Necmettin Erbakan Üniversitesi
Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Journal of Science and Engineering (NEJSE)
DOI: https://dx.doi.org/10.47112/neufmbd.2020.3

Cilt: 2 Sayı:2 Yıl: 2020 Araştırma Makelesi / Research Article E-ISSN: 2667- 7989

Pseudo 2- Çaprazlanmış Modüller ve Pseudo 3- Çaprazlanmış Modüller

Sedat PAK[1] **Özgün GÜRMEN ALANSAL** [2] **Uğur CESUR** [3]

[1] Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bölümü, Ahmet Keleşoğlu Yerleşkesi, A Blok, Oda No: 110, Meram, Konya, Türkiye *(Sorumlu Yazar/Corresponding Author)*
[2] Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kütahya, Türkiye
[3]Milli Eğitim Bakanlığı, 42140, Meram, Konya, Turkey

Makale Bilgileri

Makale Geçmişi
Geliş: 13.11.2020
Kabul: 18.12.2020
Yayın: 31.12.2020

Anahtar Kelimeler:
Çaprazlanmış Modül, Homotopi, Moore kompleks, Pseudosimplisel grup.

ÖZET

Homotopi 2 – tiplerinin cebirsel modelleri üzerindeki çalışmasında J.H.L.Whitehead [1], çaprazlanmış modül kavramını ilk olarak gruplar üzerine tanımlamış, sonrasında ise çaprazlanmış modül cebirler üzerinde T. Porter [2] tarafından tanımlanmıştır, ayrıntılı bilgi için [3,4,5] bakılabilir. Conduché [6] ise 3 - tip homotopi modeli olarak 2-çaprazlanmış model kavramını tanımlamıştır. Carrasco-Cegarra [7], hiper çaprazlanmış kompleks kavramını tanımlamış ve hiper çaprazlanmış kompleksler kategorisinin simplisel gruplar kategorisine denk olduğunu göstermiştir. Mutlu – Porter [8], simplisel gruplarda Peiffer çiftlerinden faydalanmışlardır. Daha sonra 3 - çaprazlanmış modül yapısı, Arvasi, Kuzpınarı ve Uslu [9] tarafından tanımlanmıştır. Inassaridze [10], pseudosimplisel grup yapısını tanımlamış, Akça ve Pak [11] pseudo 2- çaprazlanmış modülü tanımlamıştır. Bu çalışmada pseudo 3–çaprazlanmış modül kavramını tanımlanarak, Arvasi , Kuzpınarı ve Uslu [9] tarafından tanımlanan 3-çaprazlanmış modüller ile arasındaki ilişki incelenmiştir ve pseudo 3-çaprazlanmış modüller kategorisi ile 3-çaprazlanmış modüller kategorisinin denkliği elde edilmiştir [12].

Pseudo 2- Crossed Modules and Pseudo 3- Crossed Modules

Article Info

Article History
Received: 13.11.2020
Accepted: 18.12.2020
Published: 31.12.2020

Keywords:
Crossed Module, Homotopy, Moore complex, Pseudosimplical group.

ABSTRACT

J.H.L.Whitehead [1] first defined the concept of crossed modules on groups in his work on algebraic models of Homotopy 2 -types, and then T. Porter [2] defined this concept on algebras. For detailed information, see [3,4,5]. Conduché [6] defined the concept of 2-crossed model as a 3-type homotopy model. Carrasco Cegarra [7] defined the concept of hypercrossed complexes and showed that the category of hypercrossed complexes corresponds to the category of simplical groups. Mutlu –Porter [8] made use of piffer pairs in simplical groups. Later, Arvasi, Kuzpınarı and Uslu [9] defined a 3-crossed module structure. Inassaridze [10] defined the pseudosimplisel group structure. Akça and Pak [11] defined the pseudo 2-crossed module. In this study, the relationship between 3-crossed modules defined by Arvasi, Kuzpınarı and Uslu [9] was investigated by defining the concept of pseudo 3-crossed modules, and the equivalence of the category of pseudo 3-crossed modules and the category of 3-crossed modules was obtained [12].

Atıf/Citation: Pak, S.; Gürmen Alansal, Ö.; Cesur, U. (2020). Pseudo 2- Çaprazlanmış Modüller ve Pseudo 3- Çaprazlanmış Modüller, *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, *2*(2), 22-37.

“This article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)”

GİRİŞ (INTRODUCTION)

1.1. Pseudosimplisel Gruplar (Pseudosimplicial Groups)

Boştan farklı bir G grubu üzerinde tanımlanan yüz homomorfizmleri $\partial_i^n : G_n \to G_{n-1}$, $0 \le i \le n$, $n \neq 0$ ve $s_i^n : G_n \to G_{n+1}$, $0 \le i \le n$ pseudo dejenere operatörleri ile birlikte $\{G_n\}$'den oluşan pseudosimlisel grup yapısı, aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\partial_i^{n-1}\partial_j^n = \partial_{j-1}^{n-1}\partial_i^n, \quad i < j$$

$$\partial_i^{n+1}s_j^n = s_{j-1}^{n-1}\partial_i^n, \quad i < j$$

$$\partial_i^{n+1}s_j^n = 1 = \partial_{i+1}^{n+1}s_j^n$$

$$\partial_i^{n+1}s_j^n = s_j^{n-1}\partial_{i-1}^n, \quad i > j+1$$

Bu şartlara,

$$s_i^{n+1}s_j^n = s_{j+1}^{n+1}s_i^n \quad i \le j$$

şartını da dahil edersek, simplisel grupları elde ederiz. Doğal olarak, her simplisel grup bir pseudosimplisel gruptur. Bunun tersi daima doğru değildir [10].

1.2. Moore Kompleks (The Moore Complex)

Bir **G** pseudosimplisel grubu için,

$$(NG_n) = \bigcap_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ker} d_i^n$$

olmak üzere,

$$(NG, \partial) : \cdots \longrightarrow NG_1 \xrightarrow{d_2} NG_1 \xrightarrow{d_1} NG_0$$

biçimindeki zincir kompleksine **G** nin Moore Kompleksi denir ve $\boldsymbol{(NG, \partial)}$ ile gösterilir. **G** pseudosimplisel grubunun $\boldsymbol{n}$. Homotopi modülü $\boldsymbol{\pi_n(G)}$,

$$\pi_n(G) \cong H_n(NG, \partial) = \frac{\bigcap_{i=0}^{n} Kerd_i^n}{d_{n+1}^{n+1}\left(\bigcap_{i=0}^{n} Kerd_i^{n+1}\right)}$$

$$= \frac{NG_n \cap Kerd_n^n}{d_{n+1}^{n+1}(NG_{n+1})}$$

olarak tanımlanır ve bu **G** nin Moore kompleksinin n. homolojisine denktir. $n > k$ için G_n pseudosimplisel grubu sıfır grubu ise bu gruba $k - truncated$ pseudosimplisel grup denir. Bir $k - truncated$ pseudosimplisel grup $tr_k G$ ile gösterilir ve truncation funktoru,

$$tr_k : PseudosimpGrp \to Tr_k PseudosimpGrp$$

dır. Bu funktorun sağ adjoint funktoru ile $k - coskeleletonu$,

$$Cosk_k : Tr_k PseudosimpGrp \to PseudosimpGrp$$

ve sol adjoint funktoru ile $k - skeletonu$,

$$sk_k : Tr_k PseudosimpGrp \rightarrow PseudosimpGrp$$

vardır.

