ELEKTRONİK EĞİTİM BİLİMLERİ DERGİSİ
ELECTRONIC JOURNAL OF EDUCATION SCIENCES

Yıl:2015 Year:2015
Cilt: 4 Volume: 4
Sayı:8 Issue:8
(128-147)

SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN SAYI VE SAYI KÜMELERİYLE İLGİLİ KAVRAYIŞLARININ İNCELENMESİ

EXAMINING EIGHTH GRADE STUDENTS' CONCEPTIONS OF NUMBER AND NUMBER SETS

Savaş BAŞTÜRK[1]

Öz

İnsanın bilişsel yapılanmasında büyük rol oynayan sayı kavramı, uzun çağlardan beri uygarlığın gelişimine büyük katkılar sağlamıştır. Sayı kavramı, insanın bilme ve anlama yeteneğinin ayırıcı özelliklerinden biridir. Bu çalışmanın amacı, 8. sınıf öğrencilerinin sayı ve sayı kümeleriyle ilgili kavrayışlarını ortaya koymaktır. Araştırmada veri toplama aracı olarak açık uçlu sorulardan oluşan bir anket hazırlanmış ve 62 öğrenciye uygulanmıştır. Anket sorularının belirlenmesinde, ortaokul matematik dersi programından, ilgili literatürden ve araştırmacının öğretmenlik deneyimlerinden yararlanılmıştır. Araştırma kapsamında elde edilen veriler bir nitel analiz yöntemi olan içerik analizi kullanarak analiz edilmiştir. Öğrencilerin sorulara verdikleri cevapların tümü incelenmiş ve kategoriler belirlenmiştir. Araştırma sonuçlarına göre, öğrencilerin sayı kavramı sayıların yazılış biçimleriyle çok sıkı bir ilişki içindedir. Bu bağlamda, öğrencilerin büyük bir bölümü için, sadece virgüllü sayılar ondalık, kesirli sayılar rasyonel ve köklü sayılar irrasyoneldir. Ayrıca, öğrencilerin sayı kümeleri ve bunların birbiriyle olan ilişkileri konusundaki bilgileri çok yetersizdir.

Anahtar Kelimeler: Kavrayış, sayılar, sayı kümeleri, matematik eğitimi, sekizinci sınıf öğrencileri

Abstract

Number concept which plays a major role in the structuring of human cognitive, has contributed greatly to the development of civilization since ancient times. Number concept is one of the hallmarks of the ability of human knowledge and understanding. The aim of this study was to identify eighth grade students' conceptions of number and numbers sets. In the research, as data collection tool, a questionnaire consisting of open-ended questions was designed and administered to 62 students. In the determination of questions, the secondary school mathematics curriculum, the relevant literature and the researcher's teaching experiences were utilized. The obtained data were analysed by using content analysis which is a qualitative analysis method. According to the results of the study, the students' number concept was very strongly associated with the writing style of numbers. In this context, for a large part of them, only numbers with comma were decimal, fractions were rational and radical numbers were irrational. Further, their knowledge on number sets and the relationship with each other was very limited.

Key Words: Conceptions, numbers, number sets, mathematics education, eighth grade students

---

[1] Doç. Dr., Sinop Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, sbasturk@sinop.edu.tr

1. GİRİŞ

İnsanın bilişsel yapılanmasında büyük rol oynayan sayı kavramı, uzun çağlardan beri uygarlığın gelişimine büyük katkılar sağlamıştır. Sayı kavramı, insanın bilme ve anlama yeteneğinin ayırıcı özelliklerinden biridir (Margolis ve Laurence, 2008). Hayvanların sayı kavramları yaklaşık değerlerle sınırlı iken (Brannon, 2005; Gallistel, 1990), insanlar bu konuda sürekli gelişen bir kavrama ustalığına sahiptirler. Örnek vermek gerekirse, doğal sayılar dilsel bir yöntemle öğrenilmeye başlanır. Tartışmalı olmakla birlikte, teorisyenlerin çoğu çocukların doğal konuşma dilini kullanarak sayma sistemlerini öğrendikleri konusunda hemfikirdirler (Örneğin, Bloom, 2000; Carey, 2004; Dehaene, 1997; Hurford, 1987; Spelke, 2003). Ancak, doğal ve tam sayılar insanların gündelik hayatta karşılaştıkları problemleri çözmede yetersiz kalmıştır. Örneğin üç çocuk arasında iki pastayı paylaştırmak istediğimizde, *"Bunu doğal sayılar ya da tam sayılarla yapabilir miyiz?"*, *"Bu paylaşımı doğal ve tam sayılarla yapamazsak nasıl yaparız?"* gibi sorular birbirini takip eder ve böylece karşımıza farklı bir sayı kavramı (rasyonel sayılar) çıkar (Şiap ve Duru, 2004). İnsanlığın ihtiyaçları arttıkça ve düşünme evrimi devam ettikçe bu tip sorular daha da gelişmiş, çeşitlenmiş ve böylece birbirinden farklı sayılar ortaya çıkmıştır. Bu sayılar, kendi aralarındaki ortak özellikler ve farklılıklarla belirli kümeler oluşturmuşlar ve ilerleyen süreç içinde sayı kümeleri matematik bilimindeki yerini almıştır.

Bütün bunlarla birlikte, sayı kavramının günümüzdeki inşasına kadar çok uzun çağlar geçmiştir. *"Sayı kavramı"* birçok evrim geçirmiş, insanoğlu sayıları anlamada ve kavramada birçok zorluk çekmiştir. Bu duruma örnek olarak, tamsayılar ve tamsayıların oranlarından başka sayılar olamayacağını savunan ve $\sqrt{2}$ ile karşılaştıklarında şaşkınlığa uğrayarak onu sayı kabul etmeyen Pisagorcular verilebilir. Bir başka örnekte, bugün sayılar dizisinde otomatik olarak konumlandırdığımız sıfırla ilgilidir. İnsanlık sıfır sayısını günümüzdeki hali ile kavrayabilmek için çağlar harcamıştır (Köktürk, 2005). İnsanların sayıları kavramada yaşadıkları sorunların, sahip oldukları farklı yanılgıların günümüzde de öğrenciler tarafından yaşanabileceği bir gerçektir. Bu bağlamda, öğrencilerin sayılar üzerine birbirinden farklı düşüncelerini araştırmak bir gereklilik olarak ortaya çıkmaktadır. Bu durum, sayı kavramı öğrenimi ve öğretiminin incelenmesini de gerektirmektedir.

Matematik eğitiminin hedefi, geniş ve etkili, aynı zamanda zengin ve esnek olan matematiksel kavram yapılarını geliştirmektir (Meissner,1999). Matematiksel kavramları öğrenme, anlama, ilişkilendirme ve geliştirme beyindeki mantıksal bir yapılandırma ile gerçekleşmektedir (Przenioslo, 2004). Sayı kavramı, birçok matematiksel kavramın kazanılmasında ve birtakım matematiksel becerilerin elde edilmesinde anahtar kavram niteliğinde olduğundan (Baroddy, 1987; Hughes, 1989), bu becerilerin kazanılmasında okullardaki matematik eğitimi elbette büyük rol oynamaktadır. Matematik eğitiminin iyileştirilmesine katkıda bulunmak adına, matematikte çok önemli bir yeri olan sayı kavramıyla ilgili öğrencilerin düşünce ve yanılgılarını ortaya çıkarmak, ihtiyaç duyulan bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bouvier (1986) matematikçi bir meslektaşıyla arasında geçen bir diyalogu şu şekilde nakletmektedir: Arkadaşıma "*Sayı nedir?"* diye sordum. Şaka yaptığımı zannederek güldü. Gülerek ısrar edince şu cevabı verdi: *"Rakamlarla ve gerektiğinde bir virgülle yazılan bazı şeyler!"* Bu kısacık hikâyecik bile, hayatın hemen her alanında sıkça kullanılan sayıları tanımlamanın ne kadar zor olduğu gerçeğini gözler önüne sermektedir. Gerçekten de pek çok kişi için, bu soruya tatmin edici bir cevap vermek oldukça zordur (Jacquier, 1996). Bireylerin matematikle olan ilişkilerinin sayılarla başladığını söylemek mümkündür. Daha ilkokula başlamadan, aile çevresi ve okul öncesi eğitim kurumlarında sayılarla tanışmaya başlayan çocuk, sonraki yıllarda farklı sayı kümelerinin devreye girmesiyle bu kavramla olan ilişkilerini geliştirmekte ve böylece sayıların işlevinin sadece saymayla sınırlı olmadığının farkına varmaktadır.

Literatür incelendiğinde sayılarla ilgili pek çok çalışmanın yapıldığı ve bunların özellikle ondalık sayılar üzerine yoğunlaştığı görülmektedir (Abrougui, 2003; Anselmo vd., 1999; Archer ve Roy, 1991; Brousseau, 1981; Douady ve Perrin, 1986; Munyazikwiye, 1995; Roditi ve Robert, 2001). Bunun başlıca nedenleri arasında, bu sayıların öğretiminin pek çok ülke ilköğretiminin hemen her sınıfında önemli bir yere sahip olması ve doğal ve tamsayılara oranla öğrenciler için daha soyut olmaları nedeniyle kolayca anlaşılamamaları gelmektedir. Örneğin, öğrenciler tarafından karşılaşılan zorluklardan bazıları, zaten anlaşılması zor olan bu sayılarla çarpma da yapılabileceğini ve tamsayıların bilinen her özelliğinin bu sayılar için de geçerli olmayabileceğini kabul etmektir. Dolayısıyla, öğrenciye, 3,5'den sonra 3,6'nın gelmesi ve bu ikisi arasında başka hiçbir sayının bulunmaması gayet doğal gelmektedir (Anselmo vd., 1999). Araştırma ondalık sayılarla sınırlı olmamakla birlikte, yukarıda bahsedilen nedenler ve bu sayıların rasyonel sayıların özel bir hali olması bağlamında diğer sayı kümeleriyle olan ilişkileri göz önüne alınarak, ondalık sayılar hakkında öğrencilerin sahip oldukları "kavrayışların" (conceptions) neler olabileceğinin ortaya konması gerekmektedir. Ancak bundan önce, kavrayış ifadesinden ne anlaşıldığının kısaca bahsedilmesi, araştırmanın sonuçlarının yorumlanabilmesi açısından önemlidir.

Matematik eğitimcileri kavramla (concept), kavrayışı (conception ya da Vinner ve Tall'un (1981) ifadeleriyle concept image) birbirinden ayırmışlardır. Örneğin "pedagojide anahtar kavramlar sözlüğü" (Raynal ve Rieunier, 1997), kavrayışı (conception), öğrenenlerin algılanabilir bir olayı ya da durumu betimlemek, açıklamak, anlamak için referans aldıkları açık ya da örtük modeller olarak tanımlamaktadır. Dikkat edilirse bu tanımlamada, öğrenen kelimesi bir sınıf ortamında öğrenen öğrenciyle sınırlandırılmamaktadır. Bu nedenle, öğretmenin, öğrencinin, sosyal bir grubun ya da bir yetişkinin kavrayışından bahsetmek mümkündür. Öte yandan, birey ya da topluluğun herhangi bir olay ya da nesne ile ilgili kavrayışları, onun içinde bulunduğu durum (Balacheff, 1995) ve geçmiş yaşantılarıyla (Giordan, 1998) çok sıkı bir ilişki içindedir. Kavrayış üzerine yapılan çalışmalardan (Balacheff, 1995; Clement, 1994; Confrey, 1986; Giordan, 1998; Leonard ve Sackur, 1991) hareketle denilebilir ki, bilimsel olsun ya da olmasın kişi ya da bir grup tarafından oluşturulan kavrayış doğru olarak kabul edilen bir bilgi ya da çok mükemmel bir hata (misconception) olabilir.

Araştırmaya katılan öğrencilerin, cevaplarını daha iyi yorumlayabilmek açısından, sayılarla özellikle ondalık sayılarla ilgili var olan epistemolojik ve öğretim kaynaklı yaklaşımları incelemenin faydalı olacağı düşünülmektedir. Zira bu yaklaşımların öğrenci ve öğretmenin kavramlarının oluşumunda inkâr edilemez bir etkisi vardır. Abrougui (2003), öğretmenlerin ondalık sayılarla ilgili kavramlarını incelediği çalışmasında, bu sayıların Mısırlılardan günümüze kadar geçirdiği gelişimi ortaya koyarak, şu sonuca ulaşmaktadır: Ondalık sayılar Babiller ve Mısırlılarda somut problemlerin çözümünde, ölçmede, Nil nehrinin taşması sonucu sınırların yeniden belirlenmesinde, miktarların ölçülmesinde ve ticari alış-verişlerde kullanılmaları nedeniyle problem çözücü bir araç (Douady, 1984) olarak doğmuşlardır. Arap matematikçiler tarafından yine matematik içindeki problemleri (örneğin denklemlerin köklerinin yaklaşık değerini hesaplamada) çözmek için kullanılmışlar ve daha sonra Yunanlı matematikçiler tarafından özellikle Pisagor ekolünün temsilcileri ve Öklid tarafından teoremlere ve tanımlara konu edilmeleri sonucu bir öğretim nesnesi (Douady, 1984) durumuna gelmişlerdir. Dolayısıyla, bu sayıların epistemolojik ve tarihsel analizinden üç tür yaklaşımla karşılaşılmaktadır: Matematik dışı araç olarak kullanım (günlük hayat problemleri), matematik içi araç olarak kullanım ve bir eğitim nesnesi olarak kullanım.

Yine, Abrougui (2003) bu sayılarla ilgili öğretim kaynaklı yaklaşımları şu şekilde özetlemektedir: Genellikle kesirli sayılar işlenirken, özellikle paydası 10'a eşit olan kesirlerden sonra ondalık sayılara geçiş yapılmaktadır. Dolayısıyla ondalık sayılar kesirli sayılara örnek olarak ortaya çıkmaktadır. Bu durum, öğreneni (ya da öğreteni) bütün kesirli sayıların bir ondalık sayı olduğu yönünde bir kavram geliştirmeye yönlendirebilmektedir. Böylece rasyonel sayıların genel hali ile bu sayıların özel bir örneği olan ondalık sayılar arasında karıştırma durumları ortaya çıkabilmekte; yani 2/3, 5/12 ve 7/6 gibi ondalık olmayan sayılar salt rasyonel oldukları için öğrenciler tarafından ondalık sayı olarak nitelenmektedir.

Öte yandan, ondalık sayılara olan en bilindik yaklaşım, bu sayıların $a/10^n$ (a ve n tamsayı) şeklinde yazılan sayılar oldukları şeklindedir. Söz konusu bu durum, öğrencide, "Payı ne olursa olsun paydası 10 veya 10'un katı olan sayılar ondalık sayıdır." şeklinde bir düşüncenin gelişmesine neden olabilir. Bu bağlamda, $\pi/1000$ bazı öğrenciler tarafından bir ondalık sayı olarak değerlendirilebilir. Yine bu yaklaşım, paydası 10 olmadığı gerekçesiyle, örneğin 2/5, 13/40 ve 11/20 gibi, bazı ondalık sayıları ondalık kabul etmemeye neden olabilir. Ondalık sayıların öğretiminde karşılaşılan en yaygın durumlardan birisi bu sayıların virgüllü yazımlarıyla ilgili olan durumlardır. Zira sayılar dünyasına virgül ilk olarak bu sayılarla girmektedir. Dolayısıyla bu durumun öğrenciyi virgüllü bütün sayıları virgülden sonraki kısımlarını dikkate almadan (sonlu ya da sonsuz olması) ondalık olarak nitelemeye götürebