

## Transversal azimutal projeksiyonlarda Aitoff ve Wagner dönüşümleri

İbrahim Öztuğ Bildirici<sup>1</sup> , Sevgi Böge<sup>2\*</sup> 

<sup>1</sup>Konya Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, Selçuklu, Konya, Türkiye.

<sup>2</sup>Selçuk Üniversitesi, Kadınhanı Faik İçil Meslek Yüksekokulu, Harita ve Kadastro Programı, Kadınhanı, Konya, Türkiye.

**Öz:** David Alexandrovich Aitoff, uzunluk koruyan transversal azimutal projeksiyonu, planisfer gösterimler için kullanılabilir şekilde modifiye ederek ilginç bir yöntem uygulamıştır. Aitoff'tan çok sonra Karlheinz Wagner tarafından bu tür dönüşümler genelleştirilmiştir. Bu çalışmada dönüşüm yöntemleri tartışılarak, dönüşüm streografik projeksiyona uygulanmıştır. Bu uyarlama deformasyonlar açısından incelenmiş, Aitoff ve Hammer projeksiyonları ile karşılaştırılmıştır. Sonuçlar, bu yeni seçeneğin planisfer gösterimlerde kullanılabilirliğini göstermektedir.

**Anahtar Sözcükler:** Harita projeksiyonu, Planisfer gösterim, Aitoff projeksiyonu

### Aitoff and Wagner transformation in transversal azimuthal projections

**Abstract:** An interesting method has been applied by David Alexandrovich Aitoff modifying the equidistant transversal azimuthal projection so that it can be used for planisphere representations. Such transformations were generalized by Karlheinz Wagner long after Aitoff. In this study, the transformation method is discussed, and it is applied to stereographic projection. This modification has been examined in terms of distortions and compared with Aitoff and Hammer projections. The results show that this new option can be used in planisphere representations.

**Keywords:** Map projection, Planisphere representation, Aitoff projection

## 1. Giriş

Yeryüzünün tamamının gösterimi için kullanılan planisfer gösterimler silindirik, konik ve azimutal projeksiyonlardan türetilirler. Bu tür projeksiyonlar artık silindirik, konik ya da azimutal olmadıklarından pseudo ya da gerçek anlamda olmayan ön eki ile anılırlar. Bu çalışmada azimutal projeksiyonlardan planisfer türü projeksiyonlar elde etmek için Rus bilim adamı D. A. Aitoff (1854 - 1933) tarafından ortaya atılmış, daha sonra Alman K. Wagner (1906 - 1985) tarafından geliştirilmiş olan dönüşüm yöntemi ele alınacaktır. Aitoff, uzunluk koruyan transversal azimutal projeksiyonu modifiye ederek adıyla anılan projeksiyonu geliştirmiştir. Alman E. Hammer (1858 - 1925), Aitoff'un yöntemini alan koruyan transversal azimutal projeksiyona uygulamıştır. Birbirine çok benzeyen bu iki projeksiyon kaynaklarda çoğunlukla karıştırılmıştır (Bildirici, 2019; Snyder, 1987). Bu çalışmada Aitoff'un dönüşümü ele alınacak, Aitoff ve Hammer projeksiyonunun nasıl geliştirildiği Wagner'in genel dönüşüm yöntemi eşliğinde ortaya konacaktır (Wagner, 1949). Dönüşümün başka azimutal projeksiyonlara da uygulanması mümkündür. Bu çalışmada streografik ve ortografik projeksiyon uygulamaları gösterilecektir. Uygulamada kullanılacak streografik projeksiyon uygulaması deformasyonlar açısından analiz edilip, Aitoff ve Hammer projeksiyonları ile karşılaştırılacaktır.

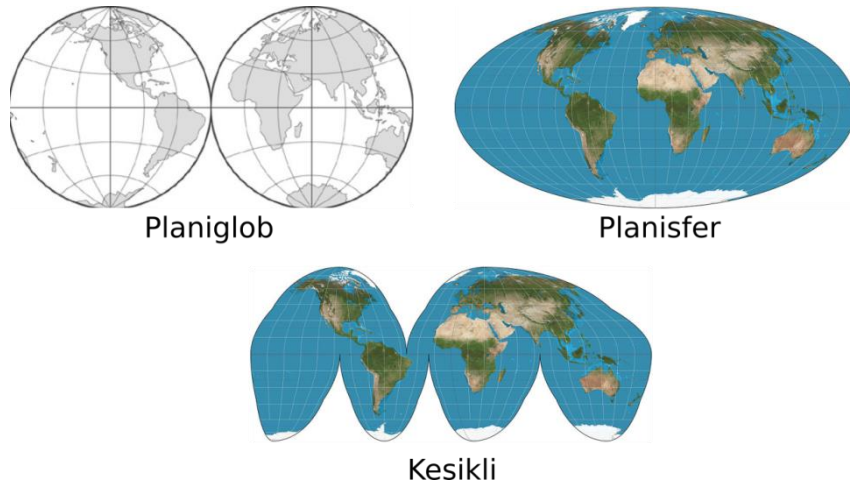
## 2. Materyal ve Metot

### 2.1 Yeryüzünün Tamamının Gösterimi Problemi

Gerçek anlamlı projeksiyonlar yeryüzünün tamamının gösterimi açısından bazı sakıncalar ortaya çıkarır. Azimutal projeksiyonda en çok bir yarı küre gösterilebilir. Konik projeksiyonda bir yarı küreden fazlası gösterilse de diğer kutba doğru hızla artan deformasyonlardan dolayı tercih edilmez. Bu projeksiyon türünün uygulamaları da bir yarı küre ile sınırlıdır. Bu kısıtlamanın yanında koninin açılımı yer küreselliğini yansıtmaz. Silindirik projeksiyonlar yeryüzünün tamamının gösterimi açısından uygundur. Bu projeksiyonda da yer küreselliği hissi oluşmaz. Dikdörtgen bir Dünya izlenimi söz konusudur. Kutuplara doğru hızla büyüyen deformasyonlar ve kutupların Ekvator uzunluğunda çizgilere dönüşmesi de bu projeksiyon türünün olumsuz özellikleri arasında sayılır.

Yeryüzünün tamamının gösterimi için silindirik projeksiyonlar dışında üç seçenek vardır (Bildirici, 2019; Hake, Grünreich & Meng, 2002);

- **Planiglob gösterim:** Yeryüzü yan yana yerleştirilen iki yarı küre halinde gösterilir. Çoğunlukla azimutal projeksiyonlar tercih edilir. Geçmişteki yaygın kullanımına rağmen günümüzde çok tercih edilen bir gösterim türü değildir (Şekil 1).
- **Planisfer gösterim:** Yer küreselliği algısı meydana getirmek için yeryüzünün tamamı elips ya da elipse yakın bir şekilde gösterilir (Şekil 1).
- **Kesikli gösterim:** Planisfer gösterimlerde oluşan deformasyonları azaltmak için birden fazla orta meridyen ile parçalı gösterim yapılabilir. Bu amaçla bilinen bir ya da iki projeksiyondan yararlanır. Genellikle iki projeksiyonun kombinasyonu şeklinde uygulamalar yaygındır (Şekil 1).



Şekil 1: Yeryüzünün tamamının gösterimine yönelik üç temel yöntem

Düzlem, koni ve silindir gerçek anlamı projeksiyon yüzeyleri olarak adlandırılır. Planisfer gösterimler bu üç projeksiyon türünün değişime uğratılmasıyla elde edilmiş gerçek anlamı olmayan projeksiyonlar ile elde edilir. Gerçek anlamı olmayan projeksiyonlar, itibari projeksiyonlar olarak da adlandırılır. İngilizce kaynaklarda genellikle gerçek anlamı projeksiyon türlerinin önüne pseudo eki getirilerek ayırt edilirler. En tipik özellikleri coğrafi ağın ortogonal olmamasıdır.

Gerçek anlamı olmayan projeksiyonlar genel olarak hem enleme ( $\varphi$ ) hem de boylama ( $\lambda$ ) bağlı iki fonksiyon ile ifade edilir.

$$x = x(\varphi, \lambda) \quad (1a)$$

$$y = y(\varphi, \lambda) \quad (1b)$$

Bu makalede eksen yönleri  $x$  sağa ve  $y$  yukarı olarak alınacaktır.

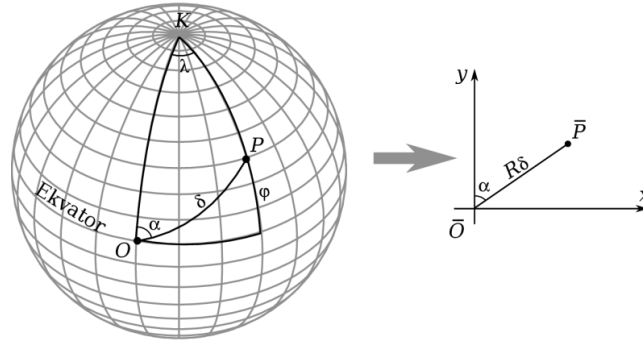
Planisfer gösterimler, kutupların nokta ve çizgi ile gösterilmesine göre de ikiye ayrılırlar. En tipik planisfer uygulaması, Ekvator ile orta meridyen oranının 2:1 olması ve kutuplar çizgi ile gösteriliyorsa kutup çizgilerinin de Ekvatorun yarısı uzunluğunda olmasıdır. Tipik olarak planisfer gösterimler ana karalar arasındaki alan oranlarının korunması amacıyla alan koruyandır. Bazıları ise her üç deformasyonu (alan, uzunluk, açı) dengeleyecek şekilde *optimal deformasyonlu* olarak tasarlanmıştır.

## 2.2 Aitoff Dönüşümü ve Projeksiyonu

Aitoff, transversal konumlu meridyen uzunluğu koruyan azimutal projeksiyondan hareketle tüm azimutal projeksiyonlardan planisfer projeksiyonlar elde edilebilecek bir dönüşüm uygulamasıdır (Bildirici, 2019; Snyder, 1987). Herhangi bir azimutal projeksiyon ekvator üzerinde (0,0) noktasında küreye teğet alınırsa (Şekil 2) projeksiyon genel eşitlikleri aşağıdaki gibidir.

$$x = Rf(\delta) \sin \alpha \quad (2a)$$

$$y = Rf(\delta) \cos \alpha \quad (2b)$$



Şekil 2: (0,0) noktasından teğet düzleme izdüşüm (meridyen uzunluğu koruyan transversal azimutal projeksiyon)

Burada  $f(\delta)$  azimutal projeksiyonlarda yarıçap fonksiyonudur.  $\alpha$  ise OP büyük daire yayının azimutudur (Şekil 2). Azimutal projeksiyon özelliği gereği kürede ve düzlemde aynıdır. Bu şekilde en çok  $-90^\circ$  ile  $+90^\circ$  boylamları arasındaki bölge (teğet noktaya göre oluşan yarımküre) gösterilebilir.

Aitoff, tüm yeryüzünü gösterebilmek için boylam açılarını yarıya indirmiş, bir daire içinde oluşan sıkışık görünümü gidermek için ise x koordinatını 2 ile çarparak yeryüzünü 2:1 oranında bir elips içinde göstermiştir.

Şekil 2'de gösterilen OP yayının azimutunun P noktasının coğrafi koordinatına bağlı olarak bilinmesi gerekir. Burada OKP küresel üçgenine sinüs teoremi uygulanır ise,

$$\sin \alpha = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sin \delta} \quad (3)$$

$$\cos \delta = \cos \varphi \cos \lambda \quad (4)$$

eşitlikleri yazılır. Dik kenarlı küresel üçgenlerde Neper bağıntılarından,

$$\tan \alpha = \frac{\sin \lambda}{\tan \varphi} \rightarrow \cos \alpha = \frac{\tan \varphi}{\sin \lambda} \sin \alpha \quad (5)$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta} \quad (6)$$

elde edilir.

Uzunluk koruyan azimutal projeksiyonda  $f(\delta) = R\delta$  olduğundan eşitlik (3) ve eşitlik (6), eşitlik (2)'de yerine yazılırsa transversal projeksiyon eşitlikleri elde edilir (Bildirci, 2019).

$$x = R \frac{\delta}{\sin \delta} \cos \varphi \sin \lambda \quad (7a)$$

$$y = R \frac{\delta}{\sin \delta} \sin \varphi \quad (7b)$$

Eşitlik (7)'de yer alan  $\delta$ , eşitlik (4)'ten bulunur. Eşitlik (7) aşağıdaki gibi de düzenlenebilir.

$$x = R \frac{\arccos(\cos \varphi \cos \lambda)}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}} \cos \varphi \sin \lambda \quad (8a)$$

$$y = R \frac{\arccos(\cos \varphi \cos \lambda)}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}} \sin \varphi \quad (8b)$$

Eşitlik (7) ya da (8) ile bir yarım küre gösterilebilmektedir (Şekil 3).



Şekil 3: Uzunluk koruyan transversal azimutal projeksiyon

Yeryüzünün tamamını göstermek için  $\lambda \rightarrow \lambda/2$  dönüşümü yapılırsa Şekil 4 elde edilir.



Şekil 4: Boylamin yarısı alınarak küre içinde tüm yeryüzünün gösterimi

Aitoff boylamı yarıya indirdikten sonra Şekil 4'te görülen gösterimi 2:1 oranında bir elips içine almak için  $x$  koordinatını da iki kat almıştır (Şekil 5).

$$x = 2R \frac{\delta}{\sin \delta} \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2} \quad (9a)$$

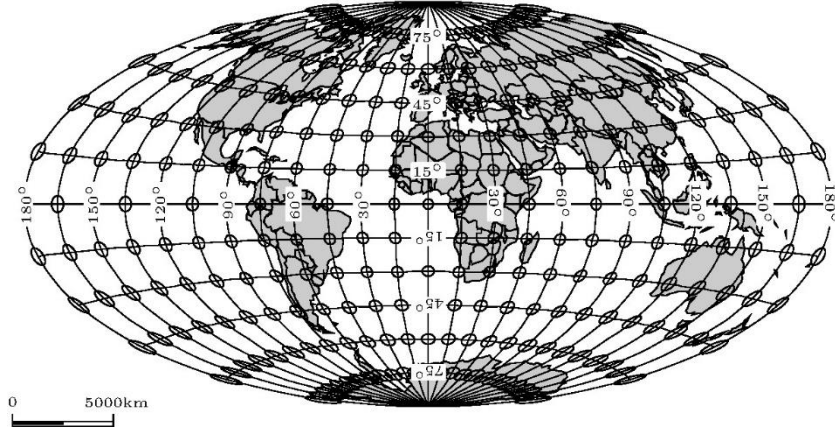
$$y = R \frac{\delta}{\sin \delta} \sin \varphi \quad (9b)$$

$$\cos \delta = \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \quad (9c)$$

ya da

$$x = 2R \frac{\arccos(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\lambda}{2}}} \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2} \quad (10a)$$

$$y = R \frac{\arccos(\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \frac{\lambda}{2}}} \sin \varphi \quad (10b)$$



Şekil 5: Aitoff projeksiyonu

### 2.3 Hammer Projeksiyonu

Hammer, Aitoff dönüşümünü alan koruyan azimutal projeksiyona uygulamıştır. Bu şekilde alan koruyan bir planisfer projeksiyon elde edilmiştir ki alan koruma genel olarak planisferlerde aranan bir özelliktir.

Alan koruyan azimutal projeksiyonda yarıçap fonksiyonu,

$$f(\delta) = 2R \sin \frac{\delta}{2} \quad (11)$$

alınır ise transversal projeksiyon eşitlikleri,

$$x = 2R \sin \frac{\delta}{2} \sin \alpha \quad (12a)$$

$$y = 2R \sin \frac{\delta}{2} \cos \alpha \quad (12b)$$

elde edilir. Eşitlik (3), (4), (6), eşitlik (12)'de yerine yazılır ve,

$$\sin \delta = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \quad (13a)$$

$$\cos \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \delta}{2}} \quad (13b)$$

olduğu göz önüne alınırsa, transversal alan koruyan projeksiyon için (14) eşitlikleri elde edilir.

$$x = \sqrt{2}R \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}} \quad (14a)$$

$$y = \sqrt{2}R \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \lambda}} \quad (14b)$$

Eşitlik (14)'e Aitoff dönüşümü uygulanırsa Hammer projeksiyonu elde edilir.

$$x = \sqrt{2}R \frac{\cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} \quad (15a)$$

$$y = \sqrt{2}R \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} \quad (15b)$$

Hammer projeksiyonu Aitoff projeksiyonundan esinlenilerek ortaya çıktığı için birçok kaynakta Hammer-Aitoff, Aitoff-Hammer gibi isimlendirilmiştir. Olası tercüme hataları nedeniyle zaman zaman Aitoff projeksiyonu ile karıştırılmıştır (Snyder, 1987). Bu karışıklıkta iki projeksiyonun birbirine çok benzer olmasının da etkisi vardır.

Aitoff projeksiyonu türetildiği uzunluk koruyan azimutal projeksiyonun özelliklerini kaybetmesine rağmen, Hammer projeksiyonu türetildiği alan koruyan azimutal projeksiyonun alan koruma özelliğine sahiptir.

## 2.4 Wagner Dönüşümü

Wagner, Aitoff'un düşüncesini genelleştirerek bilinen bir projeksiyondan yeni projeksiyonlar geliştirmek üzere bir dönüşüm yöntemi geliştirmiştir. Burada temel düşünce bilinen bir projeksiyonun belli bir bölgesinde daha geniş bir bölgeyi göstermektir. Şekil 4, bu düşüncüyü açıklamak için iyi bir örnektir. Transversal azimutal projeksiyon  $-90^\circ$  ile  $+90^\circ$  boylamları arasını göstermektedir. Bu bölgede boylamın yarısı alınarak  $-180^\circ$  ile  $+180^\circ$  boylamları arası gösterilmiştir. Wagner bu uygulama sonucu küçülen şekli dengelemek için türetilen yeni haritanın uygun bir dönüşümle tekrar büyütülmesini de öngörmüştür. Bu da Aitoff'un  $x$  koordinatını iki ile çarpması ile özdeş bir dönüşümdür. Wagner ünlü ders kitabında ele aldığı bu dönüşümü yeniden numaralama olarak tercüme edilebilecek "Umbeziffern" olarak adlandırmıştır (Wagner, 1949). Bu kavram İngilizce kaynaklara da bu isimle geçmiştir. Burada orijinal bir projeksiyonun dönüştürülmesi sonucu türetilmiş projeksiyonlar için genelleştirilmiş eşitliklerin çıkarılması söz konusudur.

Wagner (1949)'da üç ana kategoride ele alınmış olan dönüşüm yöntemlerine verilen örnek uygulamalar daha sonra kaynaklara Wagner I, II, III, IV, V ve VI adı ile geçen projeksiyonlardır (Canters, 2002; Hoschek, 1984; Snyder, 1997). Wagner kendisi bu numaralamayı yapmamıştır. Kitabındaki sıraya göre sonradan bu şekilde isimlendirme yapılmıştır.

İngilizce kaynaklar arasında Canters (2002) Wagner'in dönüşümlerini açık ve yalın bir notasyon ile açıklayan bir eser olarak öne çıkar. Aşağıda Canters'in notasyonu ile Wagnerin 3 dönüşüm yöntemi ele alınacaktır. Bu yöntemler genel olarak gerçek anlamlı ve gerçek anlamlı olmayan silindirik projeksiyonlara uygulanmalarına rağmen azimutal projeksiyonlara da uygulanabilirler.

Wagner dönüşümlerinde  $(u, v)$  coğrafi koordinatlar gibi düşünülerek orijinal projeksiyon aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$x = f_1(u, v) \quad (16a)$$

$$y = f_2(u, v) \quad (16b)$$

olmak üzere orijinal projeksiyon;

$$x = Af_1(u, v) \quad (17a)$$

$$y = Bf_2(u, v) \quad (17b)$$

$$u = u(\varphi) \quad (17c)$$

$$v = v(\lambda) \quad (17d)$$

olarak dönüştürülür.  $u = u(\varphi)$ ,  $v = v(\lambda)$  fonksiyonları keyfi olarak seçilebilirler. Burada  $u$  ve  $v$ , coğrafi ağın dönüştürülmesini sağlayan, coğrafi koordinatlara bağlı, A ve B ise ağın yeniden ölçeklendirilmesini sağlayan parametrelerdir. Orijinal projeksiyonun bazı özellikleri korunacak ise belli kısıtlamalar söz konusu olur. Wagner'in birinci dönüşüm yönteminde bu fonksiyonlar doğrusal olarak seçilmiştir (Canters, 2002; Wagner, 1949).

$$u = m\varphi \quad (18a)$$

$$v = n\lambda \quad (18b)$$

Wagner'in birinci dönüşüm yöntemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$x = \frac{k_1}{\sqrt{mn}} f_1(m\varphi, n\lambda) \quad (19a)$$

$$y = \frac{1}{k_2\sqrt{mn}} f_2(m\varphi, n\lambda) \quad (19b)$$

Bu dönüşüm tüm dünyayı orijinal projeksiyonun  $[-m\pi/2, m\pi/2]$  enlemleri,  $[-n\pi, n\pi]$  boylamları arasındaki kısmında gösterir. Orijinal projeksiyon kutbu nokta ile göstermiyor ve  $m = 1$  değilse kutup çizgi ile gösterilir. Coğrafi ağı büyütme için koordinatlar  $\sqrt{mn}$  terimine bölünür. Diğer katsayılar ise  $(k_1, k_2)$  eksenler doğrultusunda ölçekleme yapmak için konulmuştur. Bu terimler (17a) ve (17b) eşitliklerindeki A ve B parametrelerine karşılık gelmektedir.

Burada dönüşüm 4 parametreye  $(k_1, k_2, m, n)$  bağlı olmasına rağmen bunların üçünün bilinmesi durumunda dördüncüsü bulunabilir.

Gerçek anlamlı olmayan silindirik projeksiyonlarda kutup çizgisi ekvator oranı  $c$ , orta meridyen Ekvator oranı  $p$  ile gösterilirse (eksen oranları), bunlar ile (19) eşitliklerindeki parametreler arasında aşağıdaki ilişkiler vardır ( $k_2 = 1$  alınarak).

$$m = \sqrt{1 - c^2} \frac{m}{2k_1p} \quad (20a)$$

$$n = \frac{m}{2k_1p} \quad (20b)$$

İkinci dönüşüm, alan koruyan bir dönüşümdür. Orijinal projeksiyonun alan deformasyonu özelliği değişmez. Dolayısı ile orijinal projeksiyon alan koruyan ise, türetilmiş projeksiyonlar da alan koruyandır (Canters, 2002). Burada,

$$\sin u = m \sin \varphi \quad (21a)$$

$$v = n\lambda \quad (21b)$$

seçilir. Dönüşüm eşitlik (22) ile verilmektedir;

$$x = \frac{k}{\sqrt{mn}} f_1(u, v) \quad (22a)$$

$$y = \frac{1}{k\sqrt{mn}} f_2(u, v) \quad (22b)$$

Eksen oranları ve parametreler arasındaki ilişkiler;



$$m = \sqrt{1 - c^2} \quad (23a)$$

$$n = \frac{\arcsin m}{p\pi} \quad (23b)$$

şeklinindedir. İkinci dönüşümde orta meridyen üzerinde diferansiyel ölçek değişimi belirgindir. Bunu dengelemek için Wagner aşağıdaki fonksiyonlar ile üçüncü dönüşümü önermiştir. Eşitlik (24) dikkate alınırsa;

$$\sin u = m_1 \sin(m_2\varphi) \quad (24a)$$

$$v = n\lambda \quad (24b)$$

dönüşüm;

$$x = \frac{k}{\sqrt{m_1 m_2 n}} f_1(u, v) \quad (25a)$$

$$y = \frac{1}{k\sqrt{m_1 m_2 n}} f_2(u, v) \quad (25b)$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Wagner, dönüşümlerini transversal azimutal projeksiyonlara da uygulamıştır. Uzunluk koruyan transversal projeksiyona birinci dönüşüm uygulanırsa eşitlik (2) ve (19)'dan,

$$x = R \frac{k_1}{\sqrt{mn}} \delta \sin \alpha \quad (26a)$$

$$y = R \frac{1}{k_2 \sqrt{mn}} \delta \cos \alpha \quad (26b)$$

ya da

$$x = R \frac{k_1}{\sqrt{mn}} \frac{\delta}{\sin \delta} \cos(m\varphi) \sin(n\lambda) \quad (27a)$$

$$y = R \frac{1}{k_2 \sqrt{mn}} \frac{\delta}{\sin \delta} \sin(m\varphi) \quad (27b)$$

$$\cos \delta = \cos(m\varphi) \cos(n\lambda) \quad (27c)$$

bağıntıları elde edilir. Burada hem meridyenler hem de paraleller eğri biçimindedir.  $m$  kutupların gösterimini,  $n$  ise paralellerin eğriliğini belirleyen bir parametredir. Kutuplar  $m = 1$  durumunda nokta ile  $m < 1$  durumunda eğri ile gösterilir. Orta meridyen Ekvator oranı,

$$p = \frac{m}{2k_1 k_2 n} \quad (28)$$

olur. Wagner'in birinci dönüşümünün transversal azimutal projeksiyona uygulamasında  $m = 1, n = 0.5, k_1 = k_2 = \sqrt{2}$  seçilirse Aitoff projeksiyonu elde edilir. Dolayısı ile Aitoff, Wagner'den 60 yıl önce birinci dönüşümün basit bir durumunu uygulamıştır. Wagner (1949)'da  $m = 7/9, n = 15/8, k_1 = 1.4725, k_2 = 1.6733$  seçilerek kutupların çizgi ile gösterildiği bir projeksiyon sunulmuştur. Aitoff-Wagner ve Wagner IX olarak anılır (Canters, 2002; Wagner, 1949).

Wagner'in ikinci dönüşümü alan koruyan transversal azimutal projeksiyona uygulanarak alan koruyan planisfer

projeksiyonlar elde edilebilir. (12) ve (22) eşitliklerinden, eşitlik (29) ve (30) elde edilir.

$$x = 2R \frac{k}{\sqrt{mn}} \sin \frac{\delta}{2} \sin \alpha \quad (29a)$$

$$y = 2R \frac{k}{k\sqrt{mn}} \sin \frac{\delta}{2} \cos \alpha \quad (29b)$$

elde edilir. Burada;

$$\cos \delta = \cos n\lambda \cos u \quad (30a)$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin n\lambda \cos u}{\sin \delta} \quad (30b)$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin u}{\sin \delta} \quad (30c)$$

$$\sin u = m \sin \varphi \quad (30d)$$

Bu dönüşümde  $m = 1$ ,  $n = 0.5$ ,  $k = \sqrt{2}$  alınırsa Hammer projeksiyonu elde edilir. Wagner bu dönüşümü  $m = \sin 65^\circ$ ,  $n = 1/3$ ,  $k = 1.466$  parametreleri ile uygulayarak Hammer-Wagner ya da Wagner VII olarak adlandırılan projeksiyonu sunmuştur (Canters, 2002; Wagner, 1949).

## 2.5 Aitoff Dönüşümünün Alternatif Uygulamaları

Wagner dönüşümleri ya da bunların basit versiyonu olan Aitoff dönüşüm yöntemi streografik ve ortografik projeksiyonlara da uygulanabilir. Transversal streografik projeksiyon eşitlikleri,

$$x = 2R \tan \frac{\delta \cos \varphi \sin \lambda}{2 \sin \delta} \quad (31a)$$

$$y = 2R \tan \frac{\delta \sin \varphi}{2 \sin \delta} \quad (31b)$$

biçimindedir. (31) eşitlikleri,

$$\sin \delta = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \quad (32a)$$

$$\cos^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1 + \cos \delta}{2} = \frac{1 + \cos \varphi \cos \lambda}{2} \quad (32b)$$

yarım açı eşitlikleri ile daha sade bir duruma getirilebilir.

$$x = 2R \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{1 + \cos \varphi \cos \lambda} \quad (33a)$$

$$y = 2R \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \lambda} \quad (33b)$$

Wagner'in birinci dönüşümü uygulanırsa,

$$x = 2R \frac{k_1}{\sqrt{mn}} \frac{\cos(m\varphi) \sin(n\lambda)}{1 + \cos(m\varphi) \sin(n\lambda)} \quad (34a)$$

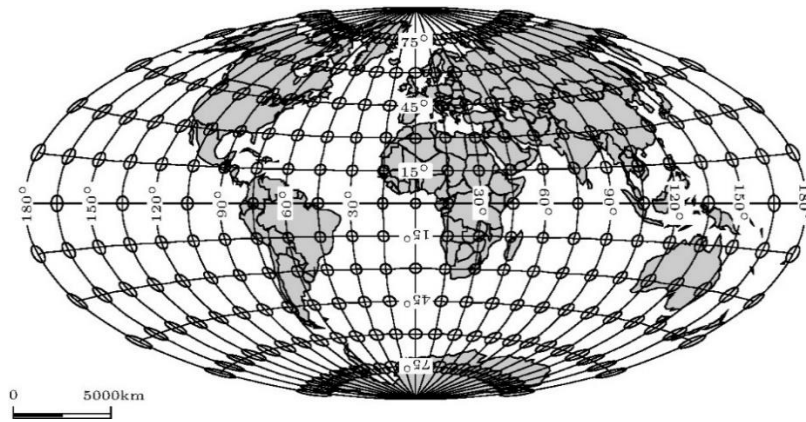
$$y = 2R \frac{k_1}{k_2 \sqrt{mn}} \frac{\sin(m\varphi)}{1 + \cos(m\varphi) \sin(n\lambda)} \quad (34b)$$

olur. Aitoff dönüşümü ile ( $m = 1, n = 0.5, k_1 = k_2 = \sqrt{2}$ ) eşitlik (35) elde edilir.

$$x = 4R \frac{\cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}} \quad (35a)$$

$$y = 2R \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}} \quad (35b)$$

Dönüşüm sonrası elde edilen projeksiyonun konform olma özelliği kaybolur.  $m = 1$  alındığından kutuplar nokta ile gösterilir. Parametreler farklı seçilerek farklı projeksiyonlar da türetilir. Bu projeksiyon bu çalışma kapsamında Aitoff-Streografik olarak anılacaktır. Şekil 6'da bu projeksiyonda Dünya haritası görülmektedir.



