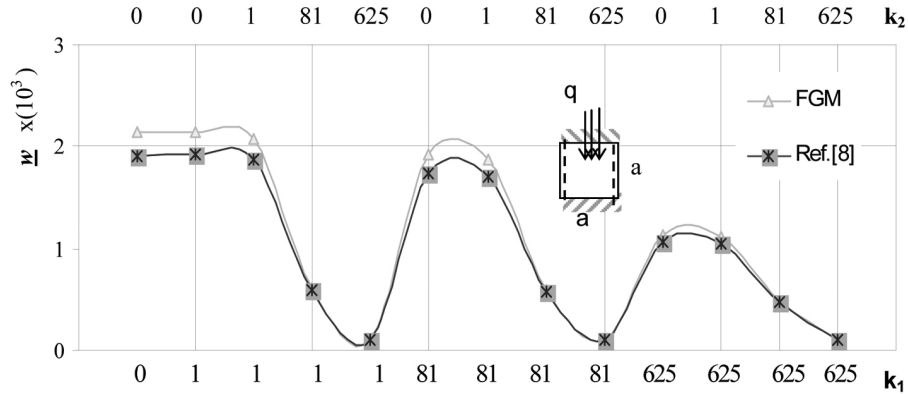
$$\underline{M}_y = \frac{M_y(0.5,0.5)}{q * L_x^2} * 10^2; \quad \underline{M}_x = \frac{M_x(0.5,0.5)}{q * L_x^2} * 10^2 \quad (7)$$

$$\underline{N}_x = \frac{N_x L_y^2}{D}; \quad \underline{N}_y = \frac{N_y L_y^2}{D}; \quad \underline{\omega}^2 = \frac{\rho * h * L_y^4}{D} * \omega^2$$

Karşılıklı olarak  $k_1$  ve  $k_2$ 'nin 0, 1,  $3^4$  ve  $5^4$  değerleri için plağın orta noktasındaki boyutsuz sehim değerleri hesaplanmıştır. Bu değerler ile iki metodun kıyaslanması Levy plağının diğer iki kenarının serbest ve ankastre olması durumunda sırasıyla Şekil 5 ve 6'da gösterilmiştir.



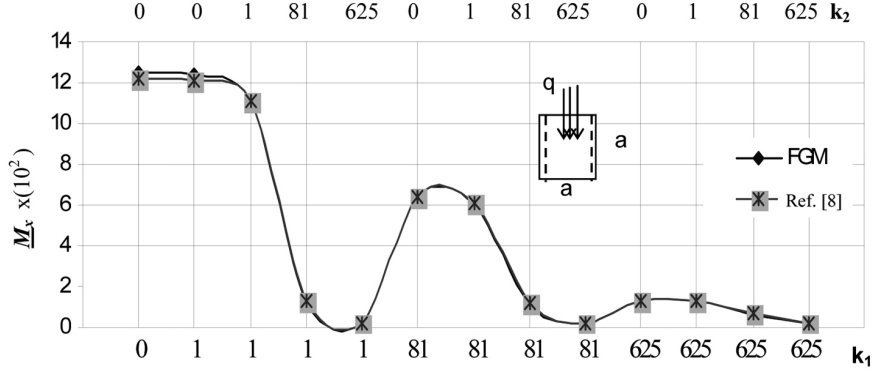
Şekil 5. İki parametrelili bir zemine oturan düzgün yayılı yüklü karşılıklı iki kenarı serbest iki kenarın basit mesnetli Levy plağı (SFSS) için sehim  $w$  parametresinin kıyaslanması



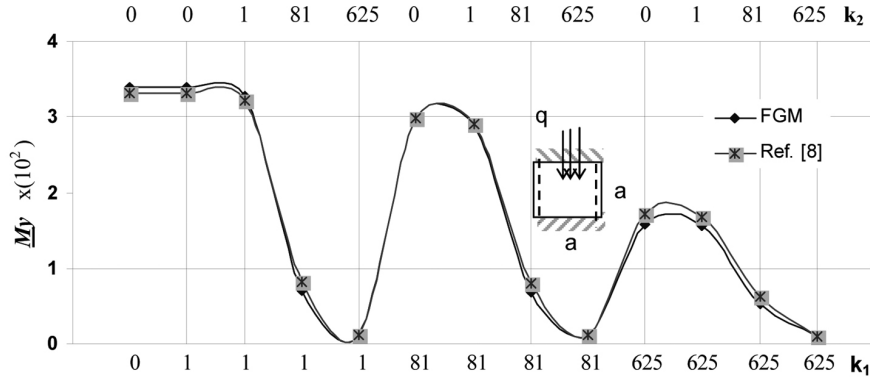
Şekil 6. İki parametrelili bir zemine oturan düzgün yayılı yüklü karşılıklı iki kenarı ankastre iki kenarın basit mesnetli Levy plağı (SCSC) için sehim  $w$  parametresinin kıyaslanması

Aynı şekilde zemin parametreleri  $k_1$  ve  $k_2$ 'nin karşılıklı olarak 0, 1,  $3^4$  ve  $5^4$  değerleri için plağın orta noktasındaki boyutsuz moment değerleri de hesaplanmıştır. Bu değerler ile iki metodun kıyaslanması Levy plağının diğer iki kenarının serbest ve ankastre olması durumunda sırasıyla Şekil 7 ve 8'de gösterilmiştir.

### Elastik Zeminlere Oturan Plakların Sonlu Izgara Yöntemi ile Yaklaşık Çözümü



Şekil 7. İki parametrelili zemine oturan yayılı yüklü karşılıklı iki kenarı serbest iki kenarın basit mesnetli Levy plağı (SFSE) için Moment  $M_x$  parametresinin kıyaslanması



Şekil 8. İki parametrelili zemine oturan yayılı yüklü karşılıklı iki kenarı ankastre iki kenarın basit mesnetli Levy plağı (SCSC) için moment  $M_x$  parametresinin kıyaslanması

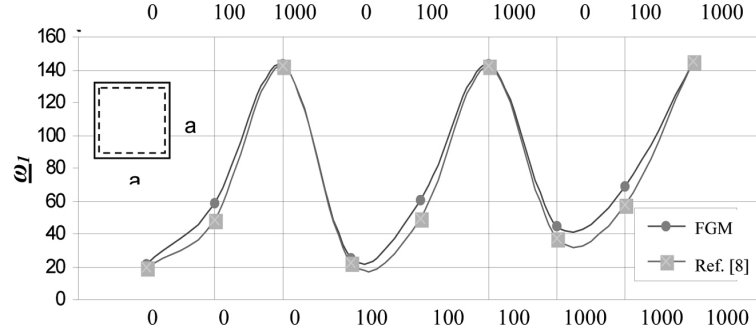
Şekil 5, 6, 7 ve 8'de görüleceği gibi özellikle ikinci parametrenin artırılması sonucu sehim ve moment değerleri çok küçük değerlere ulaşmaktadır. Gerek sehim gerekse moment parametrelerinin kıyaslanmasını yansıtan şekillerde  $k_1$  ve  $k_2$  parametreleri değerlerinin artması hata oranının azalması hatta referans değerleriyle çakışması zeminin aşırı rijit bir hal almasının doğal bir sonucu olarak değerlendirilebilir.

### 3.3 Farklı değişkenlikteki iki parametrelili zemine oturan Levy plaklarında serbest titreşim ve burkulma problemleri:

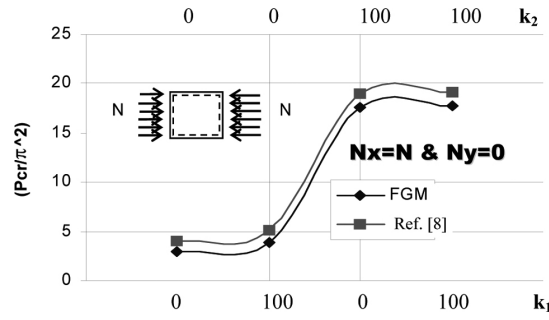
Serbest titreşim ve burkulma problemleri için Lam ve Wang [8] tarafından Levy plakları için geliştirilen kesin çözümleri ile kıyaslamalar yapılmıştır. Dört kenarı basit mesnetli bir plak için boyutsuz zemin parametreleri  $k_1$  ve  $k_2$ 'nin karşılıklı olarak 0, 100 ve 1000 değerleri için plağın boyutsuz 1inci frekans değerleri  $\omega_1$  hesaplanarak iki metodun



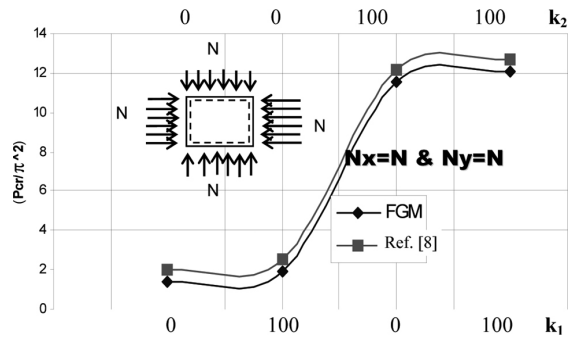
kiyaslaması Şekil 9'da gösterilmiştir. Aynı plak için  $k_1$  ve  $k_2$ 'nin karşılıklı olarak 0 ve 100 değerleri için plağın boyutsuz bir ve iki yönlü (inplane) yükleme için kritik burkulma kuvveti  $P_{cr}$  hesaplanarak iki metodun kıyaslamasıyla kabul edilebilir düşük hata miktarı Şekil 10 ve 11'de gösterilmiştir.



Şekil 9. İki parametrelili bir zemine oturan basit mesnetli (SSSS) kare bir plağın 1inci frekans  $\omega_1$  parametrelerinin kıyaslanması



Şekil 10. İki parametrelili bir zemine oturan basit mesnetli (SSSS) kare bir plağın tek ve iki yönlü basınç altındaki kritik burkulma parametrelerinin kıyaslanması



Şekil 11. İki parametrelili bir zemine oturan basit mesnetli (SSSS) kare bir plağın tek ve iki yönlü basınç altındaki kritik burkulma parametrelerinin kıyaslanması

#### 4. SONUÇ

İki parametrelili sabit veya değişken elastik zeminlere oturan farklı sınır şartlarına sahip dikdörtgen plaklar için sonlu ızgara çözümünün, birçok sayısal yöntemler ile bulunan sonuçlarla yapılan kıyaslamalarda plak elemanının ızgara şeklindeki şeritlere ayrılmasıyla oluşan hatalarla birlikte kesin sonuçlara yakın kabul edilebilir sonuçlar elde edilmiştir. Örnekler statik, dinamik ve stabilite problemlerinden alınmış literatürden bilinen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu sayısal metot ile zeminin süreksiz ve gelişigüzel değişimi, plak özelliklerinin yer yer değişmesi, plakta boşluk olması veya kalınlığının değişmesi gibi parametrik değişimlerin bulunması halinde de uygulanabilir olması kayda değer bir avantajdır. Ayrıca elastik zemine oturan plak analizinin karmaşık oluşu, plak sınır şartları, yayılı yük ve tekil kuvvetlerin tatbik edilen noktalar için herhangi bir sınırlamanın olmayışı da bu metodun pratikliğini ortaya koymaktadır.

#### Kaynaklar

- [1] Timoshenko, S.P. and Krieger, S.W., 1959. Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company
- [2] Szilard, R., 1974. Theory and analysis of plates: classical and numerical methods, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
- [3] Selvadurai, A.P.S., 1979. Elastic Analysis of Soil – Foundation Interaction, Elsevier Scientific Publishing Company
- [4] Razaqpur, A.G. and Shah, K.R. 1991. Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundations, International Journal of Solids Structures, 27(4), 435-454, 1991.
- [5] Gülkan, P. and Alemdar, B.N., 1999. An exact finite element for a beam on a two-parameter elastic foundation, Structural Engineering and Mechanics, 7(3), 259-276
- [6] Karaşin, A., 2004. An Improved Finite Grid Solution for Plates on Generalized Foundations, PhD dissertation, Middle East Technical University in Ankara,
- [7] EI-Zafrany, A. and Fadhil, 1996. A modified Kirchhoff theory for boundary element analysis of thin plates resting on two-parameter foundation, Eng. Structures, 18(2), 102-114
- [8] Lam K.Y. At all, 2000. Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions, Engineering Structures, 22(4), 364-378