1.3. Tanım ve Notasyonlar (Definitions and Notations)

Bir, $[n] = \{0 < 1 < 2 < \cdots < n\}$ sıralı kümesi için

$\delta_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$, $0 \leq i \leq n$ ve $\alpha_i^n : [n+1] \rightarrow [n]$, $0 \leq j \leq n$ dönüşümleri,

$$\delta_i^n(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < i \\ x+1 & ; \quad x \geq i \end{cases}$$

ve

$$\alpha_i^n(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \leq j \\ x-1 & ; \quad x > j \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $0 \leq r \leq n$ için $f : [n] \rightarrow [n-r]$ şeklindeki f operatörlerinin kümesi $S(n, n-r)$ olsun. Bu kümenin elemanları arasındaki bileşke işleminden faydalanarak, pseudosimplisel özdeşlikler elde edilir.

$j < i$ için $\alpha_j \alpha_i = \alpha_{i-1} \alpha_j$ dir. Burada , α_j, α_i lerin bileşkesi f yi verir.

$$f = \alpha_{i_1} o \alpha_{i_2} o \cdots o \alpha_{i_r}$$

olup $f \in S(n, n-r)$ dir. Böylece $S(n, n-r)$ nin bir elemanı,

$$\{\mathrm{i}_1, \cdots, \mathrm{i}_\mathrm{r}\} \; ; \; 0 \leq \mathrm{i}_1 < \mathrm{i}_2 < \cdots < \mathrm{i}_\mathrm{r} \leq \mathrm{n} - 1$$

ile belirlenir. Burada $[n]$ nin elemanları $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n-1$ formundaki elemanlardır ve $\{i_1, \cdots, i_r\} = \{i : f(i) = f(i+1)\}$ dir. Dolayısıyla; $S(n, n)$ nin tek elemanı özdeşlik dönüşümüdür ve *( )* ile veya $\emptyset_n$ ile gösterilir. $S(n, 0)$ ın da tek elemanı $(n-1, n-2, \cdots, 0)$ dır. $n \geq 0$ için

$$S(n) = \bigcup_{0 \leq r \leq n} S(n, n-r)$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha, \beta \in S(n)$ ve $\alpha = \{i_r, \cdots, i_1\}$ ve $\beta = \{j_s, \cdots, j_1\}$ olsun. $\alpha < \beta$ için, $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \cdots, i_k = j_k$, iken $i_{k+1} = j_{k+1}$. $r < s$ için $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \cdots, i_r = j_r$ olmalıdır. Bu şekilde bir sıralama $S(n)$ kümesini bir sıralı küme yapar. Örneğin

$$S(2) = \{\emptyset_2 < (1) < (0) < (1{,}0)\}$$

$$S(3) = \{\emptyset_3 < (2) < (1) < (2{,}1) < (0) < (2{,}0) < (1{,}0) < (2{,}1{,}0)\}$$

$$S(4) = \{\emptyset_4 < (3) < (2) < (3{,}2) < (1) < (3{,}1) < (2{,}1) < (3{,}2{,}1) < (0) < (3{,}0) < (2{,}0) < (3{,}2{,}0) < (1{,}0) < (3{,}1{,}0) < (2{,}1{,}0) < (3{,}2{,}1{,}0)\}$$

dir.

1.4. Pseudosimplisel Grubun Yarı Direkt Ayrışması (The Semidirect Decomposition of a Pseudosimplicial Group)

1.4.1. ***Tanım (Definition)*** G bir grup, $n \geq 2$ için, $G_1, G_2, \cdots, G_n$ ler G nin alt grupları olsun. Eğer

i) Her $1 \leq s \leq n$ için $G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots \cdot G_s$, G nin bir alt grubu,
ii) $G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots \cdot G_n = G$,
iii) $1 \leq s < t \leq n$ için $(G_1 \cdot G_2 \cdot \cdots \cdot G_s) \cap G_t = 1$

şartları sağlanıyorsa G ye $G_1, G_2, \cdots, G_n$ lerin n –yarıdirekt çarpımı denir. Bu durum

$$G = G_1 \rtimes G_2 \rtimes \cdots \rtimes G_n$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda $g \in G$ elemanı $g_i \in G_i$ olmak üzere

$$g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_n$$

şeklinde tek bir biçimde yazılıma sahiptir.

1.4.2. ***Tanım (Definition)*** G bir pseudosimplisel grup olsun. Herhangi $n \geq 0$ için G_n grubu,

$$G_n \cong (\cdots(NG_n \rtimes s_{n-1}NG_{n-1}) \rtimes \cdots \rtimes s_{n-2} \cdots s_0 NG_1) \rtimes (\cdots(s_{n-2}NG_{n-1} \rtimes s_{n-1}s_{n-2}NG_{n-2}) \rtimes \cdots \rtimes s_{n-1}s_{n-2} \cdots s_0\, NG_0)$$

olarak yazılabilir. Bu yazılıma G_n nin yarı direkt ayrışımı denir.

1.4.3. ***Teorem (Theorem)*** G, bir pseudosimplisel grup olmak üzere G_n nin yarı direkt ayrışımı;

$$G_n \cong Kerd_n^n \rtimes s_{n-1}^{n-1}(G_{n-1})$$

şeklindedir. Buna göre özel olarak

$$G_1 \cong NG_1 \rtimes s_0 NG_0$$

$$G_2 \cong (NG_2 \rtimes s_1 NG_1) \rtimes (s_0 NG_1 \rtimes s_1 s_0 NG_0)$$

$$G_3 \cong (NG_3 \rtimes s_2 NG_2) \rtimes (s_1 NG_2 \rtimes s_2 s_1 NG_1) \rtimes ((s_0 NG_2 \rtimes s_2 s_0 NG_1) \rtimes (s_1 s_0 NG_1 \rtimes s_2 s_1 s_0 NG_0)).$$

$$G_4 \cong (((NG_4 \rtimes s_3 NG_3) \rtimes (s_2 NG_3 \rtimes s_3 s_2 NG_2)) \rtimes ((s_1 NG_3 \rtimes s_3 s_1 NG_2) \rtimes (s_2 s_1 NG_2 \rtimes s_3 s_2 s_1 NG_1))) \rtimes s_0(G_3 in\ bir\ ayrışımı)$$

olur.

$\alpha = (i_l, \cdots i_1) \in S(n)$ için karşılık gelen terim,

$$s_\alpha(NG_{n-\#\alpha}) = s_{i_l \cdots i_1}(NG_{n-\#\alpha}) = s_{i_l \cdots i_1}(NG_{n-\#\alpha})$$

dir. Ayrıca burada $\#\alpha = l$ dir.

Böylece herhangi bir $x \in G_n$, $y \in NG_n$ ve $x_\alpha \in NG_{n-\#\alpha}$ için

$$x = y \prod_{\alpha \in S(n)} s_\alpha(x_\alpha)$$

şeklinde ifade edilir.

1.5. Hiperçaprazlanmış Kompleks Çiftleri (Hypercrossed Complex Pairings)

Hiperçaprazlanmış kompleks çiftleri ile ilgili temel fikir Carrasco ve Cegarra [7,13] çalışmalarında karşımıza çıkmıştır. Mutlu ve Porter [8] çalışmalarında Conduché [6], çalışmalarından faydalanarak, hiperçaprazlanmış kompleks çiftlerini oluşturmuşlardır. Hiper çaprazlanmış kompleks çiftleri ile ilgili ayrıntılı bilgi için Mutlu ve Porter [8] ve Carrasco ve Cegarra [7,13] çalışmalarına bakılabilir. $\alpha, \beta \in S(n)$ ve $\alpha = (i_r, \cdots, i_1)$, $\beta = (j_s, \cdots, j_1)$ için $\alpha \cap \beta = \emptyset$ olmak üzere, (α, β) şeklindeki ikililerin kümesini $P(n)$ ile gösterelim. Ayrıca $\#\alpha$, $\#\beta$ sırasıyla α ve β nın eleman sayılarını göstersin.

$$F_{\alpha,\beta} = NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\#\beta} \to NG_n$$

dönüşümü, aşağıdaki değişmeli diyagramdan elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\#\alpha} \arrow[r, "F_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "s_\alpha \times s_\beta"'] & NG_n \arrow[d, "p"] \\
G_n \times G_n \arrow[r, "\mu"'] & G_n
\end{tikzcd}$$

Burada $F_{\alpha,\beta} = p\mu s_\alpha \times s_\beta$ formunda olup:

$$s_\alpha = s_{i_r}, \cdots s_{i_1} : NG_{n-\#\alpha} \to G_n$$

$$s_\beta = s_{j_s}, \cdots s_{j_1} : NG_{n-\#\beta} \to G_n$$

biçiminde gösterilir.

$$\begin{aligned} \mu : G_n \times G_n &\to G_n \\ x \times y &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

iken $p: G_n \to NG_n$ dönüşümü $p = p_{n-1}p_{n-2} \cdots p_0$ ve $0 \le j \le n-1$ için $p_j(x) = xs_jd_j(x)^{-1}$ şeklinde tanımlıdır.

$x_\alpha \in G_{n-\#\alpha}$, $y_\beta \in G_{n-\#\beta}$ olmak üzere; NG_n içinde

$$\begin{aligned} F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta) &= p\mu(s_\alpha \times s_\beta)(x_\alpha, y_\beta) \\ &= p[s_\alpha x_\alpha, s_\beta y_\beta] \end{aligned}$$

dır. Buradan da $F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta)$ nın elemanları tarafından üretilen G_n nin N_n normal alt grubunu gösterebiliriz. Bu normal alt grup, n = 3 ve n = 4 değerleri için şu şekilde elde edilebilir.

n = 3 için mümkün Peiffer eşleşmeleri,

$$F_{(1,0)(2)}, F_{(2,0)(1)}, F_{(0)(2,1)}, F_{(0)(2)}, F_{(1)(2)}, F_{(0)(1)}.$$

dir. N_3 üreteçleri, her $x_1 \in NG_1, y_2 \in NG_2$ için,

$$F_{(1,0)(2)}(x_1,y_2) = [s_1s_0x_1, s_2y_2][s_2y_2, s_2s_0x_1],$$

$$F_{(2,0)(1)}(x_1,y_2) = [s_2s_0x_1, s_1y_2][s_1y_2, s_1s_2x_1][s_2s_1x_1, s_2y_2][s_2y_2, s_2s_0x_1],$$

her $x_2 \in NG_2, y_1 \in NG_1$ *için,*

$$F_{(0)(2,1)}(x_2,y_1) = [s_0x_2, s_2s_1y_1][s_2s_1y_1, s_1x_2][s_2x_2, s_2s_1y_1],$$

Ve her $x_2, y_2 \in NG_2$ *için,*

$$F_{(0)(1)}(x_2,y_2) = [s_0x_2,s_1y_2][s_1y_2,s_1x_2][s_2x_2,s_2y_2],$$
$$F_{(0)(2)}(x_2,y_2) = [s_0x_2,s_2y_2],$$
$$F_{(1)(2)}(x_2,y_2) = [s_1x_2,s_2y_2][s_2y_2,s_2x_2].$$

şeklindedir.

$n = 4$ için, ilgili eşlemeler:

$F_{(0)(3,2,1)}$,	$F_{(3,2,0)(1)}$,	$F_{(3,1,0)(2)}$,	$F_{(2,1,0)(3)}$,	$F_{(3,0)(2,1)}$,
$F_{(2,0)(3,1)}$,	$F_{(1,0)(3,2)}$,	$F_{(1)(3,2)}$,	$F_{(0)(3,2)}$,	$F_{(0)(3,1)}$,
$F_{(0)(2,1)}$,	$F_{(3,1)(2)}$,	$F_{(2,1)(3)}$,	$F_{(3,0)(2)}$,	$F_{(3,0)(1)}$,
$F_{(2,0)(3)}$,	$F_{(2,0)(1)}$,	$F_{(1,0)(3)}$,	$F_{(1,0)(2)}$,	$F_{(2)(3)}$,
$F_{(1)(3)}$,	$F_{(0)(3)}$,	$F_{(1)(2)}$,	$F_{(0)(2)}$,	$F_{(0)(1)}$

şeklindedir. Her $x_1, y_1 \in NG_1$, $x_2, y_2 \in NG_2$, ve her $x_3, y_3 \in NG_3$, için N_4 normal alt grubunun üreteçleri kolaylıkla elde edilir.

