FELSEFE DÜNYASI

2006/1 Sayı: 43 YILDA İKİ KEZ YAYIMLANIR ISSN 1301-0875

Sahibi
Türk Felsefe Derneği Adına
Başkan Prof. Dr. Necati ÖNER

Sorumlu Yazı İşleri Müdürü
Prof. Dr. Ahmet İNAM

Felsefe Dünyası Hakemli Bir Dergidir.

Felsefe Dünyası 2004 yılından itibaren PHILOSOPHER'S INDEX ve TÜBİTAK /ulakbim tarafından dizinlenmektedir.

Yazışma ADRESİ
P.K. 21 Yenişehir / ANKARA
Tel&Fax: 0.312 231 54 40

Fiyatı: 15 YTL (KDV Dahil)

Banka Hesap No:
Vakıfbank Kızılay Şubesi: 00158007288336451

Dizgi ve Baskı
Türkiye Diyanet Vakfı
Yayın Matbaacılık ve Ticaret İşletmesi
OSTİM Örnek Sanayi Sitesi 1. Cad. 358. Sk. No: 11 Y.Mahalle / ANKARA
Tel: 0.312 354 91 31 (Pbx) • Fax: 0.312 354 91 32

ÖZ ÖBEĞİN TÜMLEYENİ KÜME MİDİR, ÖZ ÖBEK MİDİR?*

Ahmet İnam**

Bu çalışmada Russell Paradoksunun çözülmesi için oluşturulan aksiyomatik sistemlerden Von Neumann, Bernays, Gödel ve Morse'un geliştirdiği yapı içinde, Lemmon'un değinmediği bir sorunu irdelemeyi amaçlıyorum.

Kümeler kuramının, sözünü ettiğim sistem içinde, öbekler üzerine kurulduğunu söyleyebiliriz. Öbek, tıpkı $\in$ gibi tanımsız bırakılıyor. Öbek, temelde, Russell paradoksunu[1] çözmek için iki ayrılıyor: 1. Öz öbek ve Küme

Özöbeğin tanımı: Özöx $\leftrightarrow \forall y\ (x \notin y)$

Kümenin tanımı: Küm x $\leftrightarrow \exists y\ (x \in y)$

Bu yazıda irdelenecek sorun şudur: Acaba öz öbeğin tümleyeni nedir? Sistemde, kümenin tümleyeninin öz öbek olduğu kanıtlanmıştır.[2]

$\forall x$ (Küm x $\rightarrow$ Özö $\sim x$) (1)

burada $\sim x$, x öbeğinin tümleyeni anlamındadır.

Örneğin şu önerme bir teorem midir?

$\forall x$ (Özöx $\rightarrow$ Küm $\sim x$) (2)

ilk bakışta öyle görünüyor. Örneğin E'nin, evrensel öbeğin tümleyeni $\varnothing$, boş kümedir. x, yerine E yazdığımızda, yukarıdaki önerme doğru oluyor! (Boş küme, $\varnothing$, aksiyom gereği, kümedir!)

Peki aşağıdaki önerme için ne diyebiliriz?

$\forall x$ (Özöx $\rightarrow$ Özö $\sim x$) (3)

acaba hangisi teoremdir, (2) mi, (3) mü? (3)'ün yanlış olduğu daha doğrusu en az bir yanlışlayıcı yorumu olduğu, (2)'nin doğrulayıcı yorumundan anlaşılıyor. (3)'de x yerine E yazdığımızda (3) yanlış olur, çünkü ÖzöE bir teoremdir, "mantıkça" doğrudur; oysa Özö $\sim$E, Özö$\varnothing$'e eşittir. Küm$\varnothing$, aksiyom olduğuna göre, onun değillemesi olan Özö$\varnothing$ yanlıştır.

* Sevgili Hocam Teo Grünberg, sanırım 1980 yılıydı, beni masasının başına oturtmuş, önce Russell Paradoksunu anlattıktan sonra, "bak bundan şöyle kurtuluyoruz" diyerek, küme ve öz öbek tanımlarını yapmıştı. Şimdilik "birey" ve "öbek" kavramlarının eklendiği bir kümeler kuramında karar kılmışa benziyor. (*Sembolik Mantık El Kitabı*, Cilt 3, Metu Press, Ankara 2000, s. 65-127) "Şimdilik" diyorum, hocam her zaman düşüncelerini yeniler, her dem tâze düşüncelerle doludur. Bu yazımda ben yalnızca özöbek ve kümeyi göz önüne alan E. J. Lemmon'un monografisine bağlı kalacağım. (*Introduction to Axiomatic Set Theory*, Routledge and Kegan Paul, London, 1968).

**Prof.Dr. , Orta Doğu Teknik Üniversitesi

[1] Russell paradoksunun kısa bir açıklaması için Türkçe kaynaklardan biri Teo Grünberg, *Sembolik Mantık*, Cilt 3, Metu Pres, Ankara, 2000, s. 88-90.

[2] Lemmon, Teorem 105.

Acaba (2)'yi yanlışlayan, (3)'ü doğrulayan bir öbek bulunabilir mi? O zaman hem (2), hem (3) teorem olamaz. Böylece Öz öbeğini tümleyenin hem küme hem de yine bir öz öbek olabileceğini göstermiş oluruz!

Bu çalışmada, (3)'ü doğru kılan en az iki öbek olduğunu göstermeye çalışacağım. Bunlar, Öz ve Öğ öbekleridir. Öz ve Öğ öbekleri sıralanmış ikililerden oluşurlar.

Öz = {< x, y >: x = y}, bu öbeği özdeşlik öbeği olarak adlandırabiliriz. Bu öbeği oluşturan ön üye x, ard üye y'ye eşittir!

Öğ ={< x, y >: x ∈ y }, bu öbeğe de öğelik öbeği denilebilir. Ön üyenin, ard üyenin öğesi olduğu, sıralanmış ikililerden oluşan bir öbektir. Bu iki öbek de öz öbektir.[3]

Şimdi Öz'ün ve Öğ'ün tümleyenlerini yazalım.[4]

~Öz ={z: ∀x∀y (z ≠ <x, y> ∨ x ≠ y}

(4)

~Öğ = {z: ∀x∀y (z ≠ <x, y> ∨ x ∉ y} (5)

Acaba (4) ve (5)'le dile getirilen öbekler öz öbek midir? Bir öbeğin öz öbek olduğunu, şu teorem yardımıyla da kanıtlayabiliriz.

∀x∀y (Özöy ∧ y ⊆x → Özöx)[5] (6)

(6), bir açıdan şunu söylüyor: Eğer öz öbek olduğunu kanıtlayacağımız öbek, öz öbek olduğu önceden kanıtlanmış bir öbeği içine alırsa, ya da bir başka türlü deyişle, öz öbek olduğu kanıtlanmış bir öbek, öz öbek olduğu kanıtlanacak öbeğin alt kümesi ise, kanıt gerçekleşmiş olur. Öyleyse, acaba ~Öz ve ~Öğ'ün alt kümesi olabilecek öz öbek var mıdır? Örneğin:

∃x (x ⊆ ~Öz ∧ Özöx)

(7)

ve ∃y (y ⊆ ~Öğ ∧ Özöy)

(8)

doğru mudur?

Yanıt, "evet"tir. Bunun için aşağıdaki önermeleri kanıtlamak gerekiyor:

Öğ ⊆ ~Öz

(9)

Öz ⊆ ~Öğ

(10)

(9) ve (10) baktığımızda mantıkça eşdeğer olduğu aşağıdaki teoreme dayanarak söyleyebiliriz.

∀x∀y (x ⊆ y → ~y ⊆ ~x)[6]

Öyleyse birinin kanıtlanması yetecektir! (9)'u kanıtlarsak, Öz öbeğin tümleyeninin öz öbek olduğu iki örnek bulmuş olacağız, böylece (3)'ün doğrulayıcı iki yoru-

[3] Lemmon, Teorem 168.

[4] Tümleyen x, ~x olarak gösterilir şöyle tanımlanır: ~x = { z : z∉x}
Buradan ∀y (y∈~x ↔ Küm y ∧ y∉x).

[5] Lemmon, Teorem 100.

[6] Lemmon, Teorem 46.

munu yapmış olacak, (2)'nin teorem olmadığını göstermiş olacağız. ((3)'ün teorem olmadığı zaten gösterilmişti!) Kanıtı çözümleyici çizelge yardımıyla yapıyoruz!

Kanıtlayacağımız sav:

Öğ $\subseteq$ ~ Öz

Öğ ve ~ Öz'ü anımsayalım:

~Öz = $\{z: \forall x \forall y\ (z \neq \langle x, y\rangle \vee x \neq y)\}$

Öğ = $\{ \langle x, y\rangle: x \in y\}$

Öğ, şöyle de yazılabilir:

Öğ = $\{z: \exists x\ \exists y\ (z = \langle x, y \rangle \wedge x \in y)\ \}$[7]

Kanıta başlayabilir, 17 satırda bitirebiliriz:

1.	$\neg\ [\{z: \exists x\ \exists y\ (z = \langle x, y \rangle \wedge x \in y)\} \subseteq \{z: \forall x \forall y\ (z \neq \langle x, y\rangle \vee x \neq y)\}]$ (Savın Değillemesi)	
2.	Küm a $\wedge\ \exists x\ \exists y\ (a = \langle x, y \rangle \wedge x \in y)$	1, Alt küme tanımı
3.	$\neg$ [Küm a $\wedge \forall x \forall y\ (a \neq \langle x, y\rangle \vee\ x \neq y)$]	1,Alt küme tanımı
4.	Küm a	2
5.	$\exists x\ \exists y\ (a = \langle x, y \rangle \wedge x \in y)$	2
6.	$a = \langle b, c\rangle$	5, Tikel Özelleme
7.	$b \in c$	5, Tikel Özelleme
8.	$\neg$ Küm a $\vee\ \exists x\ \exists y\ (a = \langle x, y\rangle \wedge x = y)$	3, De Morgan
9.	$\exists x\ \exists y\ (a = \langle x, y\rangle \wedge x = y)$	4,8.ModusTollendo Ponens
10.	$a = \langle d, e\rangle$	9, Tikel Özelleme
11.	$d = e$	9, Tikel Özelleme
12.	$\langle b, c\rangle = \langle d, e\rangle$	6, 10
13.	$b = d$	12
14.	$c = e$	12
15.	$b = e$	11, 13
16.	$b = c$	14, 15
17.	$b \in b$	7, 16 X 17, Düzenlilik Aksiyomu (Axiom of Regularity)[8]

18. Yukarıdaki kanıtta ulaşılan 17. satırda $b \in b$'nin mantıkça yanlış olduğunu

göstermek için çözümleyici çizelge yöntemiyle kanıtı sürdürelim.

1. $b \in b$	(Kanıtlanacak Önerme)
2. $\forall x\ [x \neq \varnothing \rightarrow \exists y\ (y \in x \wedge x \cap y = \varnothing)]$	(Düzenlilik aksiyomu)
3. $\{b\} \neq \varnothing \rightarrow \exists y\ (y \in \{b\} \wedge \{b\} \cap y = \varnothing)$	(2, Tümel özelleme)
4. $\{b\} \neq \varnothing$	(MantıkçaDoğruÖnerme)
5. $\exists y\ (y \in \{b\} \wedge \{b\} \cap y = \varnothing)$	3, 4, Modus Ponens
6. $f \in \{b\} \wedge \{b\} \cap f = \varnothing$	5, Tikel Özelleme
7. $f \in \{b\}$	6
8. $\{b\} \cap f = \varnothing$	6

[7] Lemmon, Tanım 28.

[8] Lemmon, Aksiyom 10.

9. Küm b	1
10. $f = b$	7
11. $\{b\} \cap b = \varnothing$	8, 10
12. $\underbrace{b \in \{b\}}_{\text{Doğru}} \wedge b \in b \leftrightarrow \underbrace{b \in \varnothing}_{\text{Yanlış}}$	11, Kaplamsallık Aksiyomu
13. $b \notin b$	12, Mantıksal Eşdeğerlilik
X	
1, 13	

Böylece, Öz ve Öğ gibi iki öz öbeğin tümleyenlerin de öz öbek olduğunu göstermiş olduk. Genel olarak söylendiğinde öz öbeğin tümleyeni küme olabileceği gibi ($\sim E = \varnothing$), öz öbek de olabilir. (ÖzöÖz, Özö~Öz, ÖzöÖğ, Özö~Öğ).

ABSTRACT

Is Complement of a Proper Class, Proper Class or Not?

It is well known that in Von Neumann- Bernays- Gödel version of axiomatic set theory classes are divided into two groups: sets and proper classes. Sets are members of other classes and proper classes are not member of any class. In this paper, it has been proven that complement of a proper class may be a set as well as a proper class. Two examples of proper classes whose compliments are also proper classes are I and E.

Key Words: Axiomatic Set Theory, Von Neumann- Bernays- Gödel, Sets, Proper Classes. Complement.