

## Silindirik ve Konik Helislerin Karışık SEM ile Dinamik Analizi

Konuralp GİRGİN\*  
Olca OLGUN\*\*  
Kutlu DARILMAZ\*\*\*  
Mehmet H. OMURTAG\*\*\*\*

### ÖZ

İnşaat mühendisliği uygulamalarında merdivenlerde, makina mühendisliği uygulamalarında ise mekanik aksamlarda helisel çubuklarla sıkça karşılaşılmaktadır. Bu çalışmada silindirik ve konik geometriye sahip helisel çubukların serbest titreşimi karışık sonlu eleman yöntemiyle incelenmiştir. Bu amaçla, Timoshenko kiriş kuramına dayanan, değişken eğrilikli ve değişken kesitli uzay çubukların eleman matrisi ve yayılı kütle matrisleri geliştirilmiştir. Eleman matrisinin geliştirilmesi amacı ile elde edilen fonksiyonelde değişkenler, Frenet koordinat takımında, üç ötelenme, üç dönme, bir eksenel normal kuvvet, iki kesme kuvveti, bir burulma momenti ve iki eğilme momentidir. Bu çalışmada elde edilen sayısal sonuçlar, literatürde mevcut bulunan çalışmalarda elde edilenler ile karşılaştırılmış ve yeterli doğrulukta olduğu görülmüştür.

### ABSTRACT

#### Dynamic Analysis of Cylindrical and Conical Helices by Mixed FEM

Engineers often come face to face with helical springs especially in the applications of civil and mechanical engineering. In this study, free vibration analysis has been performed regarding cylindrical and conical helices. For this purpose, the necessary element matrix based on Timoshenko beam theory and consistent mass matrix of these helices with variable cross sections were derived according to the mixed FE method. The consistent mass matrix formulation is preferred since its angular frequencies are more accurate compared to the lumped mass formulation. The numerical results obtained in this study are compared with analytical, experimental and other numerical studies in the current literature.

---

Not: Bu yazı

- Yayın kurulu'na 08.08.2005 günü ulaşmıştır.
- 31 Aralık 2006 gününe kadar tartışmaya açıktır.

\* İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İstanbul – [kgirgin@ins.itu.edu.tr](mailto:kgirgin@ins.itu.edu.tr)

\*\* Urban İnşaat San. ve tic. A.Ş., İstanbul.

\*\*\* İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İstanbul – [kdarilmaz@ins.itu.edu.tr](mailto:kdarilmaz@ins.itu.edu.tr)

\*\*\*\* İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İstanbul – [omurtagm@itu.edu.tr](mailto:omurtagm@itu.edu.tr)

It is observed that, the results of the proposed FE formulation are quite satisfactory for engineering requirements.

## **1. GİRİŞ**

Mimari gereksinimler nedeniyle helisel taşıyıcı sistemler inşaat mühendisliğinde merdiven uygulamalarında sıkça karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca makina mühendisliğinde kullanılan en önemli yardımcı elemanlardan birisi olması nedeni ile helisel yayların davranışlarının gerçekçi bir biçimde belirlenmesi gerekmektedir. Epstein [1], Pearson ve Wittrick [2] helisel çubukların çözümü için bağ koşullarına ve yükleme durumlarına bağlı olarak çeşitli kısıtlamalar içeren analitik yöntemler geliştirmişlerdir. Holmes [3], iki ucu ankastre simetrik yüklü helisel çubuklarda genel denklemleri kullanarak sınırlı sayıda çözümler yapmıştır. Scordelis [4] helis açıklığındaki iç kuvvetlerin hesabı amacıyla, iki ucu ankastre helisel çubuklarda minimum şekil değiştirme enerjisi ilkesinden yararlanarak 510 farklı yükleme durumunu içeren tablolar sunmuştur. Cinemre [5] ve Pearson [6] yaklaşık sayısal çözüm yöntemlerinden birisi olan taşıma matrisi yöntemini, Haktanır ve Kıral [7] sonlu elemanlar yöntemini, Abdalbaki ve Shukair [8] ise esneklik matrisinden elde ettikleri rijitlik matrisine dayanan sonlu elemanlar yöntemini kullanmak suretiyle bu konudaki öncü statik analiz çalışmalarını yapmışlardır.

Helisel çubukların dinamik analizi ile ilgili çalışmalar literatürde nispeten azdır. Helisel çubuklarda yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemini kullanarak Mottershead [9], Haktanır ve Kıral [10] dinamik analize yönelik çalışmalar yapmışlardır. Taşıma matrisi yöntemi ile Nagaya, Takeda ve Nakata [11] silindirik olmayan yayların serbest titreşimi üzerinde teorik çalışmalar yapmışlar ve elde ettikleri serbest titreşim frekanslarını deneysel çalışmalarında buldukları ile karşılaştırmışlardır. Yıldırım [12] taşıma matrisi yöntemini kullanarak sınır koşulları, tur sayısı, yükselme açısı gibi çeşitli parametrelerin helislerin serbest titreşim frekanslarına olan etkisini araştırmıştır. Yıldırım ve İnce [13] silindirik olmayan helislerin serbest titreşimini taşıma matrisi yöntemi ile incelemiş ve bu çalışmalarında kayma, uzama ve dönel eylemsizlik momentlerinin etkilerini de dikkate almışlardır. Yıldırım ve Sancaktar [14] kompozit malzemeden yapılmış helislerin serbest titreşimi konusunda çalışmışlardır. Yıldırım [15] yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemini kullanarak silindirik olmayan helislerde geometrik büyüklüklerin değişimine bağlı olarak doğal frekansın hesaplanmasına olanak veren bağıntılar önermektedir. Becker ve diğerleri [16] helisel yayların serbest titreşim frekanslarına etki eden parametreleri incelemişlerdir. Busool ve Eisenberger [17] değişken kesitli silindirik ve silindirik olmayan helislerin serbest titreşim analizinde yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Yıldırım [18] kompozit helislerde serbest titreşim frekanslarını etkileyen parametreleri incelemiştir. Helislerin dinamik analizi konusunda diğer bazı çalışmalar [19] ve [20] nolu referanslarda verilmektedir. Aköz ve Ark. [21] uzay çubuklar için Gâteaux diferansiyeli ve potansiyel operatör kavramını kullanarak bir fonksiyonel geliştirmişlerdir. Daha sonra, bu çalışmadan hareketle Omurtag ve Aköz [22] silindirik helisel çubuklar için Timoshenko kiriş [23] teorisi ve İnan [24] deki alan denklemleri kullanarak yeni bir fonksiyonel önermiştir. Sözü edilen fonksiyoneller statik analiz amacıyla geliştirilmiş olup karışık sonlu eleman formülasyonuna uygundur.

Omurtag ve Aköz [22] deki fonksiyonelden yararlanılarak, bu çalışmada dinamik analiz için dönel eylemsizliklerin de dikkate alındığı karışık sonlu eleman formülasyonuna uygun bir fonksiyonel sunulmaktadır. Sonlu eleman formülasyonunda yayılı kütle matrisi

kullanılmıştır. Silindirik olmayan helis geometrisi, eğriliklerin şekil fonksiyonlarıyla dikkate alınması ile yaklaşık olarak ifade edilmiş, eleman ve kütle matrisleri buna göre elde edilmiştir. Karışık sonlu eleman formülasyonunda dinamik analiz yapılırken, indirgeme işlemine ihtiyaç duyulmaktadır, Omurtag ve ark. [25]. Frenet hareketli eksen takımı  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  ye göre eleman matrisinde bilinmeyenler: yer değiştirmeler  $\mathbf{U}(u_t, u_n, u_b)$ , dönmeler  $\mathbf{\Omega}(\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b)$ , kuvvetler  $\mathbf{T}(T_t, T_n, T_b)$  ve momentler  $\mathbf{M}(M_t, M_n, M_b)$  olup bir düğüm noktasında 12 serbestlik derecesi bulunmaktadır. Timoshenko kiriş kuramına göre kayma etkilerinin de dikkate alındığı iki düğüm noktalı eğrisel çubuk eleman, doğrusal şekil fonksiyonlarından yararlanmak suretiyle geliştirilmiştir.

## 2. ALAN DENKLEMLERİ ve FONKSİYONEL

Bu çalışmada elastik, homojen ve izotrop çubuklar birinci mertebe kuramı içinde incelenmiştir.

### 2.1 Silindirik Olmayan Helis Geometrisi

Helisel çubuk eksenini,  $x$  ekseninden itibaren ölçülen  $\varphi$  açısına bağlı olarak değişen  $R(\varphi)$  biçiminde bir dairesel yarıçaptır.  $\varphi$  açısı parametre olarak seçilirse helisin parametrik denklemi,

$$x = R(\varphi) \cos(\alpha), \quad y = R(\varphi) \sin(\alpha), \quad z = p(\varphi)\varphi \quad (2.1)$$

olur. Burada  $R(\varphi)$  helisin sarıldığı silindirin yarıçapı,  $p(\varphi)$  ise uzunluk boyutunda olup helisin birim radyana karşı gelen yükselme değeridir ve  $R(\varphi)$  ile arasında,

$$p(\varphi) = R(\varphi) \tan(\alpha) \quad (2.2)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Burada  $\alpha$  helisin eğimidir. Sabit eksen takımının birim vektörleri  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sırasıyla  $x, y$  ve  $z$  eksenleri üzerinde olup, helis üzerindeki herhangi bir noktanın konumu  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  vektörüyle ifade edilebilir. Öte yandan Şekil 2.1 de görüldüğü gibi çubuk eksenini boyunca sürekli hareket eden bir başka dik takım olan Frenet birim vektörleri  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  ise,  $\mathbf{r}$  yer vektörüne diferansiyel bağımlı olup, aralarında ilişki,

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}/ds}{\|d\mathbf{t}/ds\|}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (2.3)$$

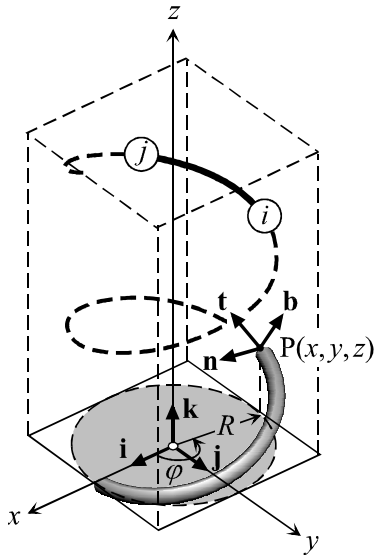
olarak yazılır. Burada  $\mathbf{t}$  çubuk eksenini doğrultusundaki birim teğet vektörü olup, diferansiyel yay boyu  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  ise,

$$ds = \sqrt{R^2(\varphi) + p^2(\varphi)} d\varphi = c(\varphi) d\varphi \quad (2.4)$$

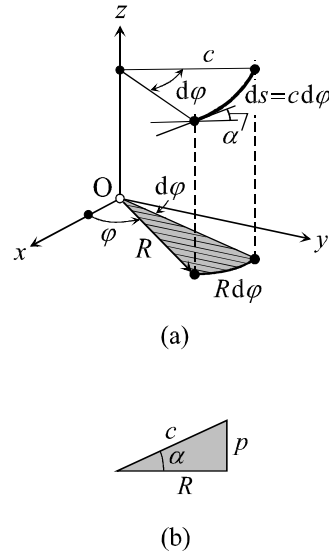
biçiminde hesaplanır. Geometrik dönüşüm formülleri ise,

$$\frac{dt}{ds} = \chi \mathbf{n}, \quad \frac{dn}{ds} = -\chi \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \quad \frac{db}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (2.5)$$

şeklinde olup İnan [24],  $\chi$  helisin eğriliği,  $\tau$  helisin tabii burulmasıdır.



Şekil 2.1 Helis geometrisi



Şekil 2.2 Yay elemanı

## 2.2 Silindirik Helis Geometrisi

Helis silindirik ise,  $R = \text{sabit}$  olacağından,

$$\chi = \frac{R}{c^2}, \quad \tau = \frac{p}{c^2}, \quad c^2 = R^2 + p^2, \quad p = R \tan \alpha \quad (2.6)$$

birer sabit değerdir. Burada  $\alpha$  helisin eğrisinin eğimidir. Hareketli takım (Frenet) ile sabit takımı arasında dönüşüm bağıntıları,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{c} \sin \varphi & -\cos \varphi & \frac{p}{c} \sin \varphi \\ \frac{R}{c} \cos \varphi & -\sin \varphi & \frac{p}{c} \cos \varphi \\ -\frac{p}{c} & 0 & \frac{R}{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{c} \sin \varphi & \frac{R}{c} \cos \varphi & \frac{p}{c} \sin \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \frac{p}{c} \sin \varphi & -\frac{p}{c} \cos \varphi & \frac{R}{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

şeklinde dir.

### 2.3 Silindirik Heliste Alan Denklemleri

Elastik çubuğun hareket denklemleri,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} - \rho A \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} - \rho \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

dir. Burada  $A$  çubuk kesit alanı,  $\mathbf{I}$  eylemsizlik momenti,  $\mathbf{u}$  dik kesitin ağırlık merkezindeki ötelenme vektörü,  $\boldsymbol{\Omega}$  ağırlık merkezinden geçen eksenler etrafındaki dönme vektörü,  $\mathbf{T}$  kuvvet vektörü,  $\mathbf{M}$  moment vektörü ve  $\ddot{\mathbf{u}} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$  olup, vektörlerin açık halde gösterimi,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= u_t \mathbf{t} + u_n \mathbf{n} + u_b \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\Omega} &= \Omega_t \mathbf{t} + \Omega_n \mathbf{n} + \Omega_b \mathbf{b} \\ \mathbf{T} &= T_t \mathbf{t} + T_n \mathbf{n} + T_b \mathbf{b} \\ \mathbf{M} &= M_t \mathbf{t} + M_n \mathbf{n} + M_b \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

şeklinde dir. Timoshenko [23] kirişi için kinematik ilişkiler,

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega} \quad \text{ve} \quad \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} - \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

olarak ifade edilir. Burada  $\boldsymbol{\gamma}$  birim kayma açısı vektörü ve  $\boldsymbol{\kappa}$  birim dönme vektörüdür. Bünye bağıntıları,

$$\mathbf{C}_\gamma \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \mathbf{C}_\kappa \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

biçiminde yazılır. Hooke yasasına uyan homojen izotrop çubuk için kompliyans matrisleri,

$$\mathbf{C}_\gamma = \begin{bmatrix} 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & 1/GA' & 0 \\ 0 & 0 & 1/GA' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\kappa = \begin{bmatrix} 1/EI_t & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI_n & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_b \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

dır. Burada  $E$  elastisite modülü,  $G$  kayma modülü,  $A$  kesit alanı olmak üzere itibari kayma alanı  $A' = A/k'$ ,  $I_t, I_n, I_b$  sırasıyla  $(t, n, b)$  eksenlerine göre eylemsizlik momentleri ve  $k'$  kayma alanı katsayısıdır.

## 2.4 Fonksiyonel

Gâteaux türevi ve potansiyel operatör kavramı kullanılarak statik analiz için eğrisel uzay çubukların karışık sonlu eleman formülasyonuna uygun olacak fonksiyonel Aköz ve ark. [21] ve silindirik helis biçimli çubuklar için Omurtag ve Aköz [22] tarafından elde edilmiştir. Olgun [26] de silindirik helisel çubukların harmonik dinamik analizi için geliştirilen fonksiyonel,

$$\left. \begin{aligned} I(\mathbf{y}) = & - \left[ \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] + [\mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{T}] - \left[ \frac{d\mathbf{M}}{ds}, \boldsymbol{\Omega} \right] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}_\kappa \mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}_\gamma \mathbf{T}, \mathbf{T}] \\ & - \frac{1}{2} \rho A \omega^2 [\mathbf{u}, \mathbf{u}] - \frac{1}{2} \rho \omega^2 [\mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}] \\ & + [(\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}, \mathbf{u})]_\sigma + [(\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}, \mathbf{u})]_\sigma + [\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{T}]_\varepsilon + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{M}]_\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

olup,  $\rho$  çubuğun özkütlesi,  $\omega$  doğal açısal frekans ve  $\mathbf{I} = \{I_t \ I_n \ I_b\}$  eylemsizlik momenti vektörüdür. (2.14) de  $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}, \hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{M}}$  sınırlarda bilinen değerler için sıfırdan farklı olup,  $\varepsilon$  ve  $\sigma$  alt indisli terimler sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarıdır. Fonksiyonel yapısı gereği karışık sonlu eleman formülasyonuna uygundur. Bu çalışmada (2.14) den hareketle silindirik olmayan helislerin dinamik analizi için aşağıda açıklanan yaklaşık çözüm yöntemi geliştirilmiştir.

## 3. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

### 3.1 Sonlu Eleman Matrisleri

Fonksiyoneldeki serbest değişkenler üstünde türevler birinci mertebeden daha yüksek olmadığı için, kullanılan doğrusal şekil fonksiyonları,

$$\psi_i = \frac{\varphi_j - \varphi}{\Delta \varphi} \quad \text{ve} \quad \psi_j = \frac{\varphi - \varphi_i}{\Delta \varphi}, \quad (\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_j) \quad (3.1)$$

dir. Burada,

$$\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_i \quad (3.2)$$

olup, Şekil (2.1) de görüldüğü gibi eğrisel elemanın düğüm noktaları alt indis biçiminde  $i$  ve  $j$  ile gösterilmiştir. Böylece (2.4) den yararlanılarak eleman boyu,

$$s^e = (c_i\psi_i + c_j\psi_j)\Delta\varphi \quad (3.3)$$

biçiminde ifade edilir. Eğer silindirik helis çözülecekse  $c = c_i = c_j = \text{sabit}$  olur ve eleman yay boyu,

$$s^e = c\Delta\varphi \quad (3.4)$$

biçiminde hesaplanır. Bu düşünce ile (2.14) bağıntısındaki  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{T}$  ve  $\mathbf{M}$  değişkenleri, sonlu eleman formülasyonuna göre  $\mathbf{u}^e(\varphi) = \mathbf{u}_i\psi_i + \mathbf{u}_j\psi_j, \dots$ , şeklinde ifade edilirler. Değişken kesitli çubukta, çubuk elemanın eksenini boyunca rijitliklerin değişimi şekil fonksiyonları aracılığı ile,

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}(\varphi) &= \frac{1}{(AE)_i}\psi_i + \frac{1}{(AE)_j}\psi_j \\ \bar{K}(\varphi) &= \frac{1}{(GA')_i}\psi_i + \frac{1}{(GA')_j}\psi_j \\ \bar{I}_t(\varphi) &= \frac{1}{(GI_t)_i}\psi_i + \frac{1}{(GI_t)_j}\psi_j \\ \bar{I}_n(\varphi) &= \frac{1}{(GI_n)_i}\psi_i + \frac{1}{(GI_n)_j}\psi_j \\ \bar{I}_b(\varphi) &= \frac{1}{(GI_b)_i}\psi_i + \frac{1}{(GI_b)_j}\psi_j \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

biçiminde ifade edilir. Eğer helis silindirik değilse,  $R = R(\varphi)$  olur ve eleman düğüm noktalarında yarıçaplar  $R_i \neq R_j$  dir. Bu durumda (2.6) bağıntısından yararlanılarak her bir düğüm noktası için  $p_i, p_j, c_i, c_j, \chi_i, \chi_j, \tau_i, \tau_j$  değerleri hesaplanır. Bunların eleman içindeki değişimlerini ifade etmek amacıyla şekil fonksiyonlarından yararlanılarak,

$$\left. \begin{aligned} \tau^e &= \tau_i\psi_i + \tau_j\psi_j \\ \chi^e &= \chi_i\psi_i + \chi_j\psi_j \\ c^e &= c_i\psi_i + c_j\psi_j \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

yazılır. Sonuç olarak eleman matrisi ile değişkenler vektörü,

$$\left[ \mathbf{k}^e \right] \{ \mathbf{x} \} = \left[ \begin{array}{cccccc|cccc}
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\hat{\mathbf{k}}] & [\mathbf{k}^{c,\mathcal{Z}}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{k}^{c,\mathcal{Z}}] & [\hat{\mathbf{k}}] & [\mathbf{k}^{c,\tau}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{k}^{c,\tau}] & [\hat{\mathbf{k}}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\hat{\mathbf{k}}] & [\mathbf{k}^{c,\mathcal{Z}}] & \mathbf{0} \\
 & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{k}^c] & -[\mathbf{k}^{c,\mathcal{Z}}] & [\hat{\mathbf{k}}] & [\mathbf{k}^{c,\tau}] & \mathbf{0} \\
 & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{k}^c] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{k}^{c,\tau}] & [\hat{\mathbf{k}}] & \mathbf{0} \\
 \hline
 & & & & & & -[\mathbf{k}^{c,\bar{A}}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & -[\mathbf{k}^{c,\bar{K}}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & -[\mathbf{k}^{c,\bar{K}}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & & -[\mathbf{k}^{c,\bar{I}_t}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & & & -[\mathbf{k}^{c,\bar{I}_n}] & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & & & & -[\mathbf{k}^{c,\bar{I}_b}]
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_t \\ u_n \\ u_b \\ \Omega_t \\ \Omega_n \\ \Omega_b \\ T_t \\ T_n \\ T_b \\ M_t \\ M_n \\ M_b \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

dir. (3.7) de kullanılan tüm alt kare matrisler  $2 \times 2$  boyutunda olup,

$$[\hat{\mathbf{k}}] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

fonksiyoneldeki sınır terimlerinden eleman matrisine gelen sınır koşullarıdır. (3.5) de kullanılan üst indisli alt matrisler  $[\mathbf{k}^{c,\bar{A}}]$ ,  $[\mathbf{k}^{c,\bar{K}}]$ ,  $[\mathbf{k}^{c,\bar{K}}]$ ,  $[\mathbf{k}^{c,\bar{I}_t}]$ ,  $[\mathbf{k}^{c,\bar{I}_n}]$ ,  $[\mathbf{k}^{c,\bar{I}_b}]$ ,  $[\mathbf{k}^c]$ ,  $[\mathbf{k}^{c,\mathcal{Z}}]$ ,  $[\mathbf{k}^{c,\tau}]$  helis geometrisi ile kesit boyutlarındaki değişimleri barındırmaktadır. Burada kullanılan üst indisli (3.5) ve (3.6) ile ilişkili olup, eleman alt matrisi formülasyonu içine yerleştirilecek olan değişkenliklerden hangisinin yer aldığını işaret etmektedirler. Buna göre iki değişkenli alt matris terimleri,