MATERYAL VE YÖNTEM (MATERIALS AND METHODS)

Pseudosimplisel Gruplar için Çaprazlanmış Modüller (Crossed Modules for Pseudo-simplical Groups)

Teorem 2.1. Moore kompleksinin boyu 1 olan Pseudosimplisel gruplar kategorisi ile çaprazlanmış modüller kategorisi denktir [11].

İspat. Kabul edelim ki G, Moore kompleksinin boyu 1 olan bir pseudosimplisel grup olsun. $P = NG_0 = G_0$, $M = NG_1 = çek(d_0 : G_1 \to G_0)$ ve $\partial = d_1$ alınsın ve $p \in P$ nin $m \in M$ üzerine etkisi

$$^{p}m = s_0(p)ms_0(p)^{-1},$$

olarak alınsın, buna göre

$$\partial(\,^{p}m) = d_1(s_0(p)ms_0(p)^{-1})$$

elde edilir. Burada

$$\ldots \longrightarrow 1 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial} P \longrightarrow 1$$

Moore kompleksinin boyu 1 olduğu için $\partial_2 NG_2 = 1$ eşitliği mevcuttur. Her $m, m' \in M, p \in P$ için

CM1
$$\begin{aligned} \partial_1(\,^{p}m) &= d_1(\,^{p}m) \\ &= d_1(s_0(p)ms_0(p)^{-1}) \\ &= d_1s_0(p)d_1(m)d_1s_0(p)^{-1} \\ &= p\partial_1(m)p^{-1} \end{aligned}$$

CM2
$$\begin{aligned} ^{(\partial_1 m)}m' &= s_0\partial_1(m)m's_0\partial_1(m)^{-1} \\ &= s_0d_1(m)m's_0d_1(m)^{-1} \\ &= s_0d_1(m)m's_0d_1(m)^{-1}[(m(m')^{-1}m^{-1})(mm'm^{-1})] \end{aligned}$$

$$= d_2 s_0(m) d_2 s_1(m') d_2 s_0(m)^{-1} d_2 s_1(m)$$
$$d_2 s_1(m')^{-1} d_2 s_1(m^{-1})(mm'm^{-1})$$

$$= d_2\big(s_0(m) s_1(m') s_0(m)^{-1} s_1(m) s_1(m')^{-1} s_1(m)^{-1}(mm'm^{-1})\big)$$
$$= mm'm^{-1}$$

dir. Böylece $\partial : M \longrightarrow P$ çaprazlanmış modülü elde edilir.

İlk olarak Conduche [6], homotopi 3 - tipler için bir model olarak 2 - çaprazlanmış modüllerden bahsetmiştir. Akça ve Pak [11] pseudo 2 – çaprazlanmış modülleri tanımlamışlardır. Bu tanımda bir pseudo 2 - çaprazlanmış modülün

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} P$$

şeklinde grupların bir kompleksi ve P-gruplarının ∂_2, ∂_1 morfizmlerinden meydana geldiği ifade edilmiştir. Burada P grubunun M , L ve kendisi üzerine grup etkisi ile birlikte

$$L \xrightarrow{\partial_2} M$$

bir pseudo çaprazlanmış modüldür. M nin L üzerinde etkisi ile her $l \in L, m \in M$ ve $p \in P$ için

$${}^{{}^{p}m}\left({}^{p}l\right) = {}^{p}\left({}^{m}l\right)$$

elde edilir. Ayrıca “Peiffer lifting” dönüşümleri,

$$\{\ ,\ \} : M \times M \to L$$

her $l, l' \in L, m, m', m'' \in M$ ve $p \in P$ için,

P-2CM1) $\partial_2\{m, m'\} = \left({}^{\partial_1 m} m'\right) m m'^{-1} m^{-1}$

P-2CM2) $\{\partial_2 l, \partial_2 l'\} = [l', l]$

P-2CM3) (i) $\{mm', m''\} = {}^{\partial_1 m}\{m', m''\}\{m, m'm''m'^{-1}\}$

(ii) $\{m, m'm''\} = \{m, m'\}^{mm'm^{-1}}\{m, m''\}$

P-2CM4) (a) $\{\partial_2 l, m\} = {}^{m}l(l)^{-1}$,

(b) $\{m, \partial_2 l\} = \left({}^{\partial_1 m} l\right)\left({}^{m}(l)^{-1}\right)$

P-2CM5) $\{m, \partial_2 l\}\{\partial_2 l, m\} = \left({}^{\partial_1 m} l\right)(l)^{-1}$

özellikleri sağlanır.

Bir pseudo 2-çaprazlanmış modülü $\{L, M, P, \partial_2, \partial_1\}$ şeklinde gösterilebilir. 2 - çaprazlanmış modül tanımını elde etmek için yukarıdaki koşullara

2CM6) ${}^{p}\{m, m'\} = \{{}^{p}m, {}^{p}m'\}$

şartı da eklenmelidir.

Conduche [6], Moore kompleksinin boyu 2 olan simplisel gruplar kategorisinin 2-çaprazlanmış modüller kategorisine denkliğini göstermiş, Akça ve Pak [11] ise Moore kompleksinin boyu 2 olan pseudo simplisel gruplar kategorisinin pseudo 2- çaprazlanmış modüller kategorisine denkliğini göstermiştir.

Teorem 2.2.1. Pseudo 2-çaprazlanmış modül kategorisi, Moore kompleksinin boyu 2 olan pseudosimplisel gruplar kategorisine denktir [11].

İspat Akça ve Pak [11] tarafından verilmiştir.

$$\begin{tikzcd} & tr_2 PseudoSimpGrp \arrow[dl, shift left, "\cos k_2"] \arrow[dr, shift left] & \\ PseudosimpGrp_{\leq 2} \arrow[ur, shift left, "tr_2"] \arrow[rr, shift left] & & \chi_2 Mod \arrow[ul, shift left] \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd}$$

elde edilmiştir.

TARTIŞMA VE SONUÇLAR (DISCUSSION AND CONCLUSIONS)

3.1. Pseudo 3-Çaprazlanmış Modüller (Pseudo 3- Crossed Modules)

Pseudo 3-çaprazlanmış modüller kategorisini oluşturmak için ilk olarak, Conduch'e [6] nin metodundan faydalanacağız. Conduch'e [6] metodunda bir simplisel gurubun yarı direkt ayrışımını kullanarak bazı eşitlikler verdi. Bu eşitliklerin Mutlu ve Porter [8] tarafından n =3 için ∂_3 altında $F_{\alpha,\beta}$ Peiffer çiftlerinin görüntüleri olduğu ifade edilmiştir. Arvasi, Kuzpınarı ve Uslu [9] çalışmalarında Conduch'e [6] den farklı olarak direkt ayrışım yerine $F_{\alpha,\beta}$ kullanmışlardır. Böylece $n = 4$ için benzer eşitlikleri tanımlayarak bir 3-çaprazlanmış modülün aksiyomlarını elde etmişlerdir. Bizde Arvasi, Kuzpınarı ve Uslu [9] nun çalışmalarından faydalanarak, Pseudo 3- çaprazlanmış modül aksiyomlarını elde etmeye çalışacağız.

G , Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan bir pseudosimplisel grup olsun, $NG_0 = N, NG_1 = A, NG_2 = B, NG_3 = C$ ile bir

$$C \xrightarrow{\partial_3} B \xrightarrow{\partial_2} A \xrightarrow{\partial_1} N$$

grup kompleksi elde edilir. Burada N nin A, B, C üzerine etkisi, A nın $B ve\ C$ üzerine ve B nin C üzerine etkisi

$$^{n}a = s_0 n(a) s_0 n^{-1}$$

$$^{n}b = s_1 s_0 n(b) s_1 s_0 n^{-1}$$

$$^{n}c = s_2 s_1 s_0 n(c) s_2 s_1 s_0 n^{-1}$$

$$^{a}b = s_1 a(b) s_1 a^{-1}$$

$$^{a}c = s_2 s_1 a(c) s_2 s_1 a^{-1}$$

$$b.c = s_2 b(c) s_2 b^{-1}$$

olarak tanımlanır.

$$[s_1 s_0 a s_2 s_1 \partial_1 a, c]=1$$

$$[s_1 b s_2 s_1 \partial_2 b, c]=1$$

$$[c', c^{-1} s_2 \partial_3 c]=1$$

ve buradan

$$^{\partial_1 a}c = s_1 s_0 a(c) s_1 s_0 a^{-1}$$

$$^{\partial_2 b}c = s_1 b(c) s_1 b^{-1}$$

$$\partial_3 c.c' = c(c')c^{-1}$$

dir ve

$$\begin{aligned} \partial_3(b.c) &= \partial_3(s_2 b(c) s_2 b^{-1}) \\ &= \partial_3 s_2 b(\partial_3 c) s_2 b^{-1} \\ &= b(\partial_3 c) b^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\partial_3 : C \longrightarrow B$ çaprazlanmış modül olduğu gösterilmiş olur.

3.2. Tanım

$$C \xrightarrow{\partial_3} B \xrightarrow{\partial_2} A \xrightarrow{\partial_1} N$$

yukarıdaki gibi bir grup kompleksi olmak üzere, Peiffer liftingleri $a, a' \in A,\ ve\ b, b' \in B\ için$

$\{\ ,\ \}$ $\quad : A \times A \longrightarrow B$

$$\{a, a'\} = [s_1 a, s_1 a'][s_1 a', s_0 a]$$

$\{\ ,\ \}_{(1)(0)}$ $\quad : B \times B \longrightarrow C$

$$\{b, b'\}_{(1)(0)} = [s_2 b', s_2 b][s_1 b, s_1 b'][s_1 b', s_0 b]$$

$\{\ ,\ \}_{(2)(1)}$ $\quad : B \times B \longrightarrow C$

$$\{b, b'\}_{(2)(1)} = [s_2 b, s_2 b'][s_2 b', s_1 b]$$

$\{\ ,\ \}_{(0)(2)}$ $\quad : B \times B \longrightarrow C$

$$\{b, b'\}_{(0)(2)} = [s_2 b', s_0 b]$$

$\{\ ,\ \}_{(1,0)(2)}$ $\quad : A \times B \longrightarrow C$

$$\{a, b'\}_{(1,0)(2)} = [s_2 s_0 a, s_2 b'][s_2 b', s_1 s_0 a]$$

$\{\ ,\ \}_{(2,0)(1)}$ $\quad : A \times B \longrightarrow C$

$$\{a, b'\}_{(2,0)(1)} = [s_2 s_0 a, s_2 b'][s_2 b', s_2 s_1 a][s_2 s_1 a, s_1 b'][s_1 b', s_2 s_0 a]$$

$\{\ ,\ \}_{(2,0)(1)}$ $\quad : B \times A \longrightarrow C$

$$\{b', a\}_{(0)(2,1)} = [s_2 s_1 a, s_2 b'][s_1 b', s_2 s_1 a][s_2 s_1 a, s_0 b']$$

şeklinde tanımlansın. Böylece aşağıdaki özdeşlikler elde edilir. Burada, $a, a', a'' \in A$, $b, b', b'' \in B$, $c, c', c'' \in C$ olmak üzere

$\{a,\partial_3 c''\}_{(1,0)(2)}$	=	$\{a,\partial_3 c''\}_{(2,0)(1)} \quad {}^{a}(c'')^{\partial_1 a}(c''^{-1})$
$\{\partial_3 c'',a\}_{(0)(2,1)}$	=	${}^{a}(c')c'^{-1}$
$\{a,\partial_3 c\}_{(1,0)(2)}$	=	$\{a,\partial_3 c\}_{(2,0)(1)} \ \{\partial_3 c,a\}_{(0)(2,1)} \quad c^{\partial_1 m}c^{-1}$
$\{b',\partial_2 b\}_{(0)(2,1)}$	=	$\{b,b'\}^{-1}_{(2)(1)} \ \{b',b\}_{(1)(0)}$
$\{\partial_2 b,b'\}_{(2,0)(1)}$	=	$\{b,b'\}^{-1}_{(0)(2)} \quad {}^{[b',b]}(\{b,b'\}_{(2)(1)}) \ \{b,b'\}_{(1)(0)}$
$\{\partial_2 b,b'\}_{(1,0)(2)}$	=	$(\{b,b'\}_{(0)(2)})^{-1}$
$\{b,b',b''\}_{(2)(1)}$	=	$\{b,b'\}_{(2)(1)} \ {}^{\partial b}b'.\{b,b''\}_{(2)(1)}$
$\{bb',b''\}_{(2)(1)}$	=	$b.\{b',b''\}_{(2)(1)}\{b,{}^{\partial b'}b''\}_{(2)(1)}$
$\partial_3(\{b,b'\}_{(1)(0)})$	=	$[b,b']\{\partial_2 b,\partial_2 b'$
$\partial_3(\{b,b'\}_{(2)(1)})$	=	$bb'b^{-1}({}^{\partial_2 b}b')^{-1}$
$\partial_3(\{b,b'\}_{(0)(2)})$	=	$\partial_3(\{\partial_2 b,b'\}_{(1,0)(2)})^{-1}$
$\partial_3(\{b,a\}_{(0)(2,1)})$	=	${}^{a}bb^{-1}\{\partial_2 b,a\}$
$\partial_3(\{a,b\}_{(2,0)(1)})$	=	$\partial_3\{a,b\}_{(1,0)(2)} \quad {}^{\partial_1 a}b^{a}(b^{-1})\{a,\partial_2 b\}$
$\{\partial_3 c,b\}_{(2)(1)}\{b,\partial_3 c\}_{(2)(1)}$	=	$c({}^{\partial_2 b}(c^{-1}))$
$\{\partial_3 c,b\}_{(1)(0)}\{b,\partial_3 c\}_{(1)(0)}$	=	1
$\{\partial_3 c,\partial_3 c'\}_{(2)(1)}$	=	$[c,c']$
$\{\partial_3 c,\partial_3 c'\}_{(1)(0)}$	=	$[c',c]$
$\{\partial_3 c,b'\}_{(0)(2)}$	=	1
$\{\partial_2 b,\partial_3 c\}_{(1,0)(2)}$	=	$\{b,\partial_3 c\}^{-1}_{(0)(2)}$
$\{\partial_2 b,\partial_3 c\}_{(2,0)(1)}$	=	$\{b,\partial_3 c\}_{(0)(2)}c({}^{\partial_2 b}(c^{-1}))$
$\{\partial_3 c,\partial_2 b\}_{(0)(2,1)}$	=	${}^{\partial_2 b}cc^{-1}$

${}^{n}\{a,\boldsymbol{a'}\} = \{\,{}^{n}\boldsymbol{a},\ {}^{n}\boldsymbol{a'}\}$
${}^{n}\{b,\boldsymbol{b'}\}_{(1)(0)} = \{\,{}^{n}\boldsymbol{b},\ {}^{n}\boldsymbol{b'}\}_{(1)(0)}$
${}^{n}\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b'}\}_{(2)(1)} = \{\,{}^{n}\boldsymbol{b}\ {}^{n}\boldsymbol{b'}\}_{(2)(1)}$
${}^{n}\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b'}\}_{(0)(2)} = \{\,{}^{n}\boldsymbol{b},\ {}^{n}\boldsymbol{b'}\}_{(0)(2)}$
${}^{n}\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b'}\}_{(1,0)(2)} = \{\,{}^{n}\boldsymbol{a},\ {}^{n}\boldsymbol{b'}\}_{(1,0)(2)}$
${}^{n}\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b'}\}_{(2,0)(1)} = \{\,{}^{n}\boldsymbol{a},\ {}^{n}\boldsymbol{b'}\}_{(2,0)(1)}$
${}^{n}\{\boldsymbol{b'},a\}_{(0)(2,1)} = \{\,{}^{n}\boldsymbol{b'},\ {}^{n}\boldsymbol{a}\}_{(0)(2,1)}$

${}^{n}\{\boldsymbol{a'},\boldsymbol{a''}\} = {}^{a}\{\boldsymbol{a'},\ {}^{a}\boldsymbol{a''}\}$
${}^{n}\{b,\boldsymbol{b'}\}_{(1)(0)} = \{\,{}^{a}\boldsymbol{b},\ {}^{a}\boldsymbol{b'}\}_{(1)(0)}$
${}^{n}\{b,\boldsymbol{b'}\}_{(2)(1)} = \{\,{}^{a}\boldsymbol{b},\ {}^{a}\boldsymbol{b'}\}_{(2)(1)}$
${}^{n}\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b'}\}_{(0)(2)} = \{\,{}^{a}\boldsymbol{b},\ {}^{a}\boldsymbol{b'}\}_{(0)(2)}$
${}^{n}\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b'}\}_{(1,0)(2)} = \{\,{}^{a}\boldsymbol{a},\ {}^{a}\boldsymbol{b'}\}_{(1,0)(2)}$
${}^{n}\{a,\boldsymbol{b'}\}_{(2,0)(1)} = \{\,{}^{a}\boldsymbol{a},\ {}^{a}\boldsymbol{b'}\}_{(2,0)(1)}$
${}^{n}\{b',a\}_{(0)(2,1)} = \{\,{}^{a}\boldsymbol{b'},\ {}^{a}\boldsymbol{a}\}_{(0)(2,1)}$

elde edilir.

3.3. Tanım Grupların bir kompleksinin 3 – çaprazlanmış modülü

$$C \xrightarrow{\partial_3} B \xrightarrow{\partial_2} A \xrightarrow{\partial_1} N$$

grupların ve morfizmlerinin bir kompleksi olsun. N nin C, B ve A üzerine etkisi, A nın C ve B üzerine etkisi ve B nin C üzerine etkisi ile birlikte

$$\{\ ,\ \}_{(1)(0)} : B\times B \longrightarrow C$$
$$\{\ ,\ \}_{(1,0)(2)} : A\times B \longrightarrow C$$
$$\{\ ,\ \}_{(0)(2,1)} : B\times A \longrightarrow C$$
$$\{\ ,\ \}_{(0)(2)} : B\times B \longrightarrow C$$
$$\{\ ,\ \}_{(2)(1)} : B\times B \longrightarrow C$$
$$\{\ ,\ \}_{(2,0)(1)} : A\times B \longrightarrow C$$
$$\{\ ,\ \} : A\times A \longrightarrow B$$

3 boyutlu Peiffer liftingi denilen dönüşümler için

P-3CM1) $C \xrightarrow{\partial_3} B \xrightarrow{\partial_2} A$

$\{\ \ ,\ \ \}_{(2)(1)}$ Peiffer lifting ile bir pseudo 2 çaprazlanmış modüldür.

P-3CM2) $\{a, \partial_3 c\}_{(1,0)(2)} = \{a, \partial_3 c\}_{(2,0)(1)}\ {}^{a}(c)^{\partial_1 a}(c^{-1})$

P-3CM3) $\{\partial_3 c, a\}_{(0)(2,1)} = {}^{a}(c)c^{-1}$

P-3CM4) $\{a, \partial_3 c\}_{(1,0)(2)} = \{a, \partial_3 c\}_{(2,0)(1)}\{\partial_3 c, a\}_{(0)(2,1)}\ (c)^{\partial_1 a}(c^{-1})$

P-3CM5) $\{b', \partial_3 b\}_{(0)(2,1)} = \{b, b'\}^{-1}_{(2)(1)}\{b', b\}_{(1)(0)}$

P-3CM6) $\{\partial_2 b, b'\}_{(2,0)(1)} = \{b, b'\}^{-1}_{(0)(2)}{}^{[b',b]}(\{b', b\}_{(2)(1)})\{b, b'\}_{(1)(0)}$

P-3CM7) $\{\partial_2 b, b'\}_{(1,0)(2)} = (\{b, b'\}_{(0)(2)})^{-1}$

P-3CM8) $\partial_3(\{b, b'\}_{(1),(0)}) = [b, b']\{\partial_2 b, \partial_2 b'\}$

P-3CM9) $\partial_3(\{b, b'\}_{(0),(2)}) = \partial_3(\{\partial_2 b, b'\}_{(1,0)(2)})^{-1}$

P-3CM10) $\partial_3(\{b, a\}_{(0),(2,1)}) = abb^{-1}\{\partial_2 b, a\}$

P-3CM11) $\partial_3(\{a, b\}_{(2,0),(1)}) = \partial_3\ \{a, b\}_{(1,0)(2)}{}^{\partial_1 a}b\ {}^{a}b^{-1}\{a, \partial_2 b\}$

P-3CM12a) $\{\partial_3 c, b\}_{(1)(0)} = ({}^{b}c)c^{-1}$

P-3CM12b) $\{b, \partial_3 c\}_{(1)(0)} = c({}^{b}c)^{-1}$

P-3CM13) $\{\partial_3 c, \partial_3 c'\}_{(1)(0)} = [c', c]$

P-3CM14) $\{\partial_3 c, b'\}_{(0)(2)} = 1$

P-3CM15) $\{\partial_3 b, \partial_3 c\}_{(1,0)(2)} = \{b, \partial_3\}_{(0)(2)}{}^{-1}$

P-3CM16) $\{\partial_2 b, \partial_3 c\}_{(2,0)(1)} = \{b, \partial_3\}_{(0)(2)}\ c({}^{\partial_2 b}(c^{-1}))$

P-3CM17) $\{\partial_3 c, \partial_2 b\}_{(0)(2,1)} = {}^{\partial_2 b}cc^{-1}$

P-3CM18) $\partial_2\{a, a'\} = aa'a^{-1}({}^{\partial_1 a}a')^{-1}$

aksiyomları sağlanıyorsa yukarıdaki komplekse bir pseudo 3-çaprazlanmış modül ve $(C, B, A, N, \partial_3, \partial_2, \partial_1)$ ile gösterilir.

Gruplar için pseudo 3-çaprazlanmış modül morfizimlerini,

$$\begin{tikzcd}
B_3 \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d] & B_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d] & B_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d] & B_0 \arrow[d] \\
B'_3 \arrow[r, "\partial'_3"'] & B'_2 \arrow[r, "\partial'_2"'] & B'_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & B'_0
\end{tikzcd}$$

gösterebiliriz.

. $f_1({}^{n}a) = {}^{(f_0(n))}f_1(a), \quad f_2({}^{n}b) = {}^{(f_0(n))}f_2(b), \quad f_3({}^{n}c) = {}^{(f_0(n))}f_3(c)$

Her $c \in C, \; b \in B, \; a \in A$ için,

$\{,\}\ f_2 \times f_2 = f_3\{\,,\}$ için $\{\,,\}_{(0)(2)}, \{\,,\}_{(2)(1)}, \{\,,\}_{(1)(0)}$

$\{,\}\ f_1 \times f_2 = f_3\{\,,\}$ için $\{\,,\}_{(1,0)(2)}, \{\,,\}_{(2,0)(1)}$

$\{,\}\ f_2 \times f_1 = f_3\{\,,\}$ için $\{\,,\}_{(0)(2,1)}$

$\{,\}\ f_1 \times f_1 = f_2\{\,,\}$ için $\{,\}$

Böylece, $\boldsymbol{pX_3Mod}$ ile göstereceğimiz pseudo 3-çaprazlanmış modüller kategorisini tanımlayabiliriz.

Pseudosimplisel Gruplar (Pseudosimplicial Groups)

Bir **G**, Moore kompleksi **NG** ile gösterilen bir pseudosimplisel grup olsun,

$$NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \xrightarrow{\partial_3} NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

grup kompleksi

$\{\ ,\ \} \;:\; NG_1 \times NG_1 \to NG_2$

$\{x_1, y_1\} = [s_0x_1, s_1y_1][s_1y_1, s_0x_1]$

$\{\ ,\ \}_{(1)(0)} \;:\; NG_2 \times NG_2 \to NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4)$

$\{x_2, y_2\} = \overline{[s_0x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_1x_2][s_2x_2, s_2y_2]}$

$\{\ ,\ \}_{(2)(1)} \;:\; NG_2 \times NG_2 \to NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4)$

$\{x_2, y_2\} = \overline{[s_1x_2, s_2y_2][s_2y_2, s_2x_2]}$

$\{\ ,\ \}_{(0)(2)} \;:\; NG_2 \times NG_2 \to NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4)$

$\{x_2, y_2\} = \overline{[s_0x_2, s_2y_2]}$

$\{\ ,\ \}_{(1,0)(2)} \;:\; NG_1 \times NG_2 \to NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4)$

$\{x_1, y_2\} = \overline{[s_1s_0x_1, s_2y_2][s_2y_2, s_2s_0x_1]}$

$\{\ ,\ \}_{(2,0)(1)} \;:\; NG_1 \times NG_2 \to NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4)$

$\{x_1, y_2\} = \overline{[s_2s_0x_1, s_1y_2][s_1y_2, s_2s_1x_1][s_2s_1x_1, s_2y_2][s_2y_2, s_2s_0x_1]}$

$\{\ ,\ \}_{(0)(2,1)} \;:\; NG_2 \times NG_1 \to NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4)$

$\{y_2, x_1\} = \overline{[s_0y_2, s_2s_1x_1][s_2s_1x_1, s_1y_2][s_2y_2, s_2s_1x_1]}$

Peiffer liftingleri ile birlikte bir pseudo 3 - çaprazlanmış modüldür.

3.4. Teorem Pseudo 3 - çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan pseudosimplisel gruplar kategorisine denktir.

