



Eliptik sözde-kopulalar ile esnek bağımlılık modellemesi

Övgücan Karadağ ERDEMİR

Hacettepe Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800-Çankaya, Ankara, Turkey
ovgucan@hacettepe.edu.tr
0000-0002-4725-3588

Meral SUCU

Hacettepe Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800-Çankaya, Ankara, Turkey
msucu@hacettepe.edu.tr
0000-0002-7991-1792

Öz

Finansal ve aktüeryal bağımlılık modellemesi çalışmalarında sıklıkla tercih edilen eliptik kopulalar, dinamik bağımlılık modellemesi elde etmek ve kuyruk bağımlılığı ile eliptik bağımlılığın modellenebilmesi gibi çeşitli nedenler ile düzenlenebilir. Düzenlenmiş sözde-kopula ile esnek bir bağımlılık modellemesi elde edilir. Bu çalışmada, düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonlarının düzenlemeden sonra da sözde-kopula fonksiyonu özelliğini koruduğu gösterilmiş ve bu fonksiyonların elde edilme aşamaları verilmiştir. Uygulama bölümünde, sözde-kopula fonksiyonlarının düzenlenmesinin etkinliği perspektif ve izohips eğrileri ile incelenmiş ve düzenlemenin sağladığı fayda, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelleri yardımıyla gösterilmiştir.

Anahtar sözcükler: Bağımlılık, Düzenlenmiş sözde-Gauss kopula, Eliptik kopula, Kuyruk bağımlılığı, Sözde-gözlemler.

Abstract

Flexible dependence modelling with elliptical pseudo-copulas

Elliptical copulas, which are frequently preferred in financial and actuarial dependency modeling studies, can be modified for various reasons such as obtaining dynamic dependency modeling and modeling tail dependency and elliptic dependence. With the modified pseudo-copula, a flexible dependency modeling is obtained. In this study, it is shown that the modified pseudo-copula functions preserve pseudo-copula function feature after the modification and the stages of obtaining these functions are given. In the application part, the efficiency of the modification of the pseudo-copula functions is examined with perspective curves and contour lines, and the benefit provided by the modification is demonstrated with the help of modified pseudo-copula regression models.

Keywords: Dependence, Modified Gaussian pseudo-copula, Elliptical copula, Tail dependence, Pseudo-observation.

1. Giriş

Bağımlılık modellemesi denince akla ilk gelen modeller kuşkusuz kopula fonksiyonlarıdır. Ortak olasılık dağılım fonksiyonlarının, marjinal olasılık dağılım fonksiyonları ile ifade edilmesini sağlayan Sklar'ın Teoremi, birçok bağımlılık çalışmasının temelini oluşturur [1]. Bağımlılık çalışmalarında kopula, daha çok finansal ve istatistiksel veriler için kullanılmış, aktüerya bilimlerinde ise bağımlılığın kopula ile modellenmesi yakın geçmişte çalışılmıştır.

Aktüeryal çalışmalarda kopula ile bağımlılığın modellenmesinde, Frees ve Valdez'in [2] çalışması önemli ve temel kaynak niteliindedir. Hayat sigortalarında çoklu azalım modellerinde ve birleşik yaşam ürünlerinde [3, 4], sağlık sigortalarında hasar tutarı ile sayısı arasındaki [5, 6] bağımlılık kopula ile modellenmiştir. Hayat dışı sigortalarda ise, hasar tutarı ile sayısı arasındaki bağımlılığın [7, 8, 9], hasar sayıları arasındaki bağımlılığın [10, 11], hasar türleri arasındaki bağımlılığın [12-14], hasar nedenleri arasındaki bağımlılığın [15, 16], hasar süresi ve hasar tutarı arasındaki bağımlılığın [17] ve mekansal bağımlılığın [18, 19] modellenmesinde kopula fonksiyonundan yararlanılmaktadır. Hayat dışı sigortaların rezerv hesaplamalarında [20-23] ve aktüeryal verilerle yapılan finansal çalışmalarda da [24-26] bağımlılığın modellenmesinde kopula kullanılmıştır.

Eliptik dağılımların toplamı yine bir eliptik dağılım olduğundan, çok değişkenli eliptik dağılımlardan elde edilen eliptik kopula fonksiyonları, finansal çalışmalarda varlık portföylerindeki bağımlılığın ve aktüerya bilimlerinde toplam hasardaki bağımlılığın modellenmesinde tercih edilir [27]. Eliptik dağılım ailesinin en sık kullanılan üyeleri Gauss kopula ve t-kopula fonksiyonlarıdır. Gauss kopula fonksiyonu, çok değişkenli normal dağılıma bağlı olarak tanımlandığından ve değişken sayısının çok olması durumunda, diğer parametrik kopula fonksiyonlarına göre çalışılması daha kolay olduğundan tercih edilir [28, 29]. Gauss kopula fonksiyonu sahip olduğu bu avantajların yanında, asimetrik bağımlılığın, eliptik bağımlılığın, dairesel simetriye göre bağımlılığın ve kuyruk bağımlılığının modellenmesinde yetersiz kalmaktadır [28, 30, 31, 32].

Bağımlılık çalışmalarında, var olan kopula fonksiyonları daha dinamik bağımlılık yapıları elde etmek ya da kuyruk bağımlılığı ve eliptik bağımlılığın modellenmesi gibi çeşitli sebeplerle düzenlenmiştir. Patton [33, 34] zamana bağlı olarak değişen koşullu bağımlılığın ve çok değişkenli bağımlılığın modellenmesi amacıyla koşullu kopula tanımını geliştirmiştir. Fermanian ve Wegkamp [35, 36], koşullu kopula fonksiyonlarını geliştirerek sözde-kopula fonksiyonlarını tanımlamıştır. Sözde-kopula fonksiyonu ile kopulanın durağan yapısından uzaklaşarak, dinamik yani zamana göre değişen bir yapı kazanması amaçlanmaktadır. Sözde-kopula fonksiyonunun ilişki katsayısı, çeşitli fonksiyonlar yardımıyla değiştirilerek, düzenlenmiş sözde-Gauss kopula geliştirilmiştir [30, 31]. Kopula fonksiyonlarında yapılan değişikliklerin etkisinin test edilmesi ve farklı kopula fonksiyonlarının karşılaştırılarak uygun kopulanın seçilmesi ile ilgili çalışmalar da yapılmıştır [37, 38].

Bağımlılık ve ilişkili olma durumu farklı olmakla birlikte, birbiri ile bağlantılıdır. Gauss kopula gibi bazı bağımlılık modelleme yöntemlerinde parametrenin direkt ilişki katsayısı olmasından dolayı bağımlılık ilişki katsayısı ile doğrudan ilişkilendirilebilir. Değişkenler arasındaki ilişki; kovaryans, varyans-kovaryans matrisi, ilişki katsayısı ve ilişki matrisi ile ölçülebilir. İlişki katsayısı ve ilişki matrisi; kovaryans ve varyans-kovaryans matrisinin standartlaştırılmış halidir. Rastlantı değişkenleri arasındaki ilişki; Pearson doğrusal ilişki katsayısı, sıra ilişki katsayılarından Spearman'ın ρ ile Kendall'ın τ katsayıları ve kuyruk bağımlılığı katsayısı olarak sınıflandırılan bağımlılık ölçümleri ile incelenebilir.

Bu çalışmada, sözde-Gauss kopula fonksiyonlarının düzenlenmesiyle elde edilen düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonları ile esnek bir bağımlılık modellemesi sunulmuştur. Düzenleme yardımıyla verideki bağımlılığa

uygun kopula fonksiyonu ile doğru bir bağımlılık modellemesi elde edilerek, bağımlılık hesaplamalara dahil edilebilir ve gerçeğe daha yakın hesaplamalar yapılabilir.

Bu çalışmada İkinci Bölüm’de genel olarak kopula fonksiyonları, özellikleri ile eliptik kopulalardan Gauss kopula ve sözde-Gauss kopula fonksiyonları hakkında kısaca bilgi verilmiştir. Üçüncü Bölüm’de düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonlarının elde edilme aşamaları ve düzenlemeden sonra da kopula fonksiyonunun sözde-kopula fonksiyonu özelliğini koruduğu gösterilmiştir. Dördüncü Bölüm’de düzenlenmiş sözde-kopula regresyon model yardımıyla bağımlılık varsayımı altında hasar tutarı ile sayısının ortak dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının çıkarımına kısaca yer verilmiştir. Beşinci Bölüm’de Sigorta Bilgi Merkezi (SBM)’den alınan verinin kullanıldığı uygulamada, sözde-kopula fonksiyonlarında düzenleme yapmanın etkinliği perspektif ve izohips eğileri ile incelenmiş ve düzenlemenin sağladığı esneklik düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli yardımıyla gösterilmiştir. Çalışmanın sonucunda elde edilen sonuç ve bulgulara ise Altıncı Bölüm’de yer verilmiştir.

2. Yöntem

2.1. Kopula

Bağımlılık modellemesi denince akla ilk gelen kopula fonksiyonu 1959 yılında Sklar tarafından ortaya atılmış ve hala birçok çalışmanın temelini oluşturmaktadır [1]. İstatistik, ekonomi, ekonometri ve finans gibi birçok bilim dalında değişkenler arasındaki bağımlılığın modellenmesinde kopula fonksiyonlarından yararlanılmaktadır. Aktüerya Bilimleri alanında kopulanın ilk kullanıldığı çalışmalar ağırlıklı olarak finansal çalışmalar olmakla birlikte, zaman içinde hayat ve hayat dışı sigortalar matematiğinde bağımlılık modellemesinde tercih edilmiştir.

Bağ, ilişki ve birlikte hareket eden anlamlarına gelen kopula, çok değişkenli ve normal olmayan dağılımların tanımlanmasında ve bağımlılığın modellenmesinde kullanılır. Kopula fonksiyonu, marjinal dağılımları birleştiren çok değişkenli dağılım fonksiyonu olarak tanımlanabilir [39]. Dağılım fonksiyonlarının tanım aralığı $I=[0,1]$ olduğu için kopula; marjinal uniform dağılımlı rastlantı değişkenlerini birleştiren çok değişkenli bir dağılım fonksiyonu olarak da tanımlanabilir.

Kopula fonksiyonlarının daha iyi anlaşılabilmesi için reel eksen, genişletilmiş reel eksen, artan ve azalan fonksiyonların özellikleri, bir fonksiyonun hacmi gibi temel matematiksel bilgilerin verilmesinde fayda vardır. $(-\infty, \infty)$ açık aralığı \mathbf{R} reel eksenini, $[-\infty, \infty]$ kapalı aralığı ise $\bar{\mathbf{R}}$ genişletilmiş reel eksenini ifade eder. Benzer biçimde; $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ reel düzlem iken, $\bar{\mathbf{R}}^2 = \bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$ genişletilmiş reel düzlemdir. Genişletilmiş reel düzlem üzerinde iki kapalı aralığın kartezyen çarpımı; köşeleri (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) ve (x_2, y_2) olan $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ dikdörtgenidir. İki değişkenli $H(.,.)$ fonksiyonunun tanım kümesi $DomH$, $\bar{\mathbf{R}}^2$ genişletilmiş reel düzlemin alt kümesidir ve aynı fonksiyonun görüntü kümesi $RanH$ fonksiyonu, \mathbf{R} reel eksenin alt kümesidir [39].

S_1 ve S_2 , $\bar{\mathbf{R}}$ genişletilmiş reel ekseninin boş olmayan alt kümeleri ve $H(.,.)$ tanım kümesi $DomH = S_1 \times S_2$ olan bir fonksiyon olsun. $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $H(.,.)$ ’nin tanım bölgesindeki tüm noktaları içeren bir bölge olsun. B bölgesinin H -hacmi,

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1) \quad (1)$$

biçimindedir.

Köşe noktaları, $H(.,.)$ fonksiyonunun tanım kümesi $DomH$ üzerinde olan tüm B dikdörtgenleri için $V_H(B) \geq 0$ ise, iki değişkenli $H(.,.)$ fonksiyonu 2-artandır.

$\mathbf{I}^2=[0,1] \times [0,1]$ 'den $\mathbf{I}=[0,1]$ 'e tanımlanan ve $C(.,.)$ ile gösterilen iki-değişkenli kopula fonksiyonu çalışmalarda kısaca C kopula fonksiyonu olarak kullanılmaktadır. $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ olmak üzere $C: \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ 2-değişkenli kopula fonksiyonunun sağlaması gereken özellikler aşağıda belirtilmiştir [39]:

1. Her $\mathbf{u} \in [0,1]$ için, \mathbf{u} 'nun üyelerinden biri 0 iken, kopula fonksiyonu 0 değerini alır.

$$C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0$$

2. Her $\mathbf{u} \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanmalıdır.

$$C(u_1, 1) = u_1 \text{ ve } C(1, u_2) = u_2$$

3. Her $\mathbf{u} \in [0,1]$ ve $\mathbf{v} \in [0,1]$ için $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ ise kopula hacmi $V_C = V_{[u_1, v_1] \times [u_2, v_2]}$ pozitifdir.

$$V_C = C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Kopula fonksiyonu, u ve v değişkenleri kullanılarak tanımlanabildiği gibi, Sklar'ın Teoremi yardımıyla dağılım fonksiyonları kullanılarak da tanımlanabilir [1]. Dağılım fonksiyonları $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)$ olan n rastlantı değişkeni olsun. Sklar'ın Teoremi'ne göre,

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = C[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)] \quad (2)$$

eşitliğini sağlayan bir C kopula fonksiyonu mevcuttur.

$F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)$ marjinal dağılım fonksiyonları sürekli ise, C kopula fonksiyonu tektir ve değer kümeleri üzerinde tek olarak tanımlanır. Diğer taraftan, C bir kopula fonksiyonu ve $F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)$ marjinal dağılım fonksiyonları ise $C[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)]$ fonksiyonu n rastlantı değişkeninin ortak olasılık dağılım fonksiyonudur. Sklar'ın Teoremi, kopula fonksiyonlarının varlığını gösteren bir teoremdir. Kopula fonksiyonunun elemanları kesikli veya karma ise C fonksiyonu tek değildir ancak bir kopula fonksiyonudur.

Kopulalar parametrik ve parametrik olmayan kopulalar olarak ayrılabilir. Parametrik kopulalar genel olarak eliptik kopula (t-kopula (Student) ve Gauss kopula) ve Arşimet kopula (Clayton kopula, Gumbel kopula, Frank kopula) olarak ayrılır [40]. Parametrik olmayan kopulalar Bernstein, grid-tip ve kernel kopulalar olarak sınıflandırılabilir. Bu kopula fonksiyonlarının dışında birçok kopula fonksiyonu mevcut olup, farklı bağımlılık yapılarının modellenmesinde kullanılırlar. Eliptik kopula türlerinden biri olan Gauss kopula fonksiyonu oldukça yaygın kullanılan bir kopula türüdür.

2.1.1. Gauss Kopula

$\Phi(.,.)$ tek değişkenli standart normal dağılıma ait dağılım fonksiyonunu, $\Phi_n(., | \Gamma)$ Γ ilişki matrisine sahip n değişkenli standart normal dağılıma ait dağılım fonksiyonunu gösterebilir. $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{I}^n$ olmak üzere $C: \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}$ n -değişkenli Gauss kopula fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$C(u_1, \dots, u_n | \Gamma) = \Phi_n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n) | \Gamma) \quad (3)$$

$n=2$ durumunda elde edilecek 2-değişkenli Gauss kopula fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$C(u_1, u_2 | \Gamma) = \Phi_n(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) | \Gamma) \quad (4)$$

$$C(u_1, u_2 | \Gamma) = \frac{\partial}{\partial u_1} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-(\rho_{12})^2}} \exp\left\{-\frac{s^2-2\rho_{12}st+t^2}{2(1-(\rho_{12})^2)}\right\} ds dt \quad (5)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{bmatrix}$$

Bağımlılık modellemesi çalışmalarında Gauss kopula diğer kopula türlerine göre daha çok tercih edilir. Gauss Kopula fonksiyonunun avantajları Brigo ve diğerleri [28] ile Song [29] tarafından aşağıdaki gibi sıralanmıştır:

- Kopula fonksiyonundaki değişken sayısı çok olduğunda, Gauss kopula fonksiyonu ile çalışmak diğer parametrik kopula fonksiyonlarına göre daha kolaydır.
- Çok değişkenli normal dağılıma bağlı olarak tanımlanan Gauss kopula fonksiyonundaki ilişki ve bağımlılık ölçümleri kolay tanımlanır.
- Gauss kopula fonksiyonunun tüm bileşenleri klasik doğrusal regresyon modeli olduğunda, vektör genelleştirilmiş doğrusal model (VGDM), klasik çok değişkenli doğrusal modele dönüşür. Ancak diğer parametrik kopula türleri ile oluşturulan VGDM'ler için aynı durum söz konusu değildir.

Gauss kopula fonksiyonunun avantajları olmasına karşın; asimetrik bağımlılığın, eliptik bağımlılığın, kuyruk bağımlılığının ve dairesel simetriye göre bağımlılığın modellenmesinde yetersiz kalmaktadır [28, 30, 31, 32].

Dağılım fonksiyonları $F_{X_1}(x_1)$ ve $F_{X_2}(x_2)$ olan iki rastlantı değişkeni olsun. Eğer,

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P(X_2 > F_{X_2}^{-1}(u) | X_1 > F_{X_1}^{-1}(u)) \quad (6)$$

ise X_1 ve X_2 rastlantı değişkenleri üst kuyruk bağımlılığına sahiptir ve $\lambda_U \in (0,1]$ 'dir. Eğer,

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P(X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(u) | X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u)) \quad (7)$$

ise X_1 ve X_2 rastlantı değişkenleri alt kuyruk bağımlılığına sahiptir ve $\lambda_L \in (0,1]$ 'dir. Eğer X_1 ve X_2 rastlantı değişkenleri bağımsız ise $\lambda_U = \lambda_L = 0$ 'dır [28]. Gauss kopula fonksiyonunda üst ve alt kuyruk bağımlılığı olmadığı için $\lambda_U = \lambda_L = 0$ 'dır.

Finansal ve aktüeryal verilerde asimetrik bağımlılık ve kuyruk bağımlılığı ile karşılaşma olasılığı yüksektir. Bu nedenle özellikle gerçek veri ile yapılan uygulamalarda, bağımlılığın modellenmesinde kopula fonksiyonlarında belirli düzenlemeler yapılabilmektedir [30, 31].

2.2. Sözde-Kopula

Kopula fonksiyonları ile bağımlılık durağan olarak modellenmektedir, ancak finansal ve aktüeryal verilerdeki bağımlılık dinamik bir yapıya sahiptir. Fermanian ve Wegkamp [35, 36] çalışmalarında daha dinamik bir bağımlılık yapısı elde etmek amacıyla Patton [33, 34] tarafından öne sürülen koşullu kopulayı geliştirerek sözde-kopula fonksiyonunu tanımlamışlardır. Patton'un [34] koşullu kopula tanımı, Fermanian ve Wegkamp [36] tarafından ölçüm kuramı ve Sklar'ın Teoremi'ne ait özellikleri sağlayacak şekilde geliştirilmiştir. Koşullu ve sözde-kopulalar, Cherubini ve diğerleri [41] tarafından parametreleri ve şekli zamana göre değişen dinamik kopulalar olarak adlandırılmıştır.

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ olmak üzere $PC: I^n \rightarrow I$ n-değişkenli sözde-kopula fonksiyonun sağlanması gereken özellikler aşağıda belirtilmiştir:

1. Her $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ için, \mathbf{u} 'nun üyelerinden en az biri 0 iken $i = 1, \dots, n$ için $PC(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) = 0$ 'dır.
2. $PC(1, \dots, 1) = 1$ 'dir.
3. Her $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ ve $\mathbf{v} \in [0,1]^n$ için, $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ ($u_1 \leq v_1, \dots, u_n \leq v_n$) iken, $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ 'nin kopula hacmi olan $V_{[u_1, v_1] \times \dots \times [u_n, v_n]}$ pozitifdir [35, 41].

Sözde-kopulalar, bir özellik dışında kopula fonksiyonu özelliklerini sağlar. Sözde-kopulalara has olan bu özellik, $PC(u_1, \dots, u_n)$ çok değişkenli kopula fonksiyonunda $1 \leq k \leq n$ için u_k dışında tüm elemanların 1'e eşit olma koşulunun aranmamasıdır.

Fermanian ve Wegkamp [35] ile Cherubini ve diğerleri [41] sözde-kopulanın diğer özelliklerini tanımlamak amacıyla bazı teoremlerden yararlanmışlardır. $H(\cdot)$ R^n 'de tanımlı n-değişkenli bir dağılım fonksiyonu ve $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ R 'de tanımlı tek değişkenli n adet dağılım fonksiyonu olsun. Her $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ için $1 \leq j \leq n$ iken $F_j(x_j) = F_j(\tilde{x}_j)$ ise $H(\mathbf{x}) = H(\tilde{\mathbf{x}})$ olur. Her $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ için $H(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ eşitliğinin sağlandığı bir $C(\cdot)$ sözde-kopula fonksiyonu mevcuttur. Ayrıca $C(\cdot)$ eğer bir sözde-kopula fonksiyonu ve $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ fonksiyonları tek değişkenli dağılım fonksiyonları ise, $H(\cdot)$ fonksiyonu n-değişkenli bir dağılım fonksiyonudur [35]. $C(\cdot)$ sözde-kopulası her $j = 1, \dots, n$ ve $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ için ancak ve ancak $H(\infty, \dots, x_j, \dots, \infty) = F_j(x_j)$ eşitliğini sağlıyorsa bir kopula fonksiyonudur [41].

Sözde-Gauss kopula, en yaygın kullanılan sözde-kopula fonksiyonudur ve bir tür eliptik kopuladır. Eliptik kopulalar, eliptik dağılımlar için önerilmiş kopulalardır. Gauss dağılımı dışında finansal çalışmalara uygunluk sağlayan t-dağılımının kullanıldığı kopula fonksiyonları da vardır. Eliptik sözde-kopulalar ile daha dinamik bir yapı elde edilmektedir. Ancak dairesel simetriden dolayı alt ve üst kuyruğu aynı algılandığından, alt ve üst kuyruk bağımlılığını modelleme de yetersiz kalırlar. Zaman içinde bu sorunları gidermek için Arşimet ve sözde-Arşimet kopula fonksiyonları tanımlanmıştır [39]. Arşimet kopulalarla çok değişkenli çalışmalar yapmak zor olduğundan ve gerçek veriye uyum sağlamada sorun yaşandığından bağımlılığın modellenmesinde yetersiz kalmıştır. Kopula fonksiyonları belirli düzenlemelerle değiştirilerek [30, 31] veya farklı kopula fonksiyonları ağırlıklı ortalama veya doğrusal kombinasyon gibi belirli fonksiyonlarla bir araya getirilerek [42] bu sorunlar giderilmeye çalışılmaktadır.

2.3. Düzenlenmiş Sözde-Kopula

Kuyruk bağımlılığının olmaması, özellikle gerçek veri uygulamalarında oldukça kullanışlı olan Gauss kopula fonksiyonunun eksik yönlerinden biridir. Standart Gauss kopula yerine sözde-Gauss kopula fonksiyonunu kullanan Fang [30] ile Fang ve Madsen [31] çalışmalarında eliptik ve kuyruk bağımlılığını daha iyi modellemek amacıyla bu kopula fonksiyonlarını düzenlemişlerdir. Gerçek sigorta verileri ile kullanılabilir dinamik yapıda, eliptik bağımlılığı ve kuyruk bağımlılığını modelleyebilen düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonları önerilmiştir. Sözde-kopula fonksiyonları yeniden tanımlanırken ilişki matrisi düzenlenmiştir. Γ ilişki matrisinin elemanları olan ilişki katsayılarını; modelin kuyruğa yakınsama hızını kontrol eden a_{ij} parametresi, modelin kuyruk şeklini kontrol eden b_{ij} parametresi ile kopulanın elemanlarının (u_1, \dots, u_n) bir fonksiyonu olarak düzenleyerek Γ^* düzenlenmiş ilişki matrisi elde edilmiştir. Yapılan düzenlemeler aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- $C(u_1, \dots, u_n)$ standart bir kopula fonksiyonudur. Kesim 2.1’de verilen tüm özellikleri sağladığı varsayılır.
- $PC(u_1, \dots, u_n)$ bir sözde-kopula ise, standart kopulanın sağlaması gereken özelliklerden, $C(1, \dots, u_k, \dots, 1) = u_k$, $1 \leq k \leq p$ eşitliğini sağlamak zorunda değildir.
- $PC(u_1, \dots, u_n)$ bir düzenlenmiş sözde-kopula ise, standart kopulanın sağlaması gereken özelliklerinden biri olan; $C(1, \dots, u_k, \dots, 1) = u_k$, $1 \leq k \leq p$ eşitliğinin sağlanması gerekmez. Γ^* düzenlenmiş ilişki matrisinin elemanları olan ρ_{ij} ilişki katsayıları, modelin kuyruğa yakınsama hızını kontrol eden a_{ij} parametresi ve modelin kuyruk şeklini kontrol eden b_{ij} parametresi ile kopula fonksiyonunun elemanları olan $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ’nun bir fonksiyonu olarak $\rho_{ij}^* = f(u_i, u_j; a_{ij}, b_{ij})$ biçimindedir. Γ^* düzenlenmiş ilişki matrisi aşağıda verilmiştir.

$$\Gamma^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12}^* = f(a_{12}, b_{12}; u_1, u_2) & \dots & \rho_{1n}^* = f(a_{1n}, b_{1n}; u_1, u_n) \\ \rho_{12}^* = f(a_{12}, b_{12}; u_1, u_2) & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ \rho_{1n}^* = f(a_{1n}, b_{1n}; u_1, u_n) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Fang ve Madsen [31] ilişki katsayısını tanımlamak için beş farklı fonksiyon ele almıştır. Bu fonksiyonların seçiminde eliptik yapıdan dolayı trigonometrik fonksiyonlar tercih edilmiştir. Fang ve Madsen [31], $\rho_{ij} = f(a_{ij}, b_{ij}, u_i, u_j)$ fonksiyonunu kısaca $\rho(u, v; a, b)$ olarak ele alıp, tanımlama yapmıştır. İlişki katsayısını tanımlamak için ele aldıkları fonksiyonlar $b(1 - auv)$, $b \cos\left(\frac{\pi}{2} a(1 - uv)\right)$, $b \sin\left(\frac{\pi}{2} a(1 - uv)\right)$, $b \tan\left(\frac{\pi}{4} a(1 - uv)\right)$ ve $b \exp\{-a(1 - uv)\}$ ’dır. İlk dört fonksiyon için $a \in [0, 1]$, son fonksiyon için $a \in [0, \infty)$ ’dır. Tüm fonksiyonlar için $b \in [-1, 1]$ alınmıştır.

Bu fonksiyonlar 0 ve 1 aralığında değer alan fonksiyonlardır. $a = 0$ ve $b = 0$ olduğunda, düzenlenen kopula fonksiyonları bilinen kopula fonksiyonlarına dönüşmektedir. Tanımlanan beş fonksiyonda, $b = 0$ ise $\rho = 0$ olacağından kopula modeli $C(u, v) = uv$ biçiminde bağımsız kopula modeline dönüşmektedir. $a = 0$ iken, Fonksiyon 3 ve Fonksiyon 4 için, $\rho = 0$ olacağından kopula modeli bağımsız kopula modeline dönüşmektedir. $a = 0$ iken; Fonksiyon 1, Fonksiyon 2 ve Fonksiyon 5 kopula modeli sözde- Gauss kopula modelidir [31].

Fang ve Madsen [31] tarafından önerilen düzenlenmiş kopula fonksiyonunun Gauss kopula fonksiyonuna göre daha kullanışlı olmasını sağlayan özellikler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Kalın kuyruklu, alt/üst kuyruklu ve eliptik dağılımlar ile iyi sonuçlar verir.
- Simetriklik ve asimetriclik sorununa çözüm sunar.
- Pozitif ve negatif bağımlılık sorununa çözüm sunar.
- Sözde-kopula, olasılık yoğunluk fonksiyonu için kapalı form tanımlayabilir.

3. Sözde-Kopula Fonksiyonlarının Düzenlenmesi

Sözde-kopula fonksiyonları, Kesim 2.3’te verilen düzenlemeden sonra da sözde-kopula fonksiyonu olma özelliklerini korur. Bu özelliklerin sağlandığı aşağıda gösterilmiştir. $PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*)$ eşitliğinde q_{i1} ve q_{i2} normal skorlarının $\Phi^{-1}(u_{i1})$ ve $\Phi^{-1}(u_{i2})$ değerlerine eşit olduğu bilgisiyle, değişkenler y ve z olarak değiştirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*) = \frac{1}{N} \int_0^{u_{i1}} \int_0^{u_{i2}} \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz$$

$$N = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12}^* \\ \rho_{12}^* & 1 \end{bmatrix}$$

1. **Özellik:** u_{i1} veya u_{i2} değerlerinden herhangi biri 0 olduğunda $PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*)$ kopula fonksiyonu 0 değerini alır.

$$u_{i1} = 0$$

$$PC(0, u_{i2} | \Gamma^*) = \frac{1}{N} \int_0^0 \int_0^{u_{i2}} \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz = \frac{1}{N} * 0 = 0$$

$$u_{i2} = 0$$

$$PC(u_{i1}, 0 | \Gamma^*) = \frac{1}{N} \int_0^{u_{i1}} \int_0^0 \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz = \frac{1}{N} \int_0^{u_{i1}} 0 dz = \frac{1}{N} * 0 = 0$$

2. **Özellik:** u_{i1} ve u_{i2} değerlerinden ikisi de 1 olduğunda $PC(u_{i1}, u_{i2} | \Gamma^*)$ kopula fonksiyonunu 1 değerini alır.

$$u_{i1} = 1 \text{ ve } u_{i2} = 1$$

$$PC(1,1 | \Gamma^*) = \frac{1}{N} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz$$

$$N = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz \text{ biçiminde tanımlandığından,}$$

$$PC(1,1 | \Gamma^*) = \frac{1}{N} * N = 1$$

3. **Özellik:** Kopula hacmi $V_{[u_{i1}, v_{i1}] \times [u_{i2}, v_{i2}]} \geq 0$ 'dır.

N ve dolayısıyla $\frac{1}{N}$ pozitif değerlidir.

$$V_{[u_{i1}, v_{i1}] \times [u_{i2}, v_{i2}]} = \frac{1}{N} \int_{u_{i1}}^{v_{i1}} \int_{u_{i2}}^{v_{i2}} \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z) | \Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} dydz$$

$$N = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z)|\Gamma^*)}{\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z))} > 0$$

$$\frac{1}{N} > 0$$

İntegralin içindeki tüm değerler pozitif değerlidir.

$$0 \leq \phi_2(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z)|\Gamma^*) \leq 1 \text{ (iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu)}$$

$$0 \leq \phi(\Phi^{-1}(y)) \leq 1 \text{ (tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu)}$$

$$0 \leq \phi(\Phi^{-1}(z)) \leq 1 \text{ (tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu)}$$

$$\phi(\Phi^{-1}(y))\phi(\Phi^{-1}(z)) > 0 \text{ (tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonu)}$$

İntegrali oluşturan tüm değerler 0 veya 0'dan büyük olduğundan kopula hacmi 0 veya 0'dan büyüktür.

$$V_{[u_{i1}, v_{i1}]x[u_{i2}, v_{i2}]} \geq 0$$

İki değişkenli kopula fonksiyonu ile ilgili özel bir durum söz konusudur. İki değişkenli kopula fonksiyonunda kopula hacmi, $0 \leq u_{i1} < u_{i2} \leq 1$ ve $0 \leq v_{i1} < v_{i2} \leq 1$ olmak üzere,

$$V_{[u_{i1}, v_{i1}]x[u_{i2}, v_{i2}]} = C(u_{i2}, v_{i2}) - C(u_{i1}, v_{i2}) - C(u_{i2}, v_{i1}) + C(u_{i1}, v_{i1})$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu fonksiyon, $[u_{i1}, v_{i1}]x[u_{i2}, v_{i2}]$ bölgesinde,

$P(u_{i1} \leq u \leq u_{i2}, v_{i1} \leq v \leq v_{i2})$ bir dağılım fonksiyonudur. Bir dağılım fonksiyonu olduğu için $P(u_{i1} \leq u \leq u_{i2}, v_{i1} \leq v \leq v_{i2}) \geq 0$ 'dır. Diğer bir ifade ile, $V_{[u_{i1}, v_{i1}]x[u_{i2}, v_{i2}]} \geq 0$ olur ve üçüncü özelliğin de sağlandığı görülür.

Fang ve Madsen [30, 31] çalışmalarında önerdikleri düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonlarının, standart Gauss kopula fonksiyonuna göre daha iyi olduğunu uyum iyiliği testleri ile incelemişlerdir. Ayrıca düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonun diğer sözde-kopulara göre daha iyi performans gösterdiği ve daha esnek bir model olduğu sigorta ve finans verisini içeren gerçek veri analizi ve Kendall'ın τ yaklaşımına göre yapılan benzetim çalışması ile gösterilmiştir. Düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonun, sözde-Gauss kopula fonksiyona göre kuyruk bağımlılığını daha iyi modellediği ve yine düzenlenmiş sözde Gauss kopula fonksiyonun, parametrik kopula türlerinden biri olan Arşimet kopulalara göre dairesel simetriye göre bağımlılığı daha iyi modellediği gösterilmiştir.

4. Bağımlılık Varsayımı Altında Hasar Tutarı ile Sayısının Ortak Dağılım ve Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

Bu çalışmada sözde-kopula fonksiyonları üzerindeki düzenleme, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelleri [43] yardımıyla bağımlılık varsayımı altında elde edilen hasar tutarı ile sayısının ortak dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları ile gösterilmiştir. Bu nedenle kopula regresyon modelleri [7, 8] ile düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modellerine [43] kısaca değinilmiştir.

Hasar tutarının gamma ve hasar sayısının Poisson dağılımlı olduğu varsayımı altında, Γ ilişki matrisi ve $C(. . . |\Gamma)$ Gauss kopula fonksiyonunu göstermek üzere, kopula regresyon modeli,

$$C(\text{Gamma GDM, Poisson GDM}|\Gamma)$$

biçiminde oluşturulmaktadır. Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelinin elde edilmesi amacıyla Fang [30] tarafından önerilen düzenlenmiş sözde-kopula fonksiyonu, Czado ve diğerleri [7] tarafından önerilen karma regresyon modeli içine dahil edilmiş ve özellikle hayat-dışı sigortalarda hasar tutarı ile sayısı arasındaki bağımlılığın modellenmesinde kullanılan modeller önerilmiştir. Γ^* düzenlenmiş ilişki matrisi ve $PC(\cdot, \cdot | \Gamma^*)$ düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonu olmak üzere, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli,

$$PC(\text{Gamma GDM, Poisson GDM} | \Gamma^*)$$

biçiminde oluşturulabilir [43]. Kastenmeier [8] ile Czado ve arkadaşlarının [7] çalışmasına benzer şekilde kopula fonksiyonun türevi, kısmi artık test istatistiği yardımıyla ifade edilirse,

$$PC'_1(u_1, u_{i_2} | \Gamma^*) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_{i_2}) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) := D_{\rho_{12}^*}(u_1, u_{i_2}) \quad (8)$$

ilişkisi elde edilir. Hasar sayısına ilişkin kesikli kısmın kopula türevi için

$$PC'_1(u_1, u_{i_2}^- | \Gamma^*) := \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_{i_2}^-) - \rho_{12}^* \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{(1 - (\rho_{12}^*)^2)}} \right) := D_{\rho_{12}^*}(u_1, u_{i_2}^-) \quad (9)$$

ilişkisi kurulmuştur.

$PC'_1(u_1, u_{i_2} | \Gamma^*)$ kopula türevi, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna geçmek amacıyla bulunmuştur. Kopula fonksiyonu ortak olasılık dağılım fonksiyonu ile kopula türevi de ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ilişkilidir. Bağımlılık varsayımı altında hasar tutarı ile sayısına ait ortak olasılık dağılım fonksiyonu Skalar'ın Teoremi yardımıyla Eşitlik (10) ile ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu karma kopula yaklaşımı [7], Radon-Nikodym Türevi [29] yardımıyla Eşitlik (11) ile aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$F_{X_1 X_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = PC(u_{i_1}, u_{i_2} | \Gamma^*) \quad (10)$$

$$f_{X_1 X_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = f_{X_1}(x_{i_1}) [PC'_1(u_{i_1}, u_{i_2} | \Gamma^*) - PC'_1(u_{i_1}, u_{i_2}^- | \Gamma^*)] \quad (11)$$

$PC'_1(\cdot, \cdot | \Gamma^*) := D_{\rho_{12}^*}(\cdot, \cdot)$ olduğundan Eşitlik (11),

$$f_{X_1 X_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \begin{cases} f_{X_1}(x_{i_1}) \left[D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i_1}), F_{X_2}(x_{i_2}) \right) \right], & x_{i_2} = 0 \\ f_{X_1}(x_{i_1}) \left[D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i_1}), F_{X_2}(x_{i_2}) \right) - D_{\rho_{12}^*} \left(F_{X_1}(x_{i_1}), F_{X_2}(x_{i_2} - 1) \right) \right], & x_{i_2} \geq 1 \end{cases} \quad (12)$$

biçiminde Eşitlik (12) ile ifade edilebilir. Burada Karadağ Erdemir [43] tarafından önerilen düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli yardımıyla elde edilmiş hasar tutarı ile sayısına ait ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları en sade şekliyle özetlenmiştir. Model varsayımları, fonksiyonların elde edilme aşamaları hakkında detaylı bilgi için Karadağ Erdemir'in [43] çalışması incelenebilir.

5. Uygulama

Sözde-kopula fonksiyonunun uygulamalarında sözde-gözlemlerden yararlanılır [30, 31]. R_{ij} , X_{ij} rastlantı değişkeninin rankı ve $\hat{u}_{ij} = \frac{R_{ij}}{(n+1)}$ olmak üzere, $\hat{\mathbf{u}}_i = (\hat{u}_{i1}, \dots, \hat{u}_{id})^T$ sözde-gözlemlerini göstermektedir. $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})^T$ rastlantı değişkenlerinden rank yardımıyla hesaplanır ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, d$). $\hat{F}_j(\cdot)$

dağılım fonksiyonu ve $\frac{n}{(n+1)}$ ölçekleme katsayısı olmak üzere, bir sözde-gözlem $\hat{u}_{ij} = \frac{n\hat{F}_j(X_{ij})}{(n+1)}$ biçiminde dağılım fonksiyonu yardımıyla da ifade edilir [44]. Gauss kopula fonksiyonu içinde $\hat{\mathbf{u}}_i = (\hat{u}_{i1}, \hat{u}_{i2}) \in [0,1]^2$ sözde-gözlemlerinden yararlanılmıştır. Sözde-gözlemler ile çalışmanın avantajı, kitleyi en iyi şekilde temsil edecek örnekleme çalışma olanağı sağlamasıdır [45]. Sözde-gözlemler R’da copula paketi altındaki *pobs()* fonksiyonundan yararlanarak, Sigorta Bilgi Merkezi’nden (SBM) alınan 2017 yılı Türkiye kasko sigortalarına ait hasar tutarı ve sayılarından üretilmiştir. SBM’den elde edilen hasar değişkenlerine ait betimleyici istatistikler Çizelge 1’de verilmiştir.

Çizelge 1. Hasar değişkenlerinin betimleyici istatistikleri

	Minimum	1.Çeyrek	Medyan	Ortalama	3.Çeyrek	Maximum
Toplam Hasar Tutarı	51,67	425	1.000	2.128,48	2.350	174.206
Ortalama Hasar Tutarı	51,67	429	966,43	2.068,57	2.249,37	130.000
Hasar Sayısı	1	1	1	1,035	1	8

Hasar tutarı değişkenini modellemek için Gamma GDM ve hasar sayısı değişkenini modellemek için Poisson GDM’den yararlanılmıştır. Bu iki marjial GDM, düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonu içine dahil edilerek Dördüncü Bölüm ’de bahsedilen düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelleri elde edilmiştir.

Sözde-Gauss kopula fonksiyonu, kopulanın parametresi olan ilişki katsayısı yardımıyla düzenlendiğinden, düzenlemenin faydasını analiz etmek amacıyla, sabit ilişki katsayılı sözde-Gauss kopula fonksiyonu ve çeşitli fonksiyonlarla düzenlenmiş sözde-Gauss kopula fonksiyonlarının perspektif ve izohips grafikleri elde edilmiştir. Düzenlemede Fang ve Madsen’in [31] çalışmasındaki üç fonksiyon ele alınmıştır. a_{12} , modelin kuyruğa yakınsama hızını ve b_{12} , modelin kuyruk şeklini kontrol eden parametreler, (\hat{u}_1, \hat{u}_2) sözde-gözlemler olmak üzere bu fonksiyonlar;

$$\rho_{12}^{*1} = b_{12} \cos\left(\frac{\pi}{2} a_{12}(1 - \hat{u}_1 \hat{u}_2)\right), \quad a_{12} \in [0, \infty) \text{ ve } b_{12} \in [-1, 1] \quad (13)$$

$$\rho_{12}^{*2} = b_{12} \sin\left(\frac{\pi}{2} a_{12}(1 - \hat{u}_1 \hat{u}_2)\right), \quad a_{12} \in [0, \infty) \text{ ve } b_{12} \in [-1, 1] \quad (14)$$

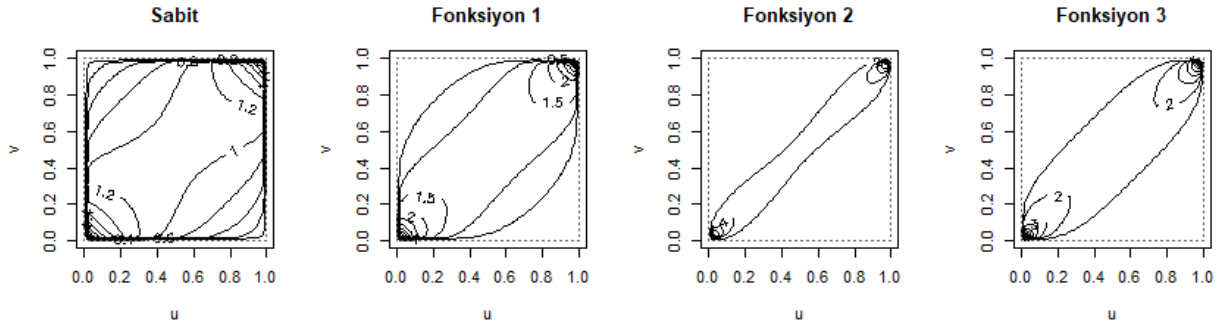
$$\rho_{12}^{*3} = b_{12} \tan\left(\frac{\pi}{4} a_{12}(1 - \hat{u}_1 \hat{u}_2)\right), \quad a_{12} \in [0, \infty) \text{ ve } b_{12} \in [-1, 1] \quad (15)$$

biçimindedir. Fonksiyon 1, 2 ve 3 sırasıyla ρ_{12}^{*1} , ρ_{12}^{*2} ve ρ_{12}^{*3} ile gösterilmiştir.

Düzenlenmiş Gauss kopula fonksiyonlarının perspektif ve izohips grafiklerini vermeden önce kısaca bu grafiklerin tanımının ve özelliklerinin verilmesi faydalıdır. Perspektif grafikleri değişkenler arasındaki ilişkileri incelemek amacıyla kullanılmaktadır. Üç boyutlu grafik yorumları zor olduğundan, perspektif grafikleri yerine genellikle iki boyutlu izohips eğrileri yorumlanır. Başka bir ifade ile izohips eğrileri üç boyutlu şekilleri iki boyutlu olarak ifade eder. Gauss kopula fonksiyonu ile çalışıldığından çok değişkenli normal dağılımdan yararlanır. İzohips eğrileri özdeğerler ve varyans-kovaryans matrisinin özvektörleri yardımıyla çizilir. İzohips eğrileri grafiğinde çizgiler eşit olasılıklı olayları gösterir ve olasılık izohipsleri eliptik bir şekle sahiptir. Elipslerin yönü özdeğerlerin yönüne, elipslerin uzunluğu ise özvektör çarpımlarına bağlıdır [46].

(\hat{u}_1, \hat{u}_2) sözde-gözlem çifti yardımıyla sabit ilişki katsayısı, fonksiyon 1, 2 ve 3’e göre düzenlenmiş ilişki katsayılarına göre izohips eğrileri verilmiştir. Çok sayıda farklı ρ , a_{12} ve b_{12} değerleri ile grafikler çizdirilmiştir. Kopula fonksiyonları üzerinde ilişki matrisi yardımıyla düzenleme yapmanın avantajının daha

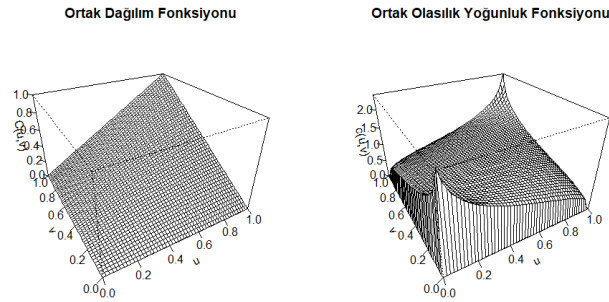
iyi anlaşılması için sabit ve düzenlenmiş ilişki katsayılı fonksiyonlar için $\rho=0,30$, $a_{12}=0,75$ ve $b_{12}=0,75$ alındığında elde edilen grafik çizimleri Şekil 1’de verilmiştir.



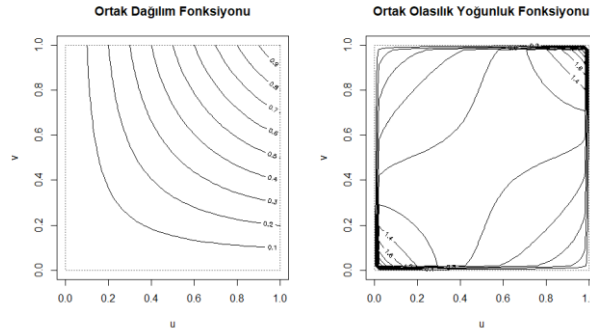
Şekil 1. Sabit ve düzenlenmiş ilişki katsayılı sözde-Gauss kopula fonksiyonlarına göre ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının izohips eğrileri

Sabit ve her bir düzenlenmiş ilişki katsayısı için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafiklerine bakılırsa farklı kuyruk bölgesi olasılıkları görülmüştür. İlişki katsayısının sabit bir değer yerine, fonksiyon şeklinde düzenlenmesi daha esnek ve dinamik bir bağımlılık modellemesi sağlamaktadır. Ayrıca kuyruğun şekli fonksiyondan fonksiyona değiştiği için farklı kuyruk bağımlılık yapıları elde edilebilmektedir. Bu düzenleme risk grubunun özelliğine göre farklı ilişki katsayıları ve dolayısıyla farklı ilişki matrisleri ile çalışılmasına olanak tanımaktadır.

Düzenlemenin etkisi incelendikten sonra, düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli ile bulunan hasar tutarı ve sayısının ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının üç boyutlu perspektif ve iki boyutu izohips eğrileri sabit $\rho_{12}=0,25$ ilişki katsayısı için sırasıyla Şekil 2’de ve Şekil 3’te verilmiştir.



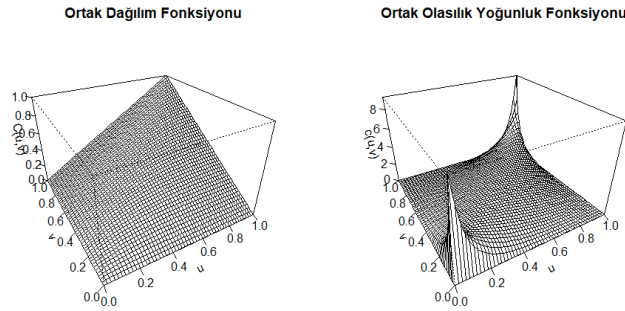
Şekil 2. Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun perspektif grafiği (sözde-Gauss kopula)



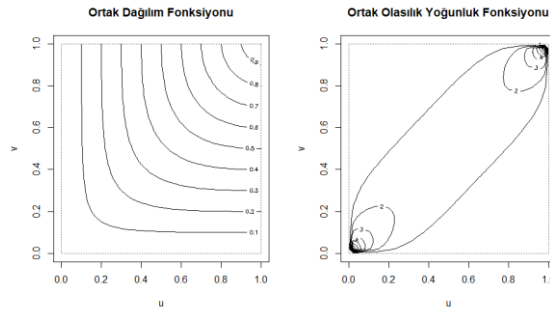
Şekil 3. Hasar tutarı ve sayısının ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izohips eğrileri (sözde-Gauss kopula)

Sabit ilişki katsayılı sözde-Gauss kopulanın kullanıldığı durumda, Şekil 2’de üç boyutlu olarak verilen ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları, Şekil 3’te iki boyutlu ifade edilmiştir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna ait izohips eğrisinden, pozitif yönlü ve düşük düzeyli bir ilişki gözlemlenmektedir ve $\rho=0,25$ gibi pozitif küçük bir değer olduğundan bu beklenen bir sonuçtur.

Düzenlenmiş fonksiyonlardan ρ_{12}^{*3} için, $a_{12}=0,75$ ve $b_{12}=0,75$ iken hasar tutarı ve sayısının ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının üç boyutlu perspektif ve iki boyutlu izohips eğrilerini sırasıyla Şekil 4’te ve Şekil 5’te verilmiştir.



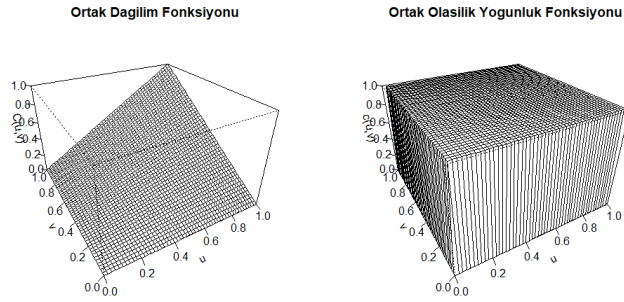
Şekil 4. Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun perspektif grafiği (düzenlenmiş sözde-Gauss kopula)



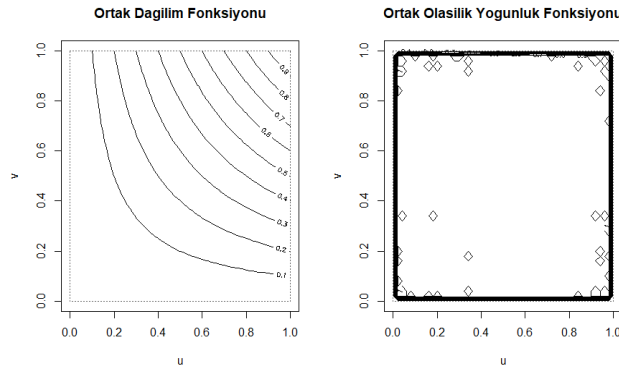
Şekil 5. Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izohips eğrileri (düzenlenmiş sözde-Gauss kopula)

Üçüncü fonksiyona göre düzenlenmiş ilişki katsayılı sözde-Gauss kopulanın kullanıldığı durumda, Şekil 4'te üç boyutlu olarak verilen ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları, Şekil 5'te iki boyuta indirgenmiştir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna ait izohips eğrisinden pozitif yönlü ve yüksek düzeyli bir ilişki gözlemlenmektedir. $a_{12}=0,75$ ve $b_{12}=0,75$ katsayıları pozitif ve bulunduğu değer aralığına göre yüksek değerler olduğundan, izohips eğrisinden gözlenen ilişki beklenen bir sonuçtur.

Yukarıda Şekil 1, Şekil 3 ve Şekil 5 ile incelenen tüm ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafiklerine bakıldığında, farklı kuyruk bölgesi olasılıkları görülmüştür. Standart Gauss kopula fonksiyonunda kuyruk bağımlılığı yoktur. Düzenleme ile Gauss kopulanın bu eksikliği esnetilir ve farklı kuyruk bağımlılık yapıları elde edilebilir [30, 31]. Normal dağılım simetrik bir dağılım olduğundan, alt ve üst kuyruk bölgesindeki olasılık değerleri aynı ve simetriktir. $\rho = 0$ olduğunda, sözde-Gauss kopula fonksiyonu bağımsız sözde-Gauss kopula fonksiyonu $C(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \hat{u}_1 \hat{u}_2$ 'ye dönüşür. Gauss kopula fonksiyonunda ilişki durumu bağımlılık ile doğrudan ilişkilendirilebildiğinden, değişkenler arasında ilişki olmadığı durumda diğer bir ifade ile bağımsızlık durumunda ($\rho_{12}=0$) grafikler, Şekil 6 ve Şekil 7 ile verilmiştir.



Şekil 6. Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izohips eğrileri (bağımsız sözde-Gauss kopula)



Şekil 7. Ortak olasılık dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izohips eğrileri (bağımsız sözde-Gauss kopula)

Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun perspektif grafiği, ilişki olmaması diğer bir ifade ile bağımsızlık durumunda dikdörtgensel bir şekil almıştır. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun izohips grafiğinden ise bağımsızlık durumu açıkça görülmektedir.

6. Sonuç ve öneriler

İstatistiksel ve finansal bağımlılık modellemesi çalışmalarında sıklıkla kullanılan kopula fonksiyonları zaman içinde aktüerya bilimlerinde de yoğun olarak kullanılmaya başlamıştır. Hayat sigortalarından sağlık sigortalarına, sağlık sigortalarından hayat dışı sigortalara kadar aktüerya bilimlerinin birçok alt branşında ve finansal aktüeryal verilerdeki bağımlılık çalışmalarında kopula fonksiyonlarından yararlanılmaktadır.

Özellikle eliptik sözde-kopula fonksiyonlarından sözde-Gauss kopula fonksiyonları eliptik dağılım özellikleri nedeniyle diğer kopula türlerine göre daha çok tercih edilmektedir. Avantajlarının yanında Gauss kopula fonksiyonlarının bağımlılık modellemesinde yetersiz kaldığı noktalarda vardır. Gauss kopula fonksiyonları, özellikle gerçek sigorta ve finans verilerinde karşılaşımla olasılığı yüksek olan kuyruk bağımlılığı, asimetrik bağımlılık, eliptik bağımlılık ve dairesel simetriye göre bağımlılık gibi bazı bağımlılık türlerini modellemede eksik kalmaktadır. Bu soruna çözüm üretmek amacıyla Gauss kopula fonksiyonunun parametresi olan ilişki katsayısı, belirli fonksiyonlarla düzenlenerek esnek bir bağımlılık modellemesi elde edilmiştir.

Fang ve Madsen [31] tarafından önerilen düzenleme yaklaşımı, Karadağ Erdemir [43] tarafından sözde-kopula regresyon modellerine dâhil edilmiştir. Bu kombinasyon sonucunda düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modelleri tanımlanmış ve bağımlılık varsayımı altında hasar tutarı ile sayısının ortak dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının kapalı formları elde edilmiştir.

Kopula fonksiyonları üzerinde düzenleme yapılması sonucunda esnek bir bağımlılık modellemesi elde edilmiştir. Düzenlemenin sağladığı etkinlik, bağımlılık varsayımı altında hasar tutarı ve sayısının ortak dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarının perspektif ve izohips eğrilerinin grafikleri ile incelenmiştir. Çalışılan verideki hasar tutarı ve sayısı arasındaki ilişkiye göre belirlenebilecek fonksiyonlar ve yine fonksiyonlarda kullanılacak kuyruğa yakınsama hızını ve kuyruğun şeklini kontrol eden parametreler yardımıyla kullanıcı tarafından kontrol edilebilen esnek bir bağımlılık modellemesi elde edilmiştir. Sözde fonksiyonların kullanılmasıyla birlikte daha dinamik ve farklı fonksiyonların kullanılabilmesiyle daha esnek bir bağımlılık modellemesi sunulmuştur.

Kaynaklar

- [1] A. Sklar, 1959, Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 8, 229.
- [2] E. Frees, E. Valdez, 1998, Understanding Relationships Using Copulas, *North American Actuarial Journal*, 2, 1.
- [3] E. S. Sarıdaş, 2012, Bağımlı Yaşam Sürelerinin Modellenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [4] Ö. Bakar, 2018, Bağımlı Çoklu Hayat Anüitelerinde Uzun Ömürlülük Riskinin Stokastik Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [5] L. Hua, 2015, Tail Negative Dependence and Its Applications for Aggregate Loss Modeling, *Insurance: Mathematics and Economics*, 61, 135.
- [6] A. Şentürk Acar, 2016, Sağlık Sigortalarında Toplam Hasar Üzerinde Heterojenliğin Etkisi, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [7] C. Czado, R. Kastenmeier, E.C. Brechmann, A. Min, 2012, A Mixed Copula Model for Insurance Claims and Claim Sizes, *Scandinavian Actuarial Journal*, 4, 278.
- [8] R. Kastenmeier, 2008, Joint Regression Analysis of Insurance Claims and Claim Sizes, Diploma Thesis, Technische Universität München, Mathematical Sciences.
- [9] N. Krämer, E. C. Brechmann, D. Silvestrini, C. Czado, 2013, Total Loss Estimation Using Copula-Based Regression Models, *Insurance: Mathematics and Economics*, 53, 829.
- [10] K. Wang, A. H. Lee, K. K. W. Yau, P. J. W. Carrivick, 2003, A Semisupervised Regression Model for Mixed Numerical and Categorical Variables, *Accident Analysis and Prevention*, 35 (4), 625.
- [11] L. Madsen, Y. Fang, 2011, Joint Regression Analysis for Discrete Longitudinal Data, *Biometrics*, 67 (3), 1171.

- [12] E. W. Frees, E. A. Valdez, 2008, Hierarchical Insurance Claims Modelling, *Journal of the American Statistical Association*, 5, 41.
- [13] L. Bermúdez, D. Karlis, 2011, Bayesian multivariate Poisson models for insurance ratemaking, *Insurance: Mathematics and Economics*, 48 (2), 226.
- [14] J. Ren, 2012, A Multivariate Aggregate Loss Model, *Insurance: Mathematics and Economics*, 51, 402.
- [15] J. D. Cummins, L. J. Wiltbank, 1983, Estimating The Total Claims Distribution Using Multivariate Frequency and Severity Distributions, *Journal of Risk and Insurance*, 50 (3), 377.
- [16] E. W. Frees, G. Myers, C. David, 2010, Dependent Multi-peril Ratemaking Models, *Astin Bulletin*, 40, 699.
- [17] M. Ayuso, L. Bermúdez, M. Santolino, 2016, Copula-Based Regression Modeling of Bivariate Severity of Temporary Disability And Permanent Motor Injuries, *Accident Analysis & Prevention*, 89, 142.
- [18] Y. Fang, 2014, A Bayesian Approach to Inference and Prediction for Spatially Correlated Count Data Based on Gaussian Copula Model, *International Journal of Applied Mathematics*, 44(3), 126.
- [19] P. Shi, K. Shi, 2017, Territorial Risk Classification Using Spatially Dependent Frequency-Severity Models, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 47 (2), 437.
- [20] G. Pettere, T. Kollo, 2006, Modelling Claim Size in Time via Copulas, in Transactions of 28th International Congress of Actuaries.
- [21] P. Weke, C. Ratemo, 2013, Estimating IBNR Claims Reserves for General Insurance Using Archimedean Copulas, *Applied Mathematical Sciences*, 7 (25), 1223.
- [22] E. Usta, 2016, Risk Premium Estimation in MTPL Insurance Using Copula: Turkey Case, Master of Science Thesis, The Graduate School of Applied Mathematics of Middle East Technical University, Ankara.
- [23] E. Usta, 2016, The Estimation of IBNR Reserve Using Copula, *Journal of Insurance Research*, 12 (10), 3.
- [24] E. Kole, K. Koedijk, M. Verbeek, 2007, Selecting Copulas for Risk Management, *Journal of Banking & Finance*, 31 (8), 2405.
- [25] B. Z. Karagül, 2013, Hayat Dışı Sigortalarda Doğrusal Olmayan Bağımlılığın Kopulalar ile Dinamik Finansal Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Yüksek Lisans Tezi, Ankara.
- [26] U. Karabey, 2015, Importance of Modelling the Dependence for Risk Capital Allocation, *Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences*, 8 (1), 1.
- [27] Z. M. Landsman, E. A. Valdez, 2003, Tail conditional expectations for elliptical distributions. *North American Actuarial Journal*, 7 (4), 55-71.
- [28] D. Brigo, A. Pallavicini, R. Torresetti, 2010, *Credit Models and The Crisis: A Journey Into Cdos, Copulas, Correlations And Dynamic Models*, John Wiley & Sons.
- [29] P. X.-K. Song, 2007, *Correlated Data Analysis: Modeling, Analytics, And Applications*. Springer Science & Business Media, Ontario, Canada.
- [30] Y. Fang, 2012, Extensions to Gaussian Copula Models, Doctoral Dissertation, Oregon State University.
- [31] Y. Fang, L. Madsen, 2013, Modified Gaussian Pseudo-Copula: Application in Insurance and Finance, *Insurance: Mathematics and Economics*, 53, 292.
- [32] G. Masarotto, C. Varin, 2017, Gaussian Copula Regression in R, *Journal of Statistical Software*, 77 (8).
- [33] A. J. Patton, 2001, Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula, UCSD Discussion Paper No. 01-09, SSRN.
- [34] A. J. Patton, 2006, Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence, *International Economic Review*, 47 (2), 527.
- [35] J. D. Fermanian, M. Wegkamp, 2004, Time Dependent Copulas. Preprint INSEE, Paris, France.
- [36] J. D. Fermanian, M. Wegkamp, 2012, Time-Dependent Copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 110, 19.
- [37] Y. Fang, L. Madsen, L. Liu, 2014, Comparison of Two Methods to Check Copula Fitting, *International Journal of Applied Mathematics*, 44 (1).
- [38] M. A. Boateng, A. Y. Omari-Sasu, R. K. Avuglah, N. K. Frempong, 2017, On Two Random Variables and Archimedean Copulas, *International Journal of Statistics and Applications*, 7 (4), 228.
- [39] R. B. Nelsen, 2006, *An Introduction to Copulas*, Springer Science & Business Media, Portland, Oregon, USA.
- [40] R. A. Parsa, S. A. Klugman, 2011, Copula Regression, *Variance Advancing and Science of Risks*, 5, 45.
- [41] U. Cherubini, S. Mulinacci, F. Gobbi, S. Romagnoli, 2011, *Dynamic Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons.
- [42] Z. S. Ouyang, H. Liao, X. Q. Yang, 2009, Modeling Dependence Based on Mixture Copulas and Its Application in Risk Management, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 24 (4) 393.
- [43] Ö. G. Erdemir, 2020, Düzenlenmiş Sözcü-Kopula Regresyon Modeli, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [44] I. Kojadinovic, J. Yan, 2010, Modeling Multivariate Distributions with Continuous Margins Using The Copula R Package, *Journal of Statistical Software*, 34(9) 1.

- [45] R. N. Mortensen, 2013, Pseudo-Observations in Survival Analysis, Master of Science Thesis, Aalborg University.
- [46] Steorts, R. C., 2015, Visualizing the Multivariate Normal, Lecture 9, http://www2.stat.duke.edu/~rsc46/lectures_2015/02-multivar2/02-multivar2.pdf.