Şekil 6: Streografik projeksiyona uygulanan Aitoff dönüşümü

Benzer bir deneme ortografik projeksiyon ile de yapılabilir. Transversal konum bağıntıları:

$$x = R \cos \varphi \sin \lambda \quad (36a)$$

$$y = R \sin \varphi \quad (36b)$$

olmak üzere, Wagner'in birinci dönüşümü;

$$x = R \frac{k_1}{\sqrt{mn}} \cos(m\varphi) \sin(n\lambda) \quad (37a)$$

$$y = R \frac{k_1}{k_2 \sqrt{mn}} \sin(m\varphi) \quad (37b)$$

ve Aitoff dönüşümü,

$$x = 2R \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2} \quad (38a)$$

$$y = R \sin \varphi \quad (38b)$$

şeklinde elde edilir. Bu projeksiyon da kutupların nokta ile gösterildiği bir planisferdir. Ortografik projeksiyonun özelliğine bağlı olarak dış meridyene doğru şekiller çok fazla sıkışır. Bu nedenle uygun bir planisfer elde edilmez.

Gnomonik projeksiyonda bir yarıkürenin gösterilmesi mümkün olmadığından Aitoff-Wagner dönüşümü uygulanamaz.

## 2.6 Deformasyon Ölçütleri

Projeksiyonlarda ortaya çıkan deformasyonlar (uzunluk, alan ve açı) sonsuz küçük ölçekte (diferansiyel anlamda) Tissot Endikatrisi yardımıyla incelenir. Tissot Endikatrisi orijinal yüzeyde (küre ya da elipsoit) sonsuz küçük yarıçaplı bir dairenin projeksiyon düzleminde izdüşümü olup, genel olarak elips biçimindedir. Elips yarıçapları en büyük ve en küçük (ana deformasyonlar) deformasyon büyüklüklerini ( $a$ ,  $b$ ) ve yönlerini gösterirler.

Planisfer türü projeksiyonlarda ana deformasyon yönleri meridyenler ve paraleller yönünde değildir. Kısmi türevlerden yararlanılarak bulunur (Bildirici, 2019). Burada yalnızca en büyük ve en küçük deformasyon ya da diferansiyel ölçek değerleri ele alınacaktır. Tissot Endikatrisinin yönü için Bildirici (2017, 2019), Canters (2002), Hoschek (1984) gibi kaynaklardan yararlanılabilir.

Birim küre varsayımı ( $R=1$ ) ile  $a$ ,  $b$  (Endikatrıs yarıçapları) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$(a + b)^2 = \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (39a)$$

$$(a - b)^2 = \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \quad (39b)$$

Alan ( $p$ ) ve açı ( $w$ ) deformasyonları

$$p = ab \quad (40a)$$

$$w = 2 \arcsin \frac{a-b}{a+b} \quad (40b)$$

şeklindedir. Diferansiyel anlamda deformasyon araştırmasında başka ölçütler de vardır. Airy ölçütleri;

$$e_{A1} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{a}{b} - 1 \right)^2 + (ab - 1)^2 \right] \quad (41a)$$

$$e_{A2} = \frac{1}{2} [(a - 1)^2 + (b - 1)^2] \quad (41b)$$

Airy-Kavrayskiy ölçütü;

$$e_{AK} = \frac{1}{2} [(\ln a)^2 + (\ln b)^2] \quad (42)$$

Airy ölçütlerinin sayısal değerleri  $a$  ve  $b$  birden uzaklaştıkça hızlı büyür. Airy-Kavrayskiy ölçütü ise bu açıdan daha uygundur (Canters, 2002). Deformasyonlar açısından bir değerlendirme yapmak için düzenli ya da rasgele dağılmış noktalarda ölçütler hesaplanıp ortalamaları alınabilir.

## 3. Araştırma ve Tartışma

Bu başlık altında önceki bölümlerde eşitlikleri sunulmuş olan modifiye edilmiş streografik projeksiyon ya da bu çalışmada verilen isim ile Aitoff-Streografik projeksiyon, Aitoff ve Hammer projeksiyonları ile karşılaştırılacaktır.

Deformasyon karakterinin ortaya konması amacıyla  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \lambda \leq \pi$  aralığında rasgele dağılmış 100 adet noktada ana deformasyonlar ( $a$ ,  $b$ ), Airy ve Airy-Kavrayskiy ölçütleri hesaplanıp ortalamaları alınmıştır. Bu ölçütlerin hesaplanması için kısmi türevler Bildirici tarafından geliştirilmiş olan Earth Flattener yazılımı ile nümerik olarak hesaplanmıştır (Bildirici, 2017). Kısmi türevlerin bağıntıları Aitoff ve Hammer projeksiyonları için Bildirici (2019)'dan alınabilir. Aitoff-Streografik için kısmi türevler aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -2R \sin \varphi \sin \frac{\lambda}{2} \quad (43a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = R \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \quad (43b)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = R \cos \varphi \quad (43c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \quad (43d)$$

**Tablo 1:** Üç projeksiyonda deformasyon ölçütlerinin ortalama değerleri (Rasgele dağılmış 100 nokta ile)

|                           | $a$    | $b$    | $e_{A1}$ | $e_{A2}$ | $e_{AK}$ | $p$    | $w^\circ$ |
|---------------------------|--------|--------|----------|----------|----------|--------|-----------|
| <b>Aitoff</b>             | 1.7521 | 0.7950 | 2.0969   | 0.4854   | 0.2347   | 1.3057 | 41.075    |
| <b>Hammer</b>             | 1.6356 | 0.6669 | 3.5053   | 0.4004   | 0.2877   | 1.0000 | 47.734    |
| <b>Aitoff-Streografik</b> | 2.0706 | 1.1550 | 2.0789   | 0.9303   | 0.3082   | 2.3900 | 28.740    |

Tablo 1'de üç projeksiyon için 100 rastgele nokta ile hesaplanan ölçütlerin ortalama değerleri görülmektedir. Aitoff-Streografik projeksiyonu açı deformasyonu açısından en düşük değer ile dikkat çekmektedir. Airy ve Airy-Kavrayskiy ölçütleri bakımından Aitoff öne çıkmaktadır. Tablo 1'de önerilen yeni projeksiyonun da planisfer gösterimlerde bir seçenek olduğu görülmektedir. Özellikle şekil bozulmalarının alan bozulmalarına göre daha önemli olduğu uygulamalarda tercih edilebilir.

#### 4. Sonuç ve Öneriler

Yeryüzünün tamamının gösterimi için kullanılan planisfer gösterimler genel olarak silindirik projeksiyonlardan türetilir. Bu tür projeksiyonlarda paraleller yatay doğrular biçimindedir. Planisfer türetmek için azimutal projeksiyonlardan da yararlanılabilir. Rus bilim adamı Aitoff 1889'da böyle bir dönüşümü uzunluk koruyan transversal azimutal projeksiyonu kullanarak yapmış ve adıyla anılan projeksiyonu sunmuştur. 1893'te Alman bilim adamı Hammer aynı dönüşümü alan koruyan azimutal projeksiyona uygulayarak alan koruma özelliğini koruyan bir projeksiyon geliştirmiştir. Wagner bu tür dönüşümleri üç seçenek ile sistematize etmiş ve ders kitabında yayınlamıştır (Wagner, 1949).

Bu makalede Wagner'in üç dönüşüm yöntemi incelenmiş, Aitoff ve Hammer projeksiyonlarının Wagner'in genelleştirilmiş projeksiyon eşitliklerinden elde edilebildiği gösterilmiştir. Aynı yaklaşımın başka azimutal projeksiyonlarda da uygulanabileceği gösterilmiş ve streografik projeksiyon uygulamasının planisfer gösterimlerde bir seçenek olabileceği ifade edilmiştir. Özellikle şekil bozulmalarının önemli olduğu harita çalışmalarında yararlı olabileceği değerlendirilmektedir.

Ayrıca, Streografik projeksiyon uyarlaması Wagner'in genel eşitlikleri yardımıyla farklı parametrelerle de denenip kutupların eğri ile gösterildiği seçenekler de oluşturulabilir.

## Yazar Katkısı

**İbrahim Öztuğ Bildirici:** Fikir, Analiz ve yorumlama. **Sevgi Böge:** Yazım, Literatür taraması, Denetleme.

## Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar, bu çalışmada bilinen ilgili herhangi bir finansal veya finansal olmayan çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

## Kaynaklar

- Bildirici, I. O. (2017). An iterative approach for inverse transformation of map projections. *Cartography and Geographic Information Science*, 44(5), 463-471.
- Bildirici, İ. Ö. (2019). *Kartografya: Harita Tasarımı ve Kullanımı için Gerekli Bilim, Sanat ve Teknik*. Atlas Akademi Yayınevi, Konya.
- Canter, F. (2002). *Small-scale map projection design*. CRC Press.
- Hake, G., Grünreich, D., & Meng, L. (2002). *Kartographie: Visualisierung raum-zeitlicher Informationen*. Walter de Gruyter.
- Hoschek, J. (1984). *Mathematische Grundlagen der Kartographie*. Bibliographisches. Institut, Zürich.
- Snyder, J. P. (1987). *Map projections—A working manual (Vol. 1395)*. US Government Printing Office.
- Snyder, J. P. (1997). *Flattening the earth: two thousand years of map projections*. University of Chicago Press.
- Wagner, K. (1949). *Kartographische Netzentwürfe*. Bibliographisches. Institut, Mannheim.