$$\left. \begin{array}{l} k_{ii}^{c,d} = \frac{1}{60} \Delta\varphi [3c_i(4d_i + d_j) + c_j(3d_i + 2d_j)] \\ k_{ij}^{c,d} = k_{ji}^{c,d} = \frac{1}{60} \Delta\varphi [c_i(3d_i + 2d_j) + c_j(2d_i + 3d_j)] \\ k_{jj}^{c,d} = \frac{1}{60} \Delta\varphi [c_i(2d_i + 3d_j) + 3c_j(d_i + 4d_j)] \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

dir. Burada  $\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_i$  olup,  $\varphi_i$  ve  $\varphi_j$  elemanın  $i$  ve  $j$  düğüm noktalarındaki bilinen açı değerleridir. Tek değişkenli alt matris için, (3.9) de  $d_i = d_j = d$  yazılırsa, söz konusu terimler



$$\left. \begin{aligned} k_{ii}^c &= \frac{1}{12} d\Delta\varphi(3c_i + c_j) \\ k_{ij}^c &= k_{ji}^c = \frac{1}{12} d\Delta\varphi(c_i + c_j) \\ k_{jj}^c &= \frac{1}{12} d\Delta\varphi(c_i + 3c_j) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

şekline dönüşür. Değişken kesitli helis çubukta, eleman eksenı boyunca değışecek kesit özellikleri,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}(\varphi) &= A_i\psi_i + A_j\psi_j & , & \quad \tilde{I}_n(\varphi) = (I_n)_i\psi_i + (I_n)_j\psi_j \\ \tilde{I}_i(\varphi) &= (I_i)_i\psi_i + (I_i)_j\psi_j & , & \quad \tilde{I}_b(\varphi) = (I_b)_i\psi_i + (I_b)_j\psi_j \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

biçiminde ifade edilir. Her bir düğüm noktasında kesit alanı  $A_\beta$ ,  $(\beta = i, j)$  ve eksenlere göre eylemsizlik momentleri  $(I_i, I_n, I_b)_\beta$ ,  $(\beta = i, j)$  dir. Ayrıca yay uzunluğu (3.3) den yararlanılırsa, kütle matrisi

$$[\mathbf{m}^c] = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc|cccccc} [\mathbf{m}^{c,\tilde{A}}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & [\mathbf{m}^{c,\tilde{A}}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & [\mathbf{m}^{c,\tilde{A}}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & [\mathbf{m}^{c,\tilde{I}_i}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & [\mathbf{m}^{c,\tilde{I}_n}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & [\mathbf{m}^{c,\tilde{I}_b}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & & \mathbf{0} \end{array} \right] \end{array} \quad (3.12)$$

*simetrik*

elde edilir. Burada kullanılan alt kare matrisler  $2 \times 2$  boyutunda olup, burada  $\tilde{A}, \tilde{I}_i, \tilde{I}_n, \tilde{I}_b$  kesit geometrik özelliklerini,  $c$  ise eğriliği ifade etmektedir. Kütle alt matrisi terimleri, (3.9) daki gibi,

$$\left. \begin{aligned} m_{ii}^{c,d} &= \frac{1}{60} \rho \Delta \varphi [3c_i(4d_i + d_j) + c_2(3d_i + 2d_j)] \\ m_{ij}^{c,d} &= m_{ji}^{c,d} = \frac{1}{60} \rho \Delta \varphi [c_i(3d_i + 2d_j) + c_j(2d_i + 3d_j)] \\ m_{jj}^{c,d} &= \frac{1}{60} \rho \Delta \varphi [c_i(2d_i + 3d_j) + 3c_j(d_i + 4d_j)] \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

bağıntılarında elde edilir. Burada elemanın  $i$  ve  $j$  düğüm noktaları Şekil (2.1) de belirtildiği gibidir.

### 3.2 Sonlu Eleman Çözüm Yöntemi

Sonlu eleman yönteminde serbest titreşim problemi,

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}])\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.14)$$

biçiminde bir özdeğer problemine indirgenir. Burada  $\omega$  çubuğun açısız doğal frekansları,  $[\mathbf{K}]$  sistem matrisi,  $[\mathbf{M}]$  sistem kütle matrisi,  $\mathbf{w}(\mathbf{u}, \Omega)$  yer değiştirmeler ile dönmelerden oluşan bir kolon vektörüdür. Karışık sonlu elemanlar yönteminde (3.14) bağıntısı,

$$\left( \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] \\ [\mathbf{K}_{21}] & [\mathbf{K}_{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{m}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

biçimindedir. (3.15) de  $\{\mathbf{F}\}$  kuvvetler ile momentlere ait kolon vektördür. İndirgeme işlemi  $\{\mathbf{F}\}$  vektörüne uygulanırsa, indirgenmiş denklem takımı,

$$([\mathbf{K}^*] - \omega^2 [\mathbf{m}])\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.16)$$

haline dönüşür. Burada,

$$[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{K}_{22}] - [\mathbf{K}_{12}]^T [\mathbf{K}_{11}]^{-1} [\mathbf{K}_{12}] \quad (3.17)$$

olup,  $[\mathbf{K}^*]$  indirgenmiş sistem matrisidir. (3.16) bir özdeğer programı kullanılarak çözülür ve özdeğerler doğal açısız frekansları ve bunlara karşı gelen özvektörler ise mod şekillerini ifade eder.

### 4. ÖRNEKLER

Bu bölümde silindirik olmayan değişken kesitli helislerin serbest titreşimi için karışık SE yöntemine dayanan HL programından Omurtag ve Aköz [22] yararlanılmıştır. HL

programında kondensasyon (kuvvet türü büyüklüklerin deplasman türü büyüklükler üzerine indirgenmesi) sonrasında bilinmeyen sayısı her düğüm noktasında 6 deplasman bileşeninden oluşmaktadır

#### 4.1 Örnek-1: Sabit daire kesitli silindirik helis

HL programı ile bulunan sonuçları doğrulamak için literatürden seçilerek kullanılan bu örnekte dairesel kesitli silindirik helisin geometrisi ile malzeme özellikleri,

Geometrik Özellikler		Malzeme Özellikleri	
Tur sayısı ( $n$ )	: 7.6 tur	Elastisite modülü ( $E$ )	: $2.06 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
Kesit yarıçapı ( $r$ )	: 0.5 mm	Poisson oranı ( $\nu$ )	: 0.3
Helisin yarıçapı $R$	: 5 mm	Özkütle ( $\rho$ )	: 7900 kg/m <sup>3</sup>
Helisin eğimi ( $\alpha$ )	: 8.5744°		
Helisin yüksekliği ( $H$ )	: 0.036 m		

dir. Tablo 4.1 de silindirik helisin ilk altı moduna ait  $\omega_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) doğal açısal frekanslar,  $f_i = \omega_i / 2\pi$  bağıntısı kullanılarak doğal frekanslara çevrilerek, literatürdeki çeşitli araştırmalar ile karşılaştırılmış ve sonuçların oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. Bu problemde kullanılan sonlu eleman sayısı 100 dür. Elde edilen sonuçlar Mottershead [9] nin deney sonuçları ile karşılaştırıldığında ilk altı mod için rölatif farklılık 1. moddan başlamak üzere sırasıyla % 0.38, % 1.02, % 0.82, % 0.39, % 1.80 ve % 0.34 dür. Ortalama farklılığın % 0.80 den az olduğu görülmektedir. Görüldüğü gibi bu veriler diğer yöntemler ile elde edilen sonuçlara göre çok daha iyidir.

**Tablo 4.1 Silindirik helisin doğal frekansları ( $f_i = \omega_i / 2\pi$  Hz)**

Araştırmalar	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
HL	392.5	395.0	462.8	525.9	862.2	875.0
Mottershead, 1980 <sup>D</sup>	391.0	391.0	459.0	528.0	878.0	878.0
Mottershead, 1980 <sup>FEM</sup>	396.0	397.0	469.0	532.0	887.0	900.0
Pearson, 1982 <sup>TMM</sup>	394.9	397.6	456.4	518.3	859.7	874.7
Xiyong-Tabarrok, 1992 <sup>FEM</sup>	395.0	398.0	464.0	528.0	868.0	881.0
Yıldırım, 1996 <sup>TMM</sup>	393.5	395.9	462.8	525.5	864.0	876.8
Becker, 2002 <sup>TMM</sup>	393.5	396.1	462.8	525.7	863.8	876.9

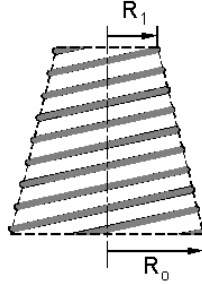
D: Deneysel, SEM: sonlu eleman metodu, TMM: taşıma matrisi metodu.

### Örnek-2: Sabit daire kesitli konik helis

Bu örnekte sabit daire kesitli ve geometrisi Şekil 4.1 de görülen konik helis için  $R_1$  tavan yarıçapının,  $R_0$  taban yarıçapı oranına bağlı olarak ilk 6 moduna ait serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Konik helisin uç noktaları ankastredir. Konik helisin herhangi bir noktasındaki yatay yarıçapı,

$$R = R_0 + \frac{(R_1 - R_0) \varphi}{2\pi n}$$

bağıntısına göre değişmektedir. Burada  $\varphi$  helisin yatay taban açısını ifade etmektedir.



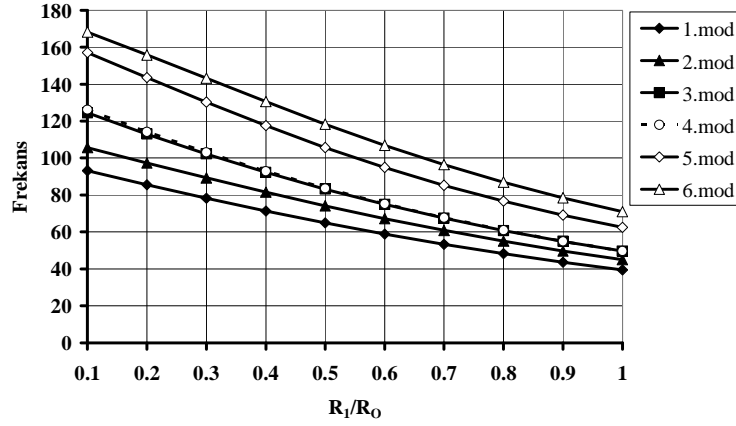
Şekil 4.1 Konik helis geometrisi

Konik helisin geometrisi ve malzeme özellikleri:

Geometrik Özellikler		Malzeme Özellikleri	
Tur sayısı ( $n$ )	: 6.5 tur	Elastisite modülü ( $E$ )	: $2.1 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
Kesit yarıçapı ( $r$ )	: 1 mm.	Poisson oranı ( $\nu$ )	: 0.3
Taban yarıçapı ( $R_0$ )	: 25 mm.	Özkütle ( $\rho$ )	: 7850 kg/m <sup>3</sup>
Tavan yarıçapı ( $R_1$ )	: Değişken		
Eğimi ( $\alpha$ )	: 4.8°		

dir. Şekil 4.2 de  $R_1 / R_0$  oranına bağlı olarak ilk altı moda ait frekans değerlerinin değişimi verilmektedir. Şekil 4.2 incelendiğinde  $R_1 / R_0$  oranı küçüldükçe frekans değerlerinin büyüdüğü görülmektedir. İlk altı mod için  $R_1 / R_0 = 0.8, 0.6, 0.4$  ve  $0.2$  değerlerine karşı gelen frekanslar, yarıçapı 25 mm olan silindirik helis için hesaplananlar ile karşılaştırıldığında, ortalama rölatif artma miktarı sırası ile %22.5, %50.66, %84.58 ve %123.43 değerlerini almaktadır (Bakınız Tablo 4.2-4.5). Sadece birinci mod değerlerinin verildiği Yıldırım [15] ile yapılan karşılaştırmalarda, sonuçların büyük bir uyum gösterdiği görülmektedir. İlk altı mod için, sonuçlar Yıldırım-İnce [13] ile karşılaştırılmış ve en büyük ve en küçük farklılıkların -%2.53 ile %1.00 arasında değiştiği görülmüştür. Doğrusal elemanların kullanıldığı SAP2000 [27] programında ise, gerçeğe yakın sonuçların elde edilebilmesi için helisin 1000 elemana kadar bölünmesi gerekmektedir. Şekil 4.3 de gözönüne

alınan eleman sayısına göre  $R_1/R_0 = 0.20$  olan konik heliste 1.mod periyodunun değişimi görülmektedir



Şekil 4.2 Örnek 2 için ilk altı moda ait frekansların  $R_1/R_0$  oranına göre değişimi

Tablo 4.2  $R_1/R_0 = 0.20$  olan sabit kesitli konik helisin serbest titreşim frekansları

Mod	Yıldırım (2002)	Yıldırım- İnce (1997)	Sap2000		HL			
			Eleman sayısı		Eleman sayısı			
			100	1000	100	75	50	30
1	108.18	110.64	109.53	108.26	108.20	108.17	107.99	102.18
2	–	115.19	114.86	112.59	112.53	112.52	112.45	106.60
3	–	135.91	134.99	132.84	132.66	132.42	130.81	115.32
4	–	143.77	142.42	140.41	140.22	139.94	138.14	118.94
5	–	196.92	196.27	192.85	192.67	192.56	191.76	174.91
6	–	204.30	203.04	200.23	200.01	199.87	198.94	182.39

Tablo 4.3  $R_1/R_0 = 0.40$  olan sabit kesitli konik helisin serbest titreşim frekansları

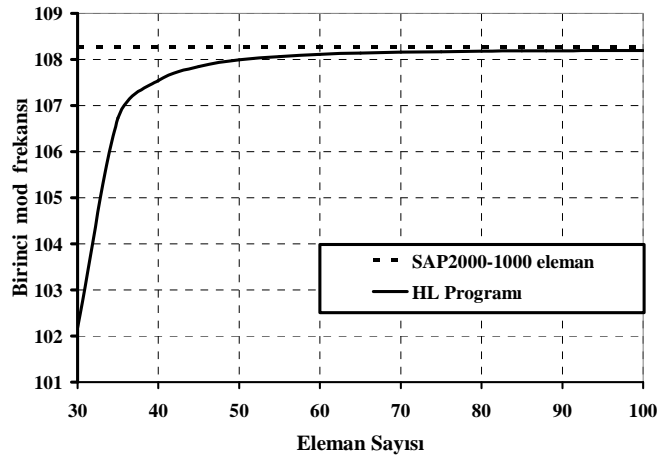
Mod	Yıldırım (2002)	Yıldırım İnce (1997)	Sap2000		HL			
			Eleman sayısı		Eleman sayısı			
			100	1000	100	75	50	30
1	87.39	88.84	89.40	87.42	87.39	87.38	87.31	82.74
2	–	91.82	91.67	90.42	90.38	90.37	90.23	84.08
3	–	107.52	108.00	105.80	105.70	105.47	104.03	90.27
4	–	111.52	111.58	109.72	109.60	109.38	107.95	94.86
5	–	163.01	163.95	160.55	160.46	160.39	159.88	146.09
6	–	170.96	171.25	168.40	168.28	168.18	167.59	152.46

Tablo 4.4  $R_1/R_0 = 0.60$  olan sabit kesitli konik helisin serbest titreşim frekansları

Mod	Yıldırım (2002) 100 eleman	Yıldırım İnce (1997)	Sap2000		HL			
			Eleman sayısı		Eleman sayısı			
			100	1000	100	75	50	30
1	68.52	69.21	70.42	68.54	68.52	68.51	68.49	65.93
2	–	74.44	74.79	73.75	73.72	73.70	73.56	67.03
3	–	85.24	86.51	84.41	84.32	84.12	82.87	70.56
4	–	87.43	88.24	86.58	86.49	86.32	85.22	76.38
5	–	131.98	134.17	130.73	130.69	130.66	130.47	121.01
6	–	138.69	139.73	137.42	137.32	137.22	136.62	124.38

Tablo 4.5  $R_1/R_0 = 0.80$  olan sabit kesitli konik helisin serbest titreşim frekansları

Mod	Yıldırım (2002) 100 eleman	Yıldırım İnce (1997)	Sap2000		HL			
			Eleman sayısı		Eleman sayısı			
			100	1000	100	75	50	30
1	54.39	54.64	56.05	54.41	54.39	54.39	54.38	52.69
2	–	60.33	61.07	60.08	60.06	60.04	59.92	54.09
3	–	68.21	69.88	67.92	67.84	67.67	66.60	56.10
4	–	69.57	70.72	69.27	69.20	69.07	68.23	61.86
5	–	106.22	108.88	105.77	105.74	105.73	105.64	99.54
6	–	112.44	114.07	111.99	111.91	111.83	111.32	100.78



Şekil 4.3  $R_1/R_0 = 0.20$  için sabit kesitli konik heliste eleman sayısına göre 1.mod frekansının değişimi(Örnek2)

#### 4.2 Örnek-3: Değişken daire kesitli konik helis

Bu örnekte değişken daire kesitli ve geometrisi Şekil 4.1’de tanımlanan konik helisin serbest titreşim problemi, taban yarıçapı  $R_0$  ve tavan yarıçapı  $R_1$  nin değişik oranları için incelenmiştir. İki ucu ankastre mesnetli olan konik helisin geometrik ve malzeme özellikleri

<b>Geometrik Özellikler</b>		<b>Malzeme Özellikleri</b>	
Tur sayısı ( $n$ )	: 6.5 tur	Elas. modülü ( $E$ )	: $2.1 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
Kesit yarıçapı (alt uçta) $d_1$	: 1 mm.	Poisson oranı ( $\nu$ )	: 0.3
Kesit yarıçapı (ortada) $d_2$	: $\beta d_1$	Özkütle ( $\rho$ )	: 7850 kg/m <sup>3</sup>
Kesit yarıçapı (üst uçta) $d_3$	: 1 mm		
Taban yarıçapı ( $R_0$ )	: 25 mm.		
Tavan yarıçapı ( $R_1$ )	: değişken		
Eğimi ( $\alpha$ )	: $4.8^\circ$		

olarak verilmektedir. Konik helisin daire kesitinin yarıçapı başlangıç noktasından helis yüksekliğinin orta noktasına kadar doğrusal olarak azalmakta, bu noktadan sonra bitiş noktasına kadar tekrar doğrusal olarak artmaktadır. Başlangıç ve bitiş noktalarında daire enkesitin yarıçapları  $d_1 = d_3 = 1$  mm dir, konik helisin orta noktasındaki yarıçapı ise  $d_2 = \beta d_1$  dir. Tablo (4.6) da tavan yarıçapının taban yarıçapına oranı  $R_1 / R_0 = 0.2$  olan konik helisin, değişken daire kesit durumu için ilk altı moduna ait frekansları SAP2000 programı ile karşılaştırılarak doğrulama yapılmıştır. Doğrusal elemanların kullanıldığı SAP2000 çözümlerinde helisin 1000 elemana bölünmesi elde edilen sayısal sonuçların, 50 elemanlı (294 bilinmeyen) HL programı ile bulunan sonuçlarla yeterli yakınsaklığı sağladığı görülmektedir.  $R_1 / R_0 = 0.4, 0.6$  ve  $0.80$  oranları için ilk altı moda ait frekanslar sadece HL programı ile hesaplanmış ve sonuçlar Tablo (4.7)-Tablo (4.9) verilmiştir. İlk altı mod için, değişken daire kesitin  $\beta=1, 0.75, 0.5, 0.25$  oranları ile konik helisin  $R_1 / R_0 = 0.4, 0.6$  ve  $0.80$  oranlarına karşı gelen frekansların değişimi grafik olarak Şekil 4.4 (a), (b),..., (f) de çizilmiştir. Burada  $R_1 / R_0$  oranı büyüdükçe ve  $\beta$  değeri küçüldükçe frekansların azaldığı görülmektedir. Tablo 4.10 da sabit daire kesitli ( $\beta=1.00$ ) konik helisin  $R_1 / R_0$  oranlarına bağlı olarak hesaplanan birinci mod doğal frekansları,  $\beta= 0.75, 0.50$  ve  $0.25$  için hesaplanan frekanslar ile karşılaştırılarak aralarındaki değişim % biçiminde ifade edilmiştir.

Tablo 4.6  $R_1/R_0 = 0.20$  için değişken kesitli konik helisin serbest titreşim frekansları

$\beta$	Mod	Sap2000		HL			
		Eleman sayısı		Eleman sayısı			
		100	1000	100	75	50	30
0.75	1	100.33	98.10	98.11	98.11	98.08	96.54
	2	105.55	104.30	104.34	104.32	104.20	98.65
	3	127.46	125.31	125.30	125.06	123.48	105.11
	4	131.02	129.03	129.03	128.77	127.09	109.41
	5	174.04	170.62	170.56	170.49	170.04	158.48
	6	182.77	179.80	179.68	179.57	178.89	165.30
0.50	1	87.74	85.56	85.54	85.53	85.48	84.82
	2	98.55	97.36	97.34	97.32	97.22	91.62
	3	115.00	113.07	113.01	112.78	111.31	93.61
	4	116.08	114.26	114.21	113.97	112.49	98.62
	5	146.79	143.63	143.57	143.55	143.43	140.92
	6	158.38	155.96	155.82	155.72	155.08	143.39
0.25	1	72.97	71.11	71.07	71.03	70.92	70.50
	2	85.34	84.39	84.35	84.30	84.16	78.10
	3	95.61	93.89	93.79	93.58	92.41	78.31
	4	95.98	94.30	94.20	93.98	92.80	83.93
	5	106.81	104.67	104.66	104.60	104.38	103.11
	6	120.57	119.20	119.15	119.08	118.85	111.64

Tablo 4.7  $R_1/R_0 = 0.40$  için değişken kesitli konik helisin serbest titreşim frekansları

$\beta$	Mod	HL			
		Eleman Sayısı			
		100	75	50	30
0.75	1	80.03	80.03	80.01	78.52
	2	87.27	87.25	87.15	80.31
	3	100.72	100.51	99.12	83.60
	4	102.53	102.31	100.92	89.27
	5	141.72	141.70	141.60	134.89
	6	151.37	151.27	150.61	138.88
0.50	1	71.38	71.37	71.33	70.83
	2	81.51	81.49	81.43	74.85
	3	92.29	92.08	90.81	75.72
	4	92.89	92.69	91.41	81.84
	5	117.54	117.53	117.46	116.77
	6	130.56	130.51	130.23	120.21
0.25	1	58.45	58.42	58.33	58.03
	2	68.14	68.11	68.01	64.11
	3	77.17	77.00	76.02	64.20
	4	77.45	77.27	76.29	67.78
	5	84.57	84.53	84.39	83.69
	6	96.73	96.68	96.48	90.22



Tablo 4.8  $R_1/R_0 = 0.60$  için değişken kesitli konik helisin serbest titreşim frekansları

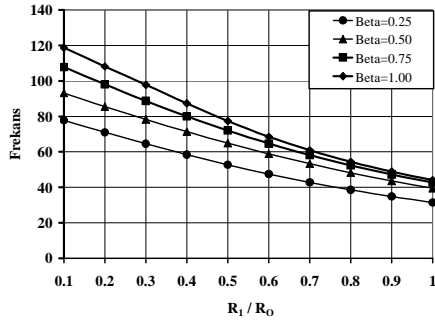
$\beta$	Mod	HL			
		Eleman sayısı			
		100	75	50	30
0.75	1	64.71	64.71	64.70	63.46
	2	72.06	72.06	71.96	64.59
	3	80.75	80.75	79.39	66.49
	4	81.64	81.64	80.35	73.03
	5	114.19	114.19	114.15	111.94
	6	124.94	124.94	124.43	113.28
0.50	1	58.89	58.89	58.86	58.51
	2	67.24	67.23	67.18	60.62
	3	74.93	74.75	73.68	61.04
	4	75.20	75.03	73.96	67.31
	5	94.94	94.93	94.89	94.54
	6	106.92	106.90	106.78	99.24
0.25	1	47.53	47.51	47.45	47.22
	2	54.76	54.74	54.66	52.18
	3	62.71	62.58	61.83	52.22
	4	63.07	62.93	62.12	54.46
	5	68.82	68.77	68.63	67.83
	6	78.16	78.12	77.97	72.55

Tablo 4.9  $R_1/R_0 = 0.80$  için değişken kesitli konik helisin serbest titreşim frekansları

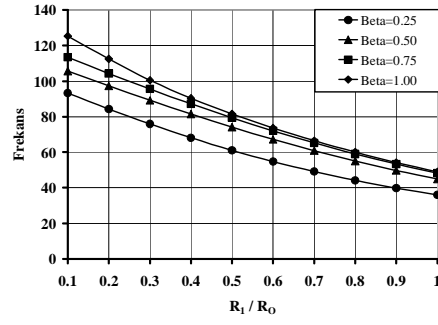
$\beta$	Mod	HL			
		Eleman sayısı			
		100	75	50	30
0.75	1	52.37	52.37	52.36	51.38
	2	59.00	58.99	58.91	52.12
	3	65.10	64.94	63.95	53.33
	4	65.58	65.44	64.56	59.61
	5	91.88	91.88	91.86	90.78
	6	101.99	101.95	101.65	92.57
0.50	1	48.23	48.22	48.20	48.00
	2	55.01	54.99	54.96	49.11
	3	60.83	60.68	59.79	49.32
	4	60.93	60.79	59.91	55.00
	5	76.71	76.70	76.67	76.45
	6	86.98	86.96	86.89	81.01
0.25	1	38.57	38.56	38.51	38.35
	2	44.18	44.16	44.11	42.38
	3	50.86	50.76	50.17	42.40
	4	51.22	51.10	50.45	43.95
	5	56.08	56.04	55.89	54.91
	6	63.14	63.10	62.87	58.57

Tablo 4.10  $\beta= 0.75, 0.50$  ve  $0.25$  değerlerine karşı gelen frekansların  $\beta=1.00$  için elde edilen frekanslar ile karşılaştırılması

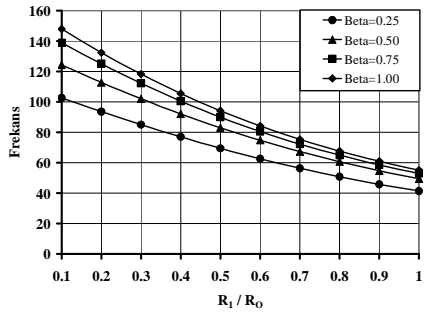
$R_1/R_0$	Birinci mod frekansları				(%) farklılık		
	$\beta=1.00$	$\beta=0.75$	$\beta=0.50$	$\beta=0.25$	(B-A)/A	(C-A)/A	(D-A)/A
	A	B	C	D			
0.1	118.82	107.89	93.18	77.79	-9.20	-21.58	-34.53
0.2	108.17	98.11	85.53	71.03	-9.30	-20.93	-34.33
0.3	97.87	88.77	78.25	64.54	-9.30	-20.05	-34.05
0.4	87.38	80.03	71.37	58.42	-8.41	-18.32	-33.15
0.5	77.37	71.99	64.91	52.72	-6.95	-16.11	-31.85
0.6	68.52	64.71	58.89	47.51	-5.55	-14.05	-30.66
0.7	60.89	58.18	53.32	42.79	-4.45	-12.44	-29.73
0.8	54.39	52.37	48.22	38.56	-3.71	-11.34	-29.11
0.9	48.84	47.22	43.59	34.79	-3.31	-10.74	-28.77
1.0	44.08	42.68	39.43	31.44	-3.19	-10.57	-28.67
Ortalama (%) farklılık =					-6.34	-15.61	-31.49



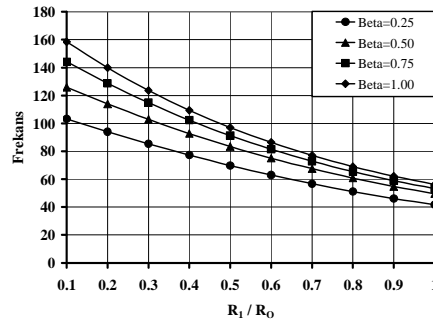
(a)



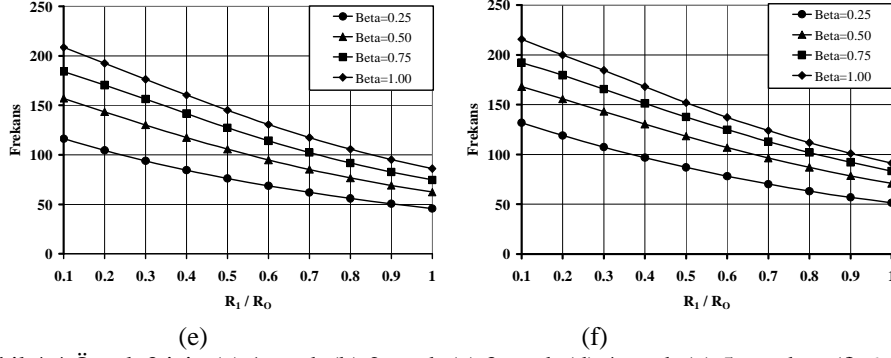
(b)



(c)



(d)



Şekil 4.4 Örnek 3 için (a) 1.mod, (b) 2.mod, (c) 3.mod, (d) 4.mod, (e) 5. mod ve (f) 6.mod frekanslarının  $R_1/R_0$  oranına göre değişimi

## 5. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada, Omurtag ve Aköz [22] de eğrisel uzay çubukların statik hesabı için verilmiş olan karışık sonlu eleman formülasyonu, değişken kesitli silindirik ve konik helislerin serbest titreşim problemini çözecek şekilde geliştirilmiştir. Bu amaçla Olca [26] da elde edilen yayılı kütle matrisinden yararlanılmıştır. Eğrisel uzay çubukların eleman matrisleri, Timoshenko çubuk varsayımına göre elde edildiğinden nispeten kalın helisel çubuklara da uygulanabilmektedir. Ayrıca karışık sonlu eleman formülasyonu kullanıldığı için elemanda kayma kilitlenmesi problemi bulunmamaktadır. Daha hassas sonuçların elde edilebilmesi için, topak kütle (lumped mass) matrisi yerine yayılı kütle matrisi (consistent mass) yöntemi kullanılmıştır. Gerek eleman ve gerekse kütle matrisleri, değişken kesit özelliklerini de gözeterek biçimde geliştirilmiştir. Bu çalışmada kullanılan sonlu eleman matrisi, silindirik helis çubuk için geliştirilmiş olup, konik helis için eğriliklerdeki değişimler, şekil fonksiyonları yardımıyla gözönüne alınmıştır.

HL programıyla elde edilen sayısal sonuçlar, literatürde mevcut olan deneysel ve sayısal çalışmaların yanı sıra SAP2000 programı ile de karşılaştırılmış ve sonuçların uyum içinde olduğu görülmüştür. Bu çalışmada, silindirik helisten uyarlanan ve yaklaşık konik geometri için geliştirilen karışık sonlu eleman ile hesaplanan frekanslar, literatürde kesin geometrinin gözönüne alındığı yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar ile elde edilen frekanslar ile karşılaştırılmış, aynı sayıda eleman kullanılarak benzer sonuçlara ulaşılabildiği görülmüştür.

Ayrıca, serbest titreşim analizinde geliştirilen karışık S.E. yöntemi, doğru eksensel elemanların kullanıldığı yapı analizi paket programlarına göre çok daha az sayıda eleman kullanılması ile gerçeğe yakın frekansların elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Tablo 4.2-Tablo 4.5 de verilen SAP2000 (1000 eleman) ve HL programı ile elde edilen ilk altı moda ait serbest titreşim modlarına karşı gelen frekanslar ile karşılaştırılmıştır. Burada rölatif farklılık  $(SAP2000-HL)/SAP2000 \times 100$  olarak gözönüne alınacaktır.  $R_1/R_0=0.20$  olan konik heliste HL programında 100, 75, 50 ve 30 elemanın kullanıldığı çözümler için hesaplanan rölatif farklılıklar sırasıyla % 0.10, % 0.19, % 0.79 ve % 9.60 dır. Benzer

şekilde  $R_1/R_0$  oranının 0.80 olduğu konik heliste ise, HL programında 100, 75, 50 ve 30 elemanın kullanıldığı çözümler için hesaplanan rölatif farklılıklar sırasıyla % 0.06, % 0.16, % 0.75 ve % 9.52 olduğu görülmüştür. Elde edilen sayısal sonuçlara göre, konik helisin karışık S.E. yöntemi ile serbest titreşim analizinde 50 elemana bölünmesi (kondensasyon sonrası toplam bilinmeyen sayısı=294) mühendislik uygulamaları açısından yeterli düzeyde olduğu sonucuna varılmıştır.

### TEŞEKKÜR

Yazarlar bu araştırmayı destekleyen İTÜ Bilimsel Araştırma ve Geliştirme Destekleme Programı'na teşekkür ederler. Proje No: 11\_05\_105.

### KAYNAKLAR

- [1] **Epstein, I.**, "The motion of conical coil springs", *Journal of Applied Physics*, **18**, s. 368-374, 1947.
- [2] **Pearson, D., Wittrick, W.H.**, "An exact solution for the vibration of helical springs using a Bernoulli-Euler model", *International Journal of Mechanical Sciences*, **28**, s. 83-96, 1986.
- [3] **Holmes, A.M.C.**, "Analysis of helical beams under symmetric loading", *Journal of Structural Division ASCE*, **83/6**, s. 1-37, 1957.
- [4] **Scordelis, A.C.**, "Internal forces in uniformly loaded helicoidal girders.", *Journal of American Concrete Institute*, **56**, s. 1013-1026, 1960.
- [5] **Cinemre, V.**, "Başlangıç değerleri metodu ile helisel çubukların statik hesabı". *Doktora Tezi İ.T.Ü.*, 1960
- [6] **Pearson, D.**, "The transfer matrix method for the vibration of compressed helical springs.", *Journal of Mechanical Engineering Science*, **24**, s. 163-171, 1982.
- [7] **Haktanır, V. ve Kırıl, E.**, "Helisel çubukların statik davranışının rijitlik matrisi metodu ile incelenmesi.", *Çukurova Üniversitesi Müh. Mim. Fak. Dergisi*, Adana, 1989.
- [8] **Abdülbaki, A. ve Shukair, A.**, "Continuous helical girders", *Journal of Construction Engineering and Management*, **99/ST 10**, 1973.
- [9] **Mottershead J.E.**, "Finite elements for dynamical analysis of helical rods", *International Journal of Mechanical Sciences*, **22**, s. 267-283, 1980.
- [10] **Haktanır, V. ve Kırıl, E.**, "Helis eksenli merdivenlerin bilgisayarda dinamik hesabı", *İnşaat Mühendisliğinde Bilgisayar Kullanımı İkinci Sempozyumu*, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, 1990.
- [11] **Nagaya K., Takeda S. ve Nakata Y.**, "Free vibration of coil springs of arbitrary shape", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **23**, s. 1081-1099, 1986.
- [12] **Yıldırım, V.**, "Investigation of parameters affecting free vibration frequency of helical springs", *Journal of Numerical Methods in Engineering*, **39**, s. 99-114, 1996.
- [13] **Yıldırım, V. ve İnce, N.**, "Natural frequencies of helical springs of arbitrary shape", *Journal of Sound and Vibration*, **204(2)**, s. 311-329, 1997.

- [14] **Yıldırım, V. ve Sancaktar, E.**, “Lineer free vibration analysis of cross-ply laminated cylindrical helical springs”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **42**, s. 1153-1169, 2000.
- [15] **Yıldırım, V.**, “Expressions for predicting fundamental natural frequencies of non-cylindrical helical springs”, *Journal of Sound and Vibration*, **252**, (3), s. 479-491, 2002.
- [16] **Becker, L.E. ve Chassie, G.G. ve Cleghorn, W.L.**, “On the natural frequencies of helical compression springs”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **44**, s. 825-841, 2002.
- [17] **Busool, W., Eisenberger, M.**, “Free vibration of helicoidal beams of arbitrary shape and variable cross section”, *Journal of Vibration and Acoustics*, **124**, ASME, s. 397-409, 2002.
- [18] **Yıldırım, V.**, “A parametric study on the natural frequencies of unidirectional composite conical springs.”, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, **20**, 207-227, 2004.
- [19] **Guido, A.R., Pietra, L.D., Valle, S.D.**, “Transverse vibrations of cylindrical helical springs”, *Meccanica* **13**, 90-108, 1978.
- [20] **Jiang, W., Jones, W.K., Wang, T.L., ve Wu, K.H.**, “Free vibrations of helical springs”, *Int. J. of Mechanical Sciences*, **58**, 222-228, 1991.
- [21] **Aköz, A.Y., Omurtag, M.H., ve Doğruoğlu, A.N.**, “The Mixed Finite Element Formulation for Three Dimensional Bars”, *International Journal of Solids Structures*, **28**, 225-234, 1991.
- [22] **Omurtag, M.H. ve Aköz, A.Y.**, “The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading”, *Computers & Structures*, **43**, 325-331, 1992.
- [23] **Timoshenko, S.P.**, “On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars”, *Philosophical Magazine*, **41**, 744-746, 1921.
- [24] **İnan, M.**, “*Elastik çubukların genel teorisi*”, İ.T.Ü. yayını, 1966.
- [25] **Omurtag, M.H. ve Özütok, A. Aköz, A.Y., ve Özçelikörs, Y.**, “Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gateaux differential”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **40**, 295-317, 1997.
- [26] **Olgun, O.**, “*Helisel çubuklarda statik ve dinamik problemlerin karışık sonlu elemanlar metodu ile incelenmesi*”, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2004.
- [27] **SAP2000**, Structural analysis program, CSI, Berkeley, USA.