İspat: G, Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan bir pseudosimplisel grup olsun.

$$NG_3 \xrightarrow{\partial_3} NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

grup kompleksinin bir pseudo 3 – çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. Moore kompleksinin uzunluğu 3 olduğundan, $NG_4 \cap D_4 = 1$, böylece $\partial_4(NG_4 \cap D_4) = 1$ elde edilir ve $NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4)$ yerine NG_3 alabiliriz $NG_4 \cap D_4$,

$$\daleth_3\text{: p}\mathbf{SimpGrp}_{\leq 3} \longrightarrow \text{p}\mathbf{X_3Mod}$$

Böylece Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan pseudsimplisel gruplar kategorisinden pseudo 3 çaprazlanmış modüller kategorisine bir funktor vardır. Tersine;

$$C \xrightarrow{\partial_3} B \xrightarrow{\partial_2} A \xrightarrow{\partial_1} N$$

Bir pseudo 3 çaprazlanmış modül olsun. $H_0 = N$ olmak üzere, N nin A üzerine etkisi ile $H_1 = A \rtimes N$ yarı direk çarpımı elde edilir

$$\begin{aligned} d_0 &: A \rtimes N \longrightarrow N \\ &(a,n) \longmapsto n \\ d_1 &: A \rtimes N \longrightarrow N \\ &(a,n) \longmapsto (\partial_1(a))n \\ s_0 &: N \longrightarrow A \rtimes N \\ &n \longmapsto (1,n). \end{aligned}$$

$(a,n) \in A \rtimes N$ için yüz ve dejenere dönüşümleri yazılabilir. Şimdi, A ve N 'nin B üzerine etkisi ile, $H_2 = (B \rtimes A) \times (A \rtimes N)$ yarı-direkt çarpımını elde ederiz. $b \epsilon B$, $a, a' \in A$ ve $n \in N$ için yüz ve dejenere dönüşümleri,

$$\begin{aligned} d_0 &: (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \to (A \rtimes N) \\ &(b,a,a',n) \to (a',n) \\ d_1 &: (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \to (A \rtimes N) \\ &(b,a,a',n) \to (aa',n) \\ d_2 &: (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \to (A \rtimes N) \\ &(b,a,a',n) \to (\partial_2(b)a \;, \partial_1(a')n) \\ s_0 &: (A \rtimes N) \to (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \\ &(a',n) \to (1,1,a',n) \\ s_1 &: (A \rtimes N) \to (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \\ &(a',n) \to (1,a',1,n) \end{aligned}$$

$\{,\}_{(2)(1)}$ bir pseudo 2 – çaprazlanmış modül olduğundan B nin C üzerine etkisi, $b \in B, c \in C$ için

$$^{b}c = \{\partial_3 c, b\}_{(2)(1)} c^{-1}$$

bu etkiyi kullanarak $C \rtimes B$ yarı direkt çarpımını elde ederiz. $(b,a) \in B \rtimes A$ nın $(c,b) \in C \rtimes B$ üzerine etkisini kullanarak

$$\begin{aligned}
^{(1,a)}(c,b') &= \ ^{a}(\ ^{1}c),\ ^{a}(\ ^{1}b') \\
&= \ ^{a}(c),\ ^{a}(b') \\
^{(b,1)}(c,b') &= \ ^{1}(\ ^{b}c),\ ^{1}(\ ^{b}b') \\
&= \ ^{b}(c),\ ^{b}(b') \\
&= \ ^{\partial_2 b}c\{b, \partial_3 c\}_{(2)(1)}, bb'b^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$H_3 = (C \rtimes B) \rtimes (B \rtimes A) \times (A \rtimes N)$$

Yarı direk çarpımı elde edilir. Dejenere ve yüz operatörlerimiz

$$\begin{aligned}
d_0 &:= (C \rtimes B) \rtimes (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \to (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \\
&\quad (c,b,b',a,a',n) \to (b',a,a',n) \\
d_1 &:= (C \rtimes B) \rtimes (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \to (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \\
&\quad (c,b,b',a,a',n) \to (b,a,a',n) \\
d_2 &:= (C \rtimes B) \rtimes (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \to (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \\
&\quad (c,b,b',a,a',n) \to (bb',a,a',n) \\
d_3 &:= (C \rtimes B) \rtimes (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \to (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \\
&\quad (c,b,b',a,a',n) \to (\partial_3 cb, \partial_2 b'a, a', n) \\
s_0 &:= (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \to (C \rtimes B) \rtimes (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \\
&\quad (b,a,a',n) \to (1,b,1,a,a',n) \\
s_1 &:= (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \to (C \rtimes B) \rtimes (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \\
&\quad (b,a,a',n) \to (1,1,b,a,a',n) \\
s_2 &:= (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \to (C \rtimes B) \rtimes (B \rtimes A) \rtimes (A \rtimes N) \\
&\quad (b,a,a',n) \to (1,b,1,a'n)
\end{aligned}$$

Böylece 3-truncated pseudosimplisel grup $H = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ elde ederiz.

KAYNAKÇA (REFERENCES)

[1] J.H.C. Whitehead. Combinatorial Homotopy II, Bull . *American Math. Society*, 453-456, (1949).

[2] T. Porter. Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles. J. Algebra

99, 458-465(1986).

[3] R. Brown, Higher Dimensional Group Teory, Low Dimensional Topology, *London Math. Soc. Lecture Note Series*, 48, 215-238 (1982).

[4] R. Brown. Coproducts of Crossed P-modules, Applications to Second Homtopy Groups and to the Hmology of Groups, *Topology*, 23, 337-345, (1984).

[5] R. Brown and P.J. Higgins. Colmit Theorems for Relative Homotopy Groups, *J. Pure Appl. Algebra*, 22, 248-370, (1981).

[6] D. Conduch´ e, Modules crois´es g´en´eralis´es de longueur 2, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 34, 155-178, (1984).

[7] P. Carrasco and A. M. Cegarra, Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types, *Jour. Pure Applied Algebra, 75, 195-235,(1991)*

[8] A. Mutlu and T. Porter, Applications of Peiffer pairing in the Moore complex of a simplicial group, *Theory and Applications of Categories*, Volume 4, No. 7, 148-173 (1998).

[9] Z. Arvasi, T.S. Kuzpınarı and E. Ö. Uslu, Three Crossed Modules, *Homology, Homotopy and Aplications, 11 (2), 161-187.*

[10] Inasaridze, H. N.: Homotopy of pseudosimplicial groupsand nonabelian derived functors and algebraic K-theory, *Math. Sbornik*, TOM, 98, (140), No: 3, 303-323 (1975).

[11] İ. Akça and S. Pak Pseudo simplicial groups and crossed modules, *Turk J Math*, Volume 34, 475-487 (2010).

[12] U. Cesur, Pseudo Pseudo 3- Çaprazlanmış Modüller, *Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, KONYA (2018)

[13] P. Carrasco, Complejos hipercruzados, cohomologiay extensiones, Ph.D. Thesis, *Universidad de Granada*, (1987).