FELSEFE DÜNYASI

2011/1 Sayı: 53 YILDA İKİ KEZ YAYIMLANIR ISSN 1301-0875

Felsefe Dünyası Hakemli Bir Dergidir.

Felsefe Dünyası 2004 yılından itibaren PHILOSOPHER'S INDEX ve TUBİTAK/ulakbim tarafindan dizinlenmektedir.

Yazışma ADRESİ
PK 21 Yenişehir/Ankara
Tel & Fax: 0 312 231 54 40

Fiyatı: 20 TL (KDV Dahil)

Banka Hesap No: Vakıf Bank Kızılay Şubesi: 00158007288336451

Dizgi ve Baskı
Türkiye Diyanet Vakfı
Yayın Matbaacılık ve Ticaret İşletmesi
Alınteri Bulvarı 1256 Sokak No: 11 Yenimahalle/ANKARA
Tel: 0 312 354 91 31 (Pbx) Fax: 0 312 354 91 32

SAYILAMAZ SONSUZLUK, KARAR VERİLEMEZLİK VE GÖDEL'İN EKSİKLİK TEOREMİ

Ahmet Çevik*

Birçok kuramsal bilimde olduğu gibi, teorik bilgisayar biliminin de matematikten geldiği bilinmektedir. Birşeyin sonu başka birşeyin başlangıcıdır sözü teorik bilgisayar biliminin doğuşunu en iyi biçimde yansıtan sözdür. Aslında bilgisayar bilimi, 20.yüzyıldaki modern matematiğin bir vizyonunun başarısızlıkla sonlanması, ve bir krizin ortaya çıkması sonucunda doğmuştur. Plansız gelişen bu süreci ve beklenmedik bir sonuç olarak ortaya çıkan "bilgisayar" kavramını felsefi boyutta inceleyeceğiz.

I. Sonsuz Kümeler Kuramı

Matematik denildiğinde akla gelen kavramlar kesinlik, estetik, edebiyet, ve mutlak doğruluktur. Fakat matematik tarihine baktığımız zaman bazı önemli krizler görürüz. Bu da matematiğin durağan olmadığını, değişim içinde olduğunu göstermektedir. Matematik dünyasındaki krizler, Pisagor'un teoremi ile birlikte irrasyonel sayıların keşfi ile başlamıştır. O zamanlar matematik dünyası Platon'un rasyonelizm felsefesi ile biliniyordu. Yani rasyonel bir dünyada irrasyonel sayıların keşfi matematikte bir kriz yaratmıştı. Bu buluş antik çağlardaki filozofların ve matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Sonraki zamanlarda türev ve integral kalkülüsün bulunmasıyla bir kriz daha yaşanmıştır. Artık sürekliliğe sahip olan ifadelerden ve limitlerden bahsedilmekteydi. Süreklilik düşüncesi o zamanlarda anlaşılmadığından dolayı, bu kriz Pisagor'un zamanını tekrar yaşatmıştır. O zamanlarda din bilimi üzerine çalışan felsefeci Bisop Berkeley, matematikçilerin kalkülüs üstüne olan tartışmalarını din bilimcilerin tartışmalarına benzetmiştir. Teorik bilgisayar biliminin temelini atan, bahsedeceğimiz bu kriz 19.yüzyılın sonlarına, Rus kökenli Alman matematikçi Georg Cantor'un kümeler kuramına dayanmaktadır.

1870'lerde Cantor sonsuz kavramı üstünde çalışıyordu. O zamana kadar hiçbir matematikçi sonsuz üstünde ciddi şekilde çalışmamıştır. Sonsuz, Cantor için sembolden öte bir anlam taşıyordu. Onu matematiğe çağıran ilahi gücün sonsuz kavramı olduğunu, ve eğer sonsuzu kullanmak istiyorsak onu anlamamız gerektiğini düşünüyordu. Sonsuzu anlamak isteyen Cantor, araştırmasına

* University of Leeds, Department of Pure Mathematics, email: mmac@leeds.ac.uk.) Yazar, katkılarından dolayı Prof.Dr.Teo Grünberg'e, Prof.Dr.Ahmet İnam'a, Raşit Hasan Keler'e, ve Burak Yolaçan'a teşekkür eder.)

şu soru ile başladı: Sonsuz ne kadar büyükür? Sonsuzun sadece bir matematiksel sembol olarak kullanılmasından rahatsızlık duyan ve bu kavramı kesin olarak ortaya koymak için Cantor, kümeler kuramı üzerine, özellikle kümelerin büyüklükleri yani *kardinalleri* hakkında çalışmaya başladı. Sonlu kümeler için bu problemi çözmek kolay. Aynı sayıda elemanları varsa her iki kümenin, o zaman büyüklükleri de aynıdır. Örneğin $\{a,b,c\}$ kümesi ile $\{5,e,x\}$ kümesinin büyüklükleri 3'tür. Peki 3 tek başına ne ifade etmektedir? Çözümü şöyle genelleyebiliriz: Verilen iki sonlu küme, *A* ve *B* için *A* kümesinden *B* kümesine *birebir örten f* fonksiyonu varsa o zaman $|A| = |B|$ deriz[1]. Sonsuz kümeler için sayma yöntemi mümkün olmadığı için birebir örten fonksiyon tanımlamak problemi çözecektir. Sonlu kümeler *sayılabilir* kümelerdir. Bir kümenin büyüklüğü doğal sayılar kümesinin büyüklüğüne eşitse, bu kümeye *sayılabilir sonsuz küme* denir. Aksi halde bu kümeye *sayılamaz küme* denir. Doğal sayılar *N* kümesi sayılabilir sonsuzluktadır[2]. Verilen sonsuz bir *S* kümesinin sayılabilir sonsuzlukta olup olmadığını belirlemek için *S* 'den doğal sayılar *N* kümesine birebir örten $f : S \to N$ fonksiyon bulmamız yeterlidir. Görünen o ki, iki kümenin eşitliğini belirlemek için birebir örten fonksiyon bulmak küme elemanlarını saymaktan daha etkili bir yöntem. Eğer bir küme sonlu ise veya sayılabilir sonsuz ise bu kümeye *numaralandırılabilir küme* (enumerable) denir. Aksi halde bu kümeye *numaralandırılamaz küme* denir. Doğal sayılar kümesi sayılabilir sonsuzlukta olduğuna göre bu, kümenin numaralandırılabilir olduğunu da göstermektedir. Cantor, rasyonel sayıların da numaralandırılabilir olduğunu göstermistir. Bunu da *zigzag*[3] yöntemi ile yapmıştır. Çünkü rasyonel sayılar pay ve payda olmak üzere iki doğal sayıdan oluşmaktadır. Her bir çift bir doğal sayı ile eşleştirilirse, bu doğal sayılar ile rasyonel sayılar kümesinin büyüklüklerinin aynı oldugunu gösterir. Doğal sayılar, tamsayılar ve rasyonel sayılar sayılabilir sonsuzluktadır. Cantor'un büyük buluşu gerçel sayıların sayılamaz sonsuzlukta olduğunu göstermesi ile başlamıştır[4]. Kanıtında, Cantor 0 ile 1 arasındaki gerçel sayıların sadece ondalık kısımlarını listelemiştir. *Diyagonal inşa* olarak adlandırılan yöntem sonucunda Cantor öyle bir sayı oluşturur ki oluşturduğu sayı listede yoktur! Biz bunu açıkça görülmesi için ikilik tabanda göstereceğiz. Her rakam ikilik sistemde kodlanabileceği için bu sorun olmayacaktır. Inşamızda [0-1] aralığındaki sayıları göz önünde bulunduracağız. O halde bunu 0 ve 1'lerden oluşan diziler için şöyle gösterebiliriz:

1 Bir A kümesinin kardinali |A| şeklinde gösterilir.

2 N = {0,1,2,...}

3 Zigzag yöntemi sonsuzluğa takılmamak için geliştirilen bir sayma yöntemidir. Bu yöntem matematikteki ve bilgisayar bilimindeki birçok kanıtlarda ve inşalarda kullanılmaktadır.

4 Gerçel sayılar kümesi R ile gösterilir.

S_1 = **1**, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, . . .
S_2 = 0, **0**, 1, 0, 1, 1, 0, 0, . . .
S_3 = 0, 0, **0**, 1, 0, 1, 0, 0, . . .
S_4 = 1, 0, 0, **0**, 1, 1, 1, 1, . . .
S_5 = 0, 1, 1, 0, **1**, 0, 1, 1, . . .
S_6 = 1, 1, 0, 1, 0, **0**, 0, 1, . . .
S_7 = 1, 1, 0, 1, 0, 1, **0**, 0, . . .
S_8 = 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, **1**, . . .
⋮ **0**
S_d = 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, . . .
⋮

Cantor köşegeni oluşturan rakamlara bakar ve yeni sayıyı köşegendeki her rakamdan farklı olacak şekilde oluşturur. Yani bu örnekte köşegendeki rakam 1 ise 0, 0 ise 1 olacak şekilde yeni sayıyı oluşturacağız. Örnekte, köşegeni oluşturan sonsuz dizi 10001001... ise yeni oluşturulan sayı S_d = 01110110... şeklinde olacak. Genellersek, yeni oluşturulan sayıda *x*'inci basamağın, köşegeni oluşturan sayının *x*'inci basamağından farklı bir sayı olması gerekmektedir. Cantor bu olusturulan sayının listede olmadığını görür çünkü listedeki her sayının en az bir basamağının değiştiğini görür. Oluşturduğumuz sayının *n*'inci sırada olduğunu varsayalım. O zaman kesişen köşegeninde, yani *n*'inci sıra ve *n*'inci sütundaki rakamda, bir çelişki olurdu. Çünkü inşamız o rakamdan başka bir rakam olmasına dayanıyor. Öyleyse köşegendeki rakam ne ise her zaman başka bir rakam olmalı. Köşegendeki sayı örneğin 1 ise, yeni oluşturduğumuz sayıda 0 olacağından dolayı bu iki sayı birbirine eşit olamazdı. Benzer şekilde köşegendeki sayı 0 ise, yeni oluşturduğumuz sayıda 1 olacaktı. Bu bir çelişkidir. En başta [0-1] aralığındaki bütün sayıları listelediğimizi varsaymıştık ancak S_d bu aralıkta olmasına rağmen listede değil! Oluşturduğumuz yeni sayıyı listeye ekleyip aynı argümanı baştan yaparsak tekrar listede olmayan bir sayı elde edeceğiz. Bu hiçbir zaman tam bir liste elde edemeyeceğimizi göstermektedir. Bu sebeple gerçel sayılar *sayılamaz sonsuzluktadır*. Bu buluş ile Cantor farklı sonsuzlukların olduğunu göstermistir. Dahası, Cantor her sonsuzdan daha büyük bir sonsuz olduğunu ve bunların bir hiyerarşik düzene sahip olabileceğini göstermiştir. Cantor bu sonuca her kümeden daha büyük bir küme olduğunu ve bunun da o kümenin *kuvvet kümesi*[5] olduğunu göstermesiyle varır. Yani herhangi bir *S* kümesi için, $|S| < |P(S)|$ ifadesini kanıtlar. Ayrıca Cantor *P(N)* ile

[5] S bir küme olsun. S kümesinin kuvvet kümesi, P(S), S'nin bütün alt kümelerinin kümesine eşittir.

R kümelerinin denk olduğu düşüncesine varmıştır. Bilinen en küçük sonsuz kümenin kardinaline Alef-sıfır $(\aleph_0)$ denmiştir ve bu da N kümesinin kardinaline eşittir. Gerçel sayıların kardinaline ise $\boldsymbol{C}$ denmiştir. Ayrıca kardinaller arasında $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$ ilişkisi vardır. Kardinaller dışında kümelerin büyüklükleri ile ilgili başka bir kavram ise *ordinallerdir*. Ordinaller kardinallerin aksine sayıca büyüklükten bahsetmezler. Fakat kümelerin sıralama büyüklüklerini ifade eder. Kardinalleri $1,2,3,\ldots$ olarak düşünürsek, ordinalleri 1'inci, 2'inci, 3'üncü, ... ilişkisi şeklinde düşünebiliriz. Ordinalleri sıralama bağıntılarıyla düşünmeliyiz. Cantor ordinalleri tanımlamak için şöyle başlamıştır: Elimizde $1,2,3,\ldots$ vardır. O halde bütün sonlu sayılardan daha büyük, sonlu ötesi bir sayı kolaylım ve bunların en küçüğüne ω diyelim. Elimizde $1,2,3,\ldots,\omega$ bulunmakta. Burada neden duralım? $1,2,3\ldots,\omega,\omega+1,\omega+2,\omega+3,\ldots$ Daha da devam edersek,

$$1,2,3,\ldots,\omega,\ldots,\omega 2,\ldots\omega^2,\ldots\omega^{\omega},\ldots\omega^{\omega^{\omega}},\ldots\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}},\ldots$$

dizisini elde ederiz. Dahası, bu diziye dilediğimiz kadar devam edebiliriz. Öncesi olan ordinallere *ardıl ordinal* (successor ordinal) denir. Örneğin, $5,\omega+16,\omega^4+108$ gibi ordinaller ardıl ordinallerdir. Çünkü bu ordinallerden bir önce gelen ordinaller vardır. Bunlar sırasıyla $4,\omega+15,\omega^4+107$ dir. Öncesi olmayan ordinallere *limit ordinal* denir. Örneğin, ω sıfırdan büyük en küçük limit ordinaldir. Çünkü bu ordinalden bir önce gelen ordinal yoktur. Şimdi ε_0 ordinalini $\{\omega,\omega^{\omega},\omega^{\omega^{\omega}},\ldots\}$ kümesinin ekusü[6] olarak tanımlayalım. Yani, $\varepsilon_0=\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$ olsun. O halde, $\omega^{\varepsilon}=\varepsilon$ eşitliğini sağlayan en küçük ordinal ε_0 dır. Şu ana kadarki yazdığımız ordinaller, ε_0 dahil, sayılabilir ordinallerdir. Bütün sayılabilir ordinallerden daha büyük olan ordinale sayılamaz ordinal denir. İlk sayılamaz ordinal ω_1 olarak yazılır.

Cantor, sonsuz tane farklı sonsuz olduğunu gösterdikten sonra bazı matematikçiler Cantor'un çalışmalarını başta kabul etmemişlerdir. Çünkü Cantor'un yaptığı işin matematik olduğunu düşünmezler. Birçok matematikçi Cantor'un yaptığı işin teoloji ile ilgili olduğunu söyler ve Cantor'u matematik dünyasından izole ederler. Son olarak Cantor, farklı sonsuzluklarla ilgili çalışmasına açıklıklık getirmek için *süreklilik hipotezi* denilen önermeyi ortaya atmıştır. Bu hipoteze göre hiç bir kümenin kardinali tam olarak doğal sayılar ile gerçel sayılar arasında değildir. Daha formel bir dille süreklilik hipotezi, $|N|<|c|<|R|$ eşitsizliğini sağlayan bir c kümesi olmadığını savunur. Cantor bu hipotezin doğru olduğunu kanıtlar ve kanıtını en kısa sürede göndereceğini bildirir. Fakat

6 Üstten sınırlı bir dizinin üst sınırlarından en küçük olanına dizinin ekusü denir.

daha sonra hipotezin doğru olmadığını da kanıtlar! Makalenin sonunda Kurt Gödel'in ve Paul Cohen'in süreklilik hipotezi ile ilgili çalışmalarından bahsedilmiştir.

Cantor'un klasik kümeler teorisi genelde matematikçiler tarafından kabullenmemistir. Çünkü paradokslara neden olmustur. Matematiğin temelini klasik kümeler kuramına dayandırmak o dönemde kötü sonuçlara yol açmıştır. En tipik paradoksu Ingiliz filozof ve matematikçi Bertrand Russell bulmuştur. Russell'ın bulduğu bu sonuç Gottlob Frege'nin öne sürdüğü sistem için geçerlidir [7]. Russell paradoksunda "kendilerinin elemanı olmayan bütün kümelerin kümesi" ele alınmıştır. Yani,

$$R = \{A \mid A \notin A\}$$

A, A'nın elemanı değilse R'nin içindedir. Şimdi karar verilemeyen, ve dünyaya biçimsel sistemlerin veya bu sistemlerde yapılan çıkarımın limitleri olduğunu gösteren soru gelir: R acaba R'nin içinde midir? Eğer, R'nin içinde değilse tanıma göre içinde olmalı çünkü R kümesi kendisini içermeyen bütün kümeleri içermekte. Fakat R, R'nin içinde ise içinde olmamalı çünkü bu kümenin tanımı R'nin elemanı olması için kendisini içermemesi gerektiğini söylemekte. Kısaca R ancak ve ancak R'nin içinde değilse R'nin içindedir. Bu mantıksal bir paradokstur. Nedeni ise özyinelemenin ve kendini referans veren tanımların doğasından gelmektedir. Burada kendini referans veren bir durum söz konusudur. Formel sistemlerde bu tip döngülü yapılar kullanıldığı takdirde paradokslar kaçınılmazdır. Klasik kümeler kuramı ile ilgili bir diğer paradoks ise, Cantor'un "her kümeden büyük başka bir küme vardır, o da o kümenin kuvvet kümesidir" argümanı ile ilgilidir. Bu paradoksta evrensel kümeyi yani *bütün kümelerin kümesini* düşünelim. Argümana göre evrensel kümenin kuvvet kümesi kendisinden büyük olmalı. Fakat evrensel kümenin tanımından gelen şey evrensel kümenin herşeyi içinde bulundurmasıdır. Bu çelişkili bir durumdur. O zaman evrensel kümenin kuvvet kümesi ile evrensel küme birbirine eşit olmalı mı yoksa evrensel kümenin tanımında mı sorun vardır? Bazılarına göre ise evrensel küme yoktur. Ya da *evrensel küme bir küme değildir fakat bir sınıftır* diyerek bu paradokstan kurtulabiliriz. O zaman da *bütün sınıfların sınıfı* kavramı aynı çelişkili durumu yaratacaktır. Öyleyse her matematiksel obje için bu paradokstan kurtulmak mümkün olmayabilir. Cantor aslında en büyük kardinalin veya ordinalin olmayacağını ve her kardinal veya ordinalden daha büyüklerinin olacağını en basit olarak sonsuz kümeler kuramında göstermiştir. Çıkarılacak en önemli sonuç bu olmalıdır.

II. Biçimselleştirme

Kümeler kuramındaki paradokslardan dolayı ilerleyen tarihlerde kümeler kuramı belitleştirilmiştir (aksiyom). En çok bilinen küme belit sistemi *Zermelo-Fraenkel Küme Kuramı*'dır (ZFC) [6][1]. Burada sistemden kastımız biçimsel yani formel sistemdir. Bir formel sistem belli bir biçimsel dil, aksiyomlar ve çıkarım kurallarından oluşur. Kümeler kuramı için önerilen belit sistemlerinden biri de tip teorisini ele almaktadır[5]. Bu sisteme göre hiç bir küme kendi tipinden veya hiyerarşisinden bir elemanı içeremez. Bütün kümeler kendinden daha önce tanımlanmış veya daha basit kümeleri içerebilir. Eğer küme t tipine sahip ise, elemanları $t-1$ tipine sahiptir. Matematikteki paradoksları tamamı ile ortadan kaldırmak için duruma Alman matematikçi David Hilbert el koyar ve 1920'li yıllarda, kurtarıcı rolünde, matematik dünyasını kümeler kuramının ve özyinelemenin getirdiği, kendini referans verme mantığının ortaya çıkardığı çelişkilerden arındırmak için aslında modern bilgisayar bilimlerinin temelini atacak bir planı başlatmıştır. Hilbert matematiğin temelleriyle 1890'ların sonundan itibaren ilgilenmiştir. Hilbert, formelist fesefe görüşüne sahip önemli bir matematikçiydi. Bu felsefeye göre matematik, sembollerden oluşan bir oyundur. Ayrıca Hilbert herşeyin açık, kesin, ve *bilinebileceği*[7] gerektiğini düşünmüştür. Hilbert bu yüzden 1930 yılında verdiği bir konuşmasında özet olarak şunları söylemiştir:

"Biz, bilinemeyecek şeylerin olduğuna inananlara inanmamalıyız. Matematikçi için bilinmezlik yoktur. Bana göre her doğa bilimi için de böyledir. Aksini düşünenlere karşı söyleyeceğimiz slogan şudur: Bilmeliyiz, bileceğiz."

Hilbert'in amacı matematiği çelişkilerden arındırıp, mutlak doğruluk kazandırmak, ve güçlü bir altyapı üstüne oturtmaktı. Gerçek dünya bilindiği gibi karmaşık olup, mutlak doğruluğun varolduğu tek evrenin matematik olabileceği doğrultusunda, Hilbert bu programını 20. yüzyılın başında duyurmuştur. Hilbert'in bu programına "formalism", yani biçimselleştirme dendi. En büyük amaç matematiği sağlam bir temele dayandırmaktır. Öyle bir sistem geliştirilmek istendi ki, her matematiksel önerme bu sistemde bir biçimsel dille ifade edilebilecek, her doğru önerme bu sistemde kanıtlanabilecek, sistemin tutarlı olduğunun kanıtı sistemin içinde kanıtlanabilecekti. Tüm matematiğin biçimselleştirilmesi demek evrensel bir tutarlı (consistent) aksiyomatik sistemin varlığının gösterilmesi ve her önermenin doğruluğunun veya yanlışlığının kanıtlanabilmesi anlamına gelmiştir. Kısaca matematiğin mekanikleştirilip, sonlu adımda[8] her önermenin doğruluk değerinin bulunması düşünülmüştür. Bir

[7] Asıl karşılığı ignorabimus olarak nitelendirilen ve bilimsel yöntemlerin limitleri olduğunu, ayrıca algılayamayacağımız şeylerin varolduğunu savunan bu görüşe Hilbert karşı çıkmıştır.

[8] Günümüz terminolojisinde sonlu adımlı inşalara algoritma denilmektedir.

süre boyunca birçok ünlü matematikçi, başta John von Neumann olmak üzere, Hilbert'in bu programına katkıda bulundu. Ne zaman ki, Kurt Gödel ortaya çıkana kadar.

III. Gödel'in Birinci Eksiklik Teoremi

Hilbert'in 1930'daki bildirisinden kısa bir süre sonra, 1931 yılında, genç bir Avusturyalı matematikçi ve felsefeci, Kurt Gödel, formelleştirmenin hiç bir zaman tam olarak başarılamayacağını göstermiştir. Bu sonuç, Hilbert'in hayallerini tamamen yıkmıştır. Gödel'in teoremi, matematiğin temelleri ve matematiksel mantığın bir dalı olan Özyineleme Kuramı'nın *(Recursion Theory)* en temel prensiplerindendir[9]. Gödel'in birinci eksiklik teorimini incelemeden önce bazı tanımlara ihtiyacımız var. Önermeler doğruluğu veya yanlışlığı olabilecek cümlelerdir. Önermelerimizi *S* veya *S*'nin tersi olan $\neg S$ olarak gösterebiliriz. Belli bir dildeki cümlelerden oluşan kümeye *formel teori* denmektedir. Verilen bir *S* önermesi ve *T* teorisi için, *T*'nin *S*'yi çıkarım kuralları doğrultusunda kanıtlaması *T* ż *S* olarak gösterilir. Kısaca buna "*T*, *S*'yi kanıtlar" denir.

Tanım *T* bir formel teori olsun. Herhangi bir *S* önermesi için, hem $T \nvdash S$ hem de $T \nvdash \neg S$ aynı anda doğru değilse, *T* teorisine *tutarlı* denir. Aksi halde *T* tutarsızdır.

Tanım *T* tutarlı bir formel teori olsun. *T*'nin formel dilindeki bütün *S* önermeleri için, ya *T* ż *S* ya da *T* ż$\neg S$ doğruysa, T teorisine *tam* denir. Aksi halde *T eksik* bir teoridir.

Tanım *S* bir dildeki cümlelerden oluşan küme olsun. *S'*deki her cümleyi doğru kılan yorumlamaya *S'*nin *modeli* denir.

Teorem (Gödel'in Tamlık Teoremi) Birinci derece yüklem mantığı için; *T* bir formel teori olsun. Eğer *T '* nin modeli varsa, *T* tutarlıdır. Ayrıca, *T* tutarlıysa *T '* nin modeli vardır. Başka bir deyişle, her modelde doğru olan cümlelerin, yani totolojilerin kanıtı vardır.

Gödel'in tamlık teoremini şimdilik kullanmayacağız, fakat ilerde bir tipteki teorilerin belli bir limitini belirtmek için bu kurama ihtiyacımız olacak. Bu bilgilerden sonra Gödel'in birinci eksiklik teoremine bakmaya çalışalım. Basitçe teorem şunu söylemektedir: Yeterince güçlü (aritmetiği kapsayan) formel teoriler **hem** tutarlı **hem de** tam olamaz. Yani aritmetiği ifade edebilen her formel teoride mutlaka doğruluğu veya yanlışlığı kanıtlanamayan önermeler vardır. Buna *Gödel'in Birinci Eksiklik Teoremi* [12] denir.

Öncelikle daha sade bir dille gösterelim. Gödel'in kanıtı yalancı paradoksuna dayanmaktadır. "Bu önerme yanlıştır." demek yerine Gödel "Bu önerme

9 Recursion sözcüğünün kelime karşılığı özyineleme olmasına karşın teknik anlamı hesaplanabilirlik olarak geçmektedir.

kanıtlanamaz." önermesini ele almıştır. Gödel'in bu önermesine *S* diyelim. Her iki önermede kendine referans verme durumu görülmekte. *Bu* kelimesi önermenin kendisini gösteriyor. O halde *S* için iki olasılık vardır. *S* ya kanıtlanabilir ya da kanıtlanamaz. Eğer kanıtlanabilirse, o zaman yanlış bir önerme kanıtlamış oluruz çünkü önermede kanıtlanamaz denmektedir. Bu istenen bir durum olmaz. Çünkü formel teorimiz tutarsızlık gösterir. Eğer kanıtlanamazsa, önermenin dediği şey doğrudur. Yani formel teorimiz tutarlıdır fakat ortada eksiklik vardır, ve biçimselleştirmemiz yetersiz kalmaktadır. Bu örnekte doğru olan bir önermeyi kanıtlayamıyoruz.

Sezgisel olarak gösterdikten sonra şimdi biraz daha biçimsel bir dille inceleyelim. Gödel'in kanıtına baktığımızda bazı aşamalardan oluştuğunu görebiliriz. Gödel'in teoremi *yeterince güçlü formel teoriler* için geçerlidir. Bunu formel biçimde tanımlamak makalenin kapsamı dışındadır. Fakat basitçe şöyle diyebiliriz: Eğer bir teori bütün *hesaplanabilir yüklemleri*[10] kanıtlayabilirse, birazdan göstereceğimiz kanıtlanabilirlik yüklemi teorinin dilinde tanımlanabiliyorsa, bu teori yeterince güçlüdür. Detaylı bilgiler için [16] çalışmasına bakabilirsiniz. Dikkate alacağımız sistem Peano Aritmetiği (PA) olmalıdır [9]. Bu teori günlük kullandığımız aritmetiği yeterince tanımlayabilmektedir. Gödel'in kendisi de buna benzer bir teoriyi göz önünde bulundurmuştur. Gödel, ilk aşamasına asal sayıları temel alan *Gödel Numaralandırması* ile başlamıştır. Gödel numaralandırması bir formel dilden üretilebilen bütün formülleri numaralandırmak için kullanılan bir fonksiyondur. Tek bir tane Gödel kodlaması olmak zorunda değildir. Kodlamada, formüldeki her sembole karşılık tek bir asal sayı vardır. Bu semboller teorinin formel dilinin kullandığı sembollerden ve sabitlerden oluşmaktadır. Kodlama tablosu dikkate alınarak bir doğal sayıya karşılık gelen formülün Gödel numarası (g.n.) verilen fonksiyona göre bulunur. Her formül için bir g.n. vardır. Önemli olan bir nokta da bu işlemlerin hesaplanabilir fonksiyonlar tarafından yapılabileceğidir. Yani bir formülün g.n.'sini bulmak veya verilen bir g.n. için karşılığı olan formülü bulmak sonlu adımda gerçekleştirilebilir. Gödel bunu detaylı olarak kanıtlamıştır. Sadece formüller veya önermeler için değil, kanıtlar için de g.n. vardır. Çünkü kanıtlar da sonlu bir önerme dizisinden oluşmaktadır.

---

[10] Yüklem mantığında bir bağıntının hesaplanabilir olması demek, o bağıntının tanımladığı koşulun doğruluğunun veya yanlışlığının her zaman sonlu adımda tespit edilebilmesi demektir. Örneğin, formel teorimizin dilinde $R := \forall x \exists y A(x, y)$ bir yüklem formülü olsun, ve $A(x, y)$ bağıntısı $x < y$ anlamına gelsin. O zaman her x için bir y sonlu adımda bir fonksiyon (ya da algoritma) tarafından bulunabiliryorsa R hesaplanabilirdir.

Formel teorimizin tutarlı olduğunu, sadece doğru önermeleri kanıtladığını varsayalım. Doğru önermeden kastımız, PA'nın standart modelinde doğru olan önermelerdir. PA'nın standart modeli öyle bir yorumlamadır ki, PA'nın bütün aksiyomları bu modelde doğrudur[11]. Şimdi $prf(i,j)$ yüklemini düşünelim. Bu yüklem ancak ve ancak *i*'nin, sadece bir tane *x* serbest değişkeni[12] bulunan $B(x)$ yüklem mantığı önermesinin Gödel numarası olduğu durumda, ve *j*'nin de $B(i)$'nin kanıtının Gödel numarası olduğu durumda kanıtlanabilir olduğunu varsayalım. Ayrıca $prf(i,j)$ doğruysa, *i* ve *j* sayıları için bu yüklemin kanıtı da vardır. Aşağıdaki önermenin Gödel numarasının *m* olduğunu varsayalım.

$U := \forall y \ \neg prf(x,y)$

Bu önerme *x* yerine bir sayı konduğunda, örneğin *k*, $B(k)$'nın kanıtının olmadığını söylüyor. Şimdi de aşağıdaki önermeye bakalım.

$G := \forall y \ \neg prf(m,y)$

Bu önerme bize *G*'nin kanıtlanamayacağını söylüyor (özyinelemeye dikkat edin). Öyleyse *G*'nin kanıtlanabildiğini varsayalım ve kanıtın Gödel numarasının da *n* olduğunu kabul edelim. O zaman $prf(m,n)$ doğru olacak ve kanıtlanacak. Fakat *G*'nin kanıtı olduğunu söylediğimizde, yani $\forall y \ \neg prf(m,y)$ önermesinin kanıtlanabilir olduğunu, bize $\neg prf(m,n)$ yükleminin doğru olduğunu gösterir. Fakat bu çelişkili bir ifadedir. Şimdi de $\neg G$'nin kanıtlanabilir olduğunu varsayalım (yani $\exists y \ \ prf(m,y)$ kanıtlanabilir)[13]. O zaman $prf(m,n)$'nin kanıtı vardır, *n* diyelim, ve bu Gödel numarası da *G*'nin kanıtıdır. Bu ifade aynı şekilde bir önceki gibi çelişkilidir. O halde, *G* doğru ama kanıtlanamaz bir önermedir. Eğer *G* kanıtlanırsa teorimiz tutarsız olmaktadır. Her iki durumdan da kaçmak mümkün değildir.

Teorem (Gödel'in Birinci Eksiklik Teoremi) Yeterince güçlü *T* formel teorileri her zaman eksik *veya* tutarsızdır. Eğer *T* tutarlısa, her zaman *T*'de doğru olan fakat kanıtlanamayan önermeler bulunur.

Gödel aslında bize, verilen güçlü bir teori için, karar verilemeyen *G* önermesini nasıl inşa edeceğimizi göstermektedir. Gödel bir açıdan algoritma vermektedir. *G* formülünü belitlerin içine eklersek sorunu ortadan kaldırabiliriz diyebilirsiniz. Fakat, o zaman *T* sistemini kapsayan başka bir sisteme, T' diyelim, geçmiş oluruz. Aynı şekilde T' sisteminde de doğru olup kanıtlanamayan önermeler olacaktır. Bu yüzden *T* sadece eksik degil, eksikliği giderilemezdir.

[11] PA aksiyomları hakkında daha fazla bilgi için [16]'te sayfa 71'e bkz.

[12] Bir formüldeki değişken eğer bir niceleyici tarafından bağlı değilse, o değişken serbest değişkendir.

[13] $\neg \forall x A(x)$ ifadesi $\exists x \neg A(x)$ ifadesine mantıksal olarak eşittir.

IV. Gödel'in İkinci Eksiklik Teoremi

Hilbert'in bir planı da matematiğin tutarlılığını göstermekti. Gödel'in ikinci eksiklik teoremi belki de matematik dünyasını en derinden etkileyen kuramlardan biri. İkinci teorem de birinci teorem gibi kanıtlanabilirlik yüklemini kullanmaktadır. Şimdi, $prf(m,n)$ yüklemini basitçe "*n* gödel numarasına sahip önerme, *m* gödel numarasına sahip kanıt tarafından kanıtlanır" anlamında kullanalım. Şimdi $prov(n)$ yüklemini tanımlayalım. Bu da "Gödel numarası *n* olan önerme PA'da kanıtlanabilir" anlamında kullanılsın. Bunu rahatça diyebiliriz çünkü *prov* yüklemi PA'da ifade edilebilir. O halde $prov(n)$ ancak ve ancak $\exists m \;\; prf(m,n)$ sağlanabildiğinde doğrudur. Çalıştığımız sistemin PA olduğunu söyledik. ϕ bir önerme olsun. O halde $\ulcorner \phi \urcorner$, ϕ'nin Gödel numarasını göstersin. O zaman, $prov(\ulcorner \phi \urcorner) \leftrightarrow$ PAżϕ denkliği kanıtlanabilir[14]. Gödel'in birinci eksiklik teoremini bu notasyonu kullanarak PAż$G \leftrightarrow prov(\ulcorner G \urcorner)$ ifadesiyle gösteririz. Eğer PA tutarlıysa PA $\nvdash$1. Burada 1 formülü örneğin $0 = 1$ ifadesini, yani bir çelişkiyi göstersin. Öyleyse PA tutarlıysa çelişki kanıtlamaz. Tutarlılığın tanımından dolayı bu durumun tam tersi de geçerlidir. Yani PA'da çelişki kanıtlanmıyorsa PA tutarlıdır. O halde PA $\nvdash$1 yerine $\neg prov(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ yüklemini de kullanabiliriz. O zaman $cons := \neg prov(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ olarak tanımlansın. Burada, $cons$ tutarlılığı tanımlıyor. Yani $cons$ ancak ve ancak PA tutarlı olduğunda doğrudur. Birinci eksiklik teoreminin yarısını PA'da $cons \rightarrow \neg prov(\ulcorner G \urcorner)$ ifadesi ile gösterebiliriz. Aşağıdaki ifade bizim *birinci biçimselleştirilmiş kuramımız* olsun:

PAż $\nvdash$1 $cons \rightarrow \neg prov(\ulcorner G \urcorner)$

Dahası, Gödel'in birinci eksiklik teoreminden dolayı aşağıdaki ifade 'nın içinde kanıtlanabilir.

PAż$G \leftrightarrow \neg prov(\ulcorner G \urcorner)$ (1)

Öyleyse, çelişki bulmak adına,PAż $\vdash cons$ olduğunu varsayalım. *Birinci biçimselleştirilmiş kuramımıza* göre, ve *modus ponens* ile PAż $\vdash \neg prov(\ulcorner G \urcorner)$ elde ederiz. Fakat yukarıdaki (1) bize $\neg prov(\ulcorner G \urcorner)$ ve *G*'nin eşit kanıtlanabilir olduğunu söylüyor. O halde PAż $\vdash G$ kanısına varırız. Fakat bu birinci eksiklik teoremi ile çelişmektedir. O halde varsayımımız, PA tutarsız olmadığı takdirde, yanlış olmalıdır.

Teorem (Gödel'in Ikinci Eksiklik Teoremi) Yeterince güçlü ve tutarlı *T* formel teorileri kendi tutarlılıklarını kanıtlayamazlar.

ZFC kümeler kuramı, yüklem mantığı ile kullanıldığında günümüz matematiği için yeterli formel sistemini oluşturmaktadır. Bu yüzden ZFC, eğer tutarlıysa, kendi tutarlılığını hiçbir şekilde kanıtlayamaz! ZFC'nin tutarlılığını

---

14 Ancak ve ancak ifadesi $\leftrightarrow$ ile gösterilir.

kanıtlaması demek, Gödel'in tamlık teoreminden dolayı, bir modelinin varlığını kanıtlaması anlamına gelir. Fakat bu ikinci teorem ile çelişmektedir. Ancak bu tip sistemlerin tutarlılıkları daha güçlü sistemler tarafından kanıtlanabilir. Fakat bu kez de güçlü olan sistemin tutarlılığı hakkında bir hüküme varamayız. Bu sebepten dolayı tutarlılık kanıtları mutlak değil, görecelidir. Önemli bir konu da eksiklik teoremi ile tamlık teoreminin başta çelişiyor gibi görünebileceği. Fakat bu kesinlikle yanlıştır. Eksiklik teoremi formel teorilerle ilgili bir sonuçtur. Tamlık teoremi ise kullandığımız mantık tipinin özelliğidir. Tamlık teoreminde bir cümle her modelde doğru ise kanıtı vardır. Peki teorimizin tutarlı olduğunu düşünürsek G doğru değil mi? Tamlık teoremine göre kanıtı olmalı diyebilirsiniz. Bu yüzden tamlık teoremiyle eksiklik teoremi başta çelişkili gelebilir. Fakat G her modelde doğru değil. G'nin yanlış olduğu PA modelleri de var. Bu yüzden hiçbir çelişki yoktur. Gödel'in ikinci teoremiyle birlikte Hilbert'in formelleştirme programı, ve matematiğin bir gün bize mutlak doğruluğu gösterip her bilgiye sahip olacağımızın hayali sona ermişti. Gödel'in eksiklik teoremi o dönemde büyük krize yol açmış, birçok matematikçi Gödel'in ne demek istediğini, Cantor'un çalışmalarında olduğu gibi, anlayamamıştı. O günkü matematikçilere çok uzak, fakat geleceğe yönelik, konuları içeriyordu. Gödel'in Eksiklik Teoremi sadece klasik mantığın ve matematiğin limiti değil, başka bir açıdan sonlu düşünce kavramının da limitini göstermiştir[8].

V. Karar Verilemezlik

Eksiklik teoreminden 5 yıl sonra Ingiliz matematikçi Alan Turing, Gödel'in eksiklik teoremine yeni bir boyut kazandırmıştır. Turing, Gödel'in eksiklik teoreminin mekaniksel hesaplamalarla ilgili olduğunu anlamıştı ve bu teoreme yeni bir boyut getirecek biçimde mekaniksel, yani sonlu, hesaplamayı Alonzo Church'un *Lambda Kalkülüs*'ü gibi formel bir hesaplama modeline uyarlamıştır[15]. Turing, Gödel'in eksiklik teoremi aslında bizim eksikliğimiz diye düşünerek, bir matematikçinin hesaplama yapmasını ele alan modelini çıkarmıştır. Bu teorik buluşa *Turing makinesi* adını vermiştir[10]. Standart Turing makinesi, basitçe, sonlu kontrol ünitesinden, ve üzerine semboller yazıp okuyabildiğimiz, hücrelere ayrılmış bir boyutlu sonsuz bir banttan oluşmaktadır. Sonlu kontrol ünitesi, makinenin durumlarına ve battan okuduğu sembole göre yeni bir duruma girer ve bir olasılıkla banta yeni bir sembol yazar. Makinenin her anlık durumuna *konfigürasyon* denir. Çalışma prensibini sadece ileri veya geri

[15] Lambda Kalkülüs (λ - calculus) 1936 yılında Alonzo Church tarafından bulunan bir formel sistemdir. Günümüzde kullanılan LISP, ML, Scheme gibi fonksiyonel programlama dillerinin temelini oluşturmakla beraber, kuralları ve yapısı da bu dillerle benzerlik gösterir.

hareket eden, hücrelerden sembol okuyan veya hücrelere sembol yazan, böylece farklı konfigürasyonları elde edebilen tek gözlü bir varlık olarak düşünebiliriz. Daha detaylı bilgi için genel bir matematiksel mantık kitabına bakılabilir. Alonzo Church'un Lambda Kalkülüs'ü ve Alan Turing'in soyut makinesinin eşit güçte olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki hipotez bugünün modern matematik ve teorik bilgisayar biliminin önemli yargılarından biridir.

Church-Turing Hipotezi *Sezgisel olarak sonlu adımda hesaplanan herşey Turing makinesi ve eşdeğer hesaplama modelleri tarafından da hesaplanır. Ayrıca Turing makinesi ve eşdeğer hesaplama modelleri tarafından hesaplanan bütün fonksiyonlar da sezgisel olarak sonlu adımda hesaplanır.*

Bu hipotez formel bir önerme değildir. Sebebi ise "sezgisel" hesaplamanın tanımının olmadığından kaynaklanmaktadır. Sezgisel hesaplama, algoritmaları ifade etmektedir. Fakat algoritmaların formel tanımı yoktur. Öte yandan bu sezgisel kavram, tanımı kesin ve formel bir biçimde yazılabilen matematiksel bir obje olan Turing makineleriyle ilişkilendirilmiştir. Bu yüzden Church-Turing hipotezi kanıtlanamamıştır. Fakat evrensel olarak doğru kabul edilmektedir. Bu felsefi yargı, matematikte, felsefede, ve bilgisayar biliminde önemli bir yer tutmaktadır. Çünkü sezgisel olarak hesaplayabileceğimiz şeylerin bir sınırı olduğunu söylemektedir!

Gödel ile Turing'in tanımlarında bazı ortak noktalar görebiliriz. Burada Gödel ile Turing'in ortak noktası aslında kanıtlardır. Hesaplama aslında bir önerme dizisi olarak görülebilir. Hatta bu durumda hesaplamanın kendisi aslında bir problemin kanıtıdır. Kanıtın bitmesi hesaplamanın bitmesi, kanıtlanamayan önermelerin varlığı da hesaplanamayan fonksiyonların ve problemlerin varlığının göstergesidir. Gödel bu nedenle aslında karar verilemeyen önermelerin veya problemlerin varlığını göstermiştir. Ancak bilgisayar biliminde *evrensellik* kavramı vardır (başka Turing makinelerini simüle edebilen evrensel Turing makinelerinin varlığı gibi). Daha modern deyişle, bütün programlama dilleri aynı güçtedir. Fakat matematikte benzer durum söz konusu değildir. Eğer öyle olsaydı eksiklik olmazdı. Gödel karar verilemezlik kuramına matematiksel kanıtlar ve klasik mantık yönünden yaklaşmıştır. Turing ise hesaplanamayan gerçel sayılar, fonksiyonlar, ve fonksiyonların karşılığındaki bunları hesaplayan teorik model yönünden ele almıştır. Yani Turing, Gödel'in teoremini açıklığa kavuşturmak için, bunu bir algoritmik modele dayandırarak göstermiştir. Bu, Turing'i bilgisayar biliminin öncülerinden biri yapmıştır. Turing makinesi evrensel bir hesaplama modelidir. Yani günümüzdeki bütün dijital hesaplama makinelerinin yapabildiğini teorik olarak Turing makinesi de hesaplayabilmektedir. Gödel'in, hatta Cantor'un çalışmaları doğrudan Turing makinelerini etkilemekte. Cantor sayılamaz sonsuzluktan bahsediyordu. 0 ve 1'lerden oluşan sonsuz dizilerin sayılamaz sonsuzlukta olduğunu, asla tam listeyi elde edemeyeceğimizi göstermişti. Gödel ise kanıtlanamayan önermelerden bahsetmişti. Turing ise durma problemini ele almış, bunun hiçbir zaman çözülemeyeceğini göstermiştir. Durma problemi kısaca şöyle tanımlanabilir: Öyle bir algoritma bulunsun ki, bu algoritma verilen her program ve her girdi için programın bu girdiyle durup durmayacağını söylesin. Turing makinesi tasarımlarının programlara karşılık geldiği bilinmektedir. Verilen bir Turing makinesi ve bir girdisi için, makinenin o girdi için hesaplamasının sonlanıp sonlanmayacağına karar verilemeyeceği için durma problemine de karar verilemez. Gödel'in eksiklik teoreminin temelinde yalancı paradoksu yatmaktadır. Turing'in durma probleminin temelinde ise Russell paradoksu, ve verilen herhangi bir yüklem mantığı önermesinin geçerliliğine karar verme problemi yatmaktadır[2]. Durma problemine açıklık getirmek için bir $H(P,X)$ yüklemi tanımlayalım. Burada $H(P,X)$ yüklemini "*P* programı *X* girdisinde sonlanır" şeklinde yorumlayalım ve H'ye karar veren bir programın varolduğunu varsayalım. Turing makineleri ile bilgisayar programlarını rahatça özdeştirebiliriz. Eğer *P* programı *X* girdisi ile sonlanırsa $H(P,X)$ yüklemi *doğru* değerini alır. Programları Turing makineleri ile simüle edebiliyorsak, ve her program kendisinin girdisini kodlanmış olarak alabilirse, o zaman Turing makineleri de kendilerinin kodunu girdi olarak alıp hesaplayabilirler (evrensel Turing makineleri)[16]. O zaman $H(P,P)$ yüklemi *P* programı *P* girdisinde (yani P'nin kodu) sonlanırsa doğru olur. Aşağıdaki programa bakalım:

$D(X)$

a: Eğer $H(X,X)$ doğruysa *a'ya dön*. Eğer $H(X,X)$ yanlışsa *sonlan*.

Burada *D* programı $H(X,X)$ yanlışsa sonlanıyor. Yani *X* programı kendi girdisinde sonlanmıyorsa *D* programı sonlanıyor. Aksi halde, *D* programı sonsuz döngüye giriyor. Şimdi karar verilemez soruyu soralım: $D(D)$ sonlanır mı? $D(D)$ ancak ve ancak $H(D,D)$ yanlışsa, yani sonsuz döngüye girerse, sonlanır. Kısaca, $D(D)$ ancak ve ancak sonlanmazsa sonlanır! Bu bir çelişkidir. Bu yüzden varsayımımız yanlıştır. Yani H'ye karar veren bir program yoktur!

Verilen bir *M* Turing makinesi ve ω girdisi için M'nin ω girdisinde sonlanıp sonlanmayacağına karar veren bir algoritma yoktur. Bunu formel sistemler cinsinden şöyle genelleyebiliriz: Yüklem mantığında verilen bir *P*

[16] Her Turing makinesi sonlu bir betimlemeye sahiptir ve betimleme kodlarını girdi olarak alıp, evrensel Turing makinesi diye adlandırılan genel hesaplama modeli tarafından, hesaplama yapabilirler.

önermesi için, P önermesinin geçerliliğine her zaman karar veren bir algoritma yoktur. Ancak P totoloji ise kanıt vardır[11]. Bunu tekrar Turing makineleri ve formel dillere çevirelim. Verilen bir M Turing makinesi ve ω girdisi için, M ancak ve ancak $\omega \in L(M)$ durumunda sonlanır. Bu durum *yarı karar verilebilirdir*. Çünkü $\omega \notin L(M)$ ise M sonlanmayabilir. $L(M)$ dediğimiz küme M 'nin formel dilidir. Formel sistemlerde $L(M)$'yi M 'nin teorisi yani M 'nin sağladığı önermeler olarak düşünebiliriz. Bu yüzden $L(M)$'nin içinde M 'nin sonlandığı bütün girdiler olacaktır. Yarı karar verilebilme durumunu verilen sonsuz bir düzensiz kümede bir elemanı aramak gibi düşünebiliriz. Eğer aradığımız eleman gerçekten kümedeyse buluruz, ama kümede yoksa sonsuza kadar arama işlemi devam eder ve ``eleman kümede yoktur" diye karar veremeyiz. Çünkü kümede daha bakmadığımız sonsuz tane eleman vardır. Böyle kümelere *etkili numaralandırılabilir* (effectively/recursively enumerable) kümeler denir. Numaralandırılabilir kümeler en çok doğal sayılar N kümesi ile aynı kardinale sahip kümelerdir. Numaralandırılabilir olmayan kümeler hiçbir şekilde hesaplanamaz. Örneğin gerçel sayılar kümesi numaralandırılamaz. Bu yüzden neredeyse bütün gerçel sayılar hesaplanamaz. Numaralandırılamaz kümeler ve hesaplanabilirlik arasındaki ilişki, numaralanamaz kümeler için karar verme probleminin çözülemez olmasından gelmektedir. Verilen bir elemanın bu tip bir kümeye ait olup olmadığını hesaplayacak bir Turing makinesi yoktur, çünkü Turing makineleri en fazla etkili numaralandırılabilir kümeleri tanıyabilir. Ayrıca Turing'in orjinal hesaplanabilir sayılar[3] tanımına göre sonlu adımda bir gerçel sayının virgülden sonraki n'inci basamağını bize çıktı yapacak algoritma, n girdisine sahip, yoktur. Ilginç olan başka bir yargı da, eğer Church-Turing hipotezi doğruysa, hesaplanabilir fonksiyonlardan oluşan kümelerin sayısının sadece sayılabilir sonsuz olduğu, hesaplanamaz fonksiyonlardan oluşan kümelerin sayısının ise sayılamaz sonsuz olduğudur. Bunun nedeni, bütün Turing makinelerin sayısının sayılabilir sonsuz olmasıdır. Çünkü Turing makinesi sonlu bir betimleyeme sahiptir. Örneğin, bu betimleme sonlu bir dizi olabilir. O halde bütün sonlu dizilerden oluşan küme sayılabilir sonsuzdur. Bütün Turing makinelerin kümesinin kardinali N kümesininkine eşittir. Öte yandan doğal sayılar üzerinde bütün olası fonksiyonlar $f : N \to N$ üstünde tanımlanırsa, fonksiyonun oluşturduğu kümelerin sayısı sayılamaz sonsuzdur. Her Turing makinesi sadece bir dil tanıyabildiğine göre, f fonksiyonunun sadece sayılabilir sonsuz tane kümesini tanıyacaktır[17]. Geriye sayılamaz sonsuz tane küme kalır. Yani Church-Turing hipotezi, neredeyse hiçbir kümenin hesaplanamayacağını göstermektedir. Tekrar hatırlatacak olursak, kümenin hesaplanabilir olması

[17] Fonksiyonların oluşturduğu küme bir dil tanımlamaktadır.

demek verilen herhangi bir elemanın o kümeye ait olup olmadığını algoritmik olarak bulabilmemiz anlamına gelmektedir.

VI. Sonuç

Cantor'un farklı sonsuzlukları keşfetmesinden bahsettik. Daha sonra kümeler teorisindeki paradokslardan, Gödel'in eksiklik teoreminden, ve durma probleminden bahsettik. Sonuç olarak teorik bilgisayar bilimi ve kuramsal boyuttaki bilgisayar kavramı, matematiğin temelleri üzerine sorulan bir soruya cevap aramak adına çıkan çalışmalardan, ve bu çalışmaların sonunda ortaya çıkan kriz ile oluşmuştur. Örneğin, kümeler kuramında karar verilemeyen bir önerme olan süreklilik hipotezi(CH) vardır. Tabi bu durum, önermenin hiçbir zaman karar verilemez olduğu anlamına gelmemektedir. Özellikle platonist bir matematik felsefesine sahipsek, epistemolojik açıcan her önermenin doğruluğunun veya yanlışlığının bir gün kapılarını açabileceğimiz matematiksel evrende gösterilebileceğini biliyoruz. Şimdiki evrenimizi ZFC olarak düşünürsek, Kurt Gödel ve Paul Cohen CH'nin ZFC belitsel kümeler kuramından bağımsız olduğunu göstermiştir[13][15][14]. Yani Gödel, eğer ZFC tutarlıysa, $ZFC + CH$ 'nin de tutarlı olduğunu göstermiştir. Cohen ise, eğer ZFC tutarlıysa, benzer şekilde $ZFC + \neg CH$'nin de tutarlı olduğunu göstermiştir. Yani CH, ZFC'nin aksiyomlarından kanıtlanamaz. O halde CH, ZFC'den *bağımsızdır* denir. Cohen problemden vazgeçmemizden yanaydı. Gödel ise problemi çözecek yeni belitler bulmamızdan yanaydı. Yani ZFC'ye sezgisel olarak doğru olan belitler ekleyerek CH'ye karar verebileceğimizi savunmuştur. Gödel'in sıkı bir platonist felsefeye sahip olduğunu görmekteyiz. Örneğin, sonlu düşünce felsefesini savunan kişiler CH önermesiyle ilgilenmemişlerdir. Çünkü bu felsefeye sahip kişiler sonsuz kümelerin varlığına inanmazlar.

Burada süreklilik hipotezinin formel dil sınıflarıyla bağlantısı da vardır. Formel diller belli bir hiyerarşik düzene sahiptir. Buna *Chomsky hiyerarşisi* denir. Chomsky hiyerarşisi düzenli diller (regular languages), bağlamdan bağımsız diller (context-free languages), karar verilebilir diller (recursive languages)[18], algoritmik numaralandırılabilir diller (recursively enumerable languages), daha da ötesinde numaralandırılabilir diller (enumerable languages), numaralandırılamaz diller (non-enumerable languages) ve benzeri şeklinde devam etmektedir. Algoritmik olarak numaralandırılabilir dillerin küme elemanları her zaman bir algoritma tarafından listelenebilir. Bunun ötesinde numaralandırılabilir dillerin en fazla N kümesi ile aynı kardinale sahip olduğunu söylemiştik, fakat öyle kar-

[18] Recursive, computable, decidable, karar verilebilir, ve hesaplanabilir gibi kelimeler benzer anlamlarda kullanılabilir. Ancak, karar verilebilen şeyin fonksiyon değil küme olduğunu unutmamak gerekir. Öte yandan hesaplanabilir olan fonksiyondur.

maşık bir düzene sahiptir ki algoritmik olarak elemanları listelenemez. Örneğin, matematikteki doğru önermeler listelenebilir, fakat eksiklik teoreminden dolayı *algoritmik* olarak listelenemez. Bu sonuç, matematiğin bir bilgisayar programı tarafından yapılamayacağının en açık nedenidir.

Şimdi süreklilik hipotezine geri dönelim. Gerçel sayılar R kümesinin ilk numaralandırılamaz küme olduğunu bilinmektedir. Eğer $|N| < |c| < |R|$ koşulunu sağlayan c kümesinin varlığı kabul edilirse (bunu kabul etmek çelişkiye yol açmayacaktır), yani CH'nin yanlış olduğu kabul edilirse, bu durum yeni bir formel dil sınıfının varlığını da gösterir. Bunun tersi de mümkündür. Yani bahsedilen formel dil sınıfının bulunması, kardinali $|N|$ ile $|R|$ arasında olan kümenin varlığını gösterir. Tabi bahsettiğimiz formel dil sınıfının varlığı ZFC'den bağımsızdır. Ancak böyle bir dil sınıfının varlığını kabul etmek çelişkiye yol açmayacaktır. Teorik bilgisayar bilimi çerçevesinden bakıldığında numaralandırma işlemi algoritmaların sınırlarını belirler. Zaten hesaplama kuramına da bakıldığında N kümesinin alt kümeleri göz önünde bulundurulur. Bu bilimde çalışanlar için bir küme ya numaralandırılabilirdir ya da numaralandırılamazdır. Kısaca, teorik bilgisayar bilimi ayrık ve sezgisel düşünce felsefesine daha yakındır. Bunun nedeni Church-Turing hipotezinin çizdiği limit olabilir. Bu boyuttan bakarsak, c kümesine *sezgi dışı* diyebiliriz. Gödel'in $cons(ZFC) \rightarrow cons(ZFC + CH)$ kanıtında kullandığı *inşa edilebilir evren*, bilgisayar biliminin benimsediği bu felsefeyi yansıtır diyebiliriz. Basitçe, bu inşaya göre tanımlanmış kümeler önceki adımlarda verilir. Yani, L_0 = "Tanımlanmış sabit kümeler"; Ardıl bir α ordinali için, $L_{\alpha+1}$ = "α adımında oluşturulan kümelerin ve bunların bütün alt kümelerinin birleşiminden oluşan küme"; Bir β limit ordinali için, $L_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} L_\alpha$; Daha sonra $\mathbf{L} = \bigcup_\alpha L_\alpha$ ile inşa edilebilir evreni elde ederiz. Burada ilginç olan nokta, tanımların her zaman önceden belirtilmiş tanımları kullanmasıdır. Bu yüzden yeni bir tanım yaparken kendine referans verme durumu veya o aynı anda belirtilmek istenen bir tanımı kullanmak söz konusu olmaz. Kısaca c kümesinin varlığının her şeyin ayrık, sezgisel, ve hiyerarşik olduğu bilinen teorik bilgisayar bilimiyle ilişkilendirilmesi bir tartışmaya yol açabilir. Üstelik bu sınıfa sahip formel dillerin ne tip bir düzene sahip olduklarını düşünmek kolay olmayabilir. Çünkü Church-Turing hipotezi, eğer doğru kabul edilirse, bize algoritmik düşüncenin Turing makineleriyle sınırlı olduğunu söylemektedir. Başka bir açıdan, algoritmik sezgilerimiz Turing makinesinin yaptıklarıyla sınırlıdır. Bahsedilen c kümesinin varlığını kabul etmek bu yüzden teorik bilgisayar biliminde bir tartışmaya yol açabilir. Süreklilik hipotezi ile formel diller teorisi arasındaki ilişkilerden biri buradan gelmektedir.

Bu krizden kurtulmanın bir yolu *sonluötesi hesaplama* [4] yani hiper hesaplama kavramını kabul etmek olabilir. Bu kavramın amacı algoritmaların sadece sonlu adımda degil, sonsuz adımda da çalıştıklarını ortaya koymaktır. O halde sadece N kümesinin alt kümeleri değil, R kümesinin de alt kümelerinde hesaplama yapılabilir. Sonluötesi modellerin hesapladığı formel diller ile beraber, böylece c kümesinin tanımının netleşmesi mümkün olabilir. Sonluötesi hesaplamayı kabul etmek Church-Turing hipotezine karşı gelmektedir. Çünkü hiper hesaplama modelleri Turing makinelerinden hesaplama anlamında daha güçlüdür. Halbuki, Church-Turing hipotezi hesaplamayı Turing makinesiyle sınırlı tutmaktadır. Tabi ki sonluötesi hesaplama, bulunduğumuz fiziksel evrene hatta sezgilerimize aykırı olduğu düşünülebilir. Öte yandan birçok sonluötesi hesaplama modeli "sonlu zamanda sonsuz adım" ilkesiyle tanımlanmıştır. Son olarak, bilinmelidir ki en güçlü formel teori olmadığı gibi, en güçlü hesaplama modeli de yoktur. Hiçbir hesaplama modeli kendi durma problemine karar veremez. Bu sonuç açıkça Gödel'in ikinci eksiklik teoremiyle örtüşmektedir.

Özet

Bu makalede 19. ve 20. yüzyılda matematiğin felsefesi/temelleri üzerine yapılan çalışmalardan, mantığın ve biçimselleştirmenin getirdiği sonuçlardan, hesaplanabilirlik kuramının tarihinden, ve teorik bilgisayar biliminin oluşumuna neden olan matematik dünyasındaki çalışmalardan bahsedilmiştir. Özetle, Cantor'un sonsuz kümeler kuramı, kendine referans veren paradokslar, Gödel'in eksiklik kuramı, karar verilemezlik ve teorik bilgisayar bilimi literatüründe bilinen durma problemine değinilmiştir. Son olarak kümeler kuramında bir problem olarak bilinen süreklilik hipotezinin biçimsel dillerle olan ilişkisinden ve hesaplanabilirlik kuramında doğabilecek potansiyel bir krizden bahsedilmiştir.

Abstract

Uncountable Infinity Undecidability and Gödel's Incompleteness Theorem

In this paper, we survey the topics that were studied in the 19th and 20th century on the philosophy/foundations of mathematics, and discuss the impacts of mathematical logic and formalism, history of computability theory, and studies in mathematics that lead to the creation of the foundations of theoretical computer science. Briefly, we discuss Cantor's theory of infinite sets, self-referential paradoxes, Gödel's incompleteness theorems, undecidability, and the halting problem. Finally, we discuss the relationship between formal language theory and a problem in set theory, called the continuum hypothesis. We then point out a possible crisis, that may occur in computability theory, in relation to the continuum hypothesis.

Kaynakça

[1] A.A.Fraenkel, Bar-Hillel: Foundations of Set Theory. Amsterdam, pp. x+415 (1958)

[2] A.Church: An unsolvable problem of elementary number theory. American Journal of Mathematics, 58:345-363 (1936)

[3] A.M.Turing: On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem. Proceedings of the London Mathematical Society, Ser.2, Vol.42 (1937)

[4] A.Syropoulos, *Hypercomputation Computing Beyond The Church-Turing Barrier*, Springer Sceience+Business Media (2008).

[5] B.Russell: Mathematical Logic as based on the theory of types. American Journal of Mathematics, 30, pp. 222-262 (1908)

[6] E.Zermelo: Untersuchungen über die Grunlagen der Mengenlehre. Math. Ann. 65, pp.261-281 (1908)

[7] G.Frege: Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl (1884)

[8] G.J.Chaitin: The Limits of Mathematics, A Course on Information Theory and the Limits of Formal Reasoning, Springer-Verlag, London (2003)

[9] G.Peano: 1889. The Principles of Arithmetic; van Heijenoort, pp. 85-97 (1968)

[10] J.E.Hopcroft, R.Motwani, J.D.Ullman: Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, Addison Wesley, 2nd Ed. (2001)

[11] K.Gödel: Über die Vollständigkeit des Logikkalküls, Doctoral Dissertation, University of Vienna (1929)

[12] K.Gödel: Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatsh. Math. und Phys. 38, pp. 173-198 (1931)

[13] K.Gödel: Consistency proof for the Generalized Continuum Hypothesis. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 25 pp. 220-224 (1939)

[14] P.J.Cohen: A Minimal Model for Set Theory. Bull. Amer. Math. Soc. 69, pp.537-540 (1963)

[15] P.J.Cohen: The Independence of the Continuum Hypothesis, I, II. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50 pp.1143-1148 (1964)

[16] P.Smith: An Introduction to Gödel's Theorems. Cambridge University Press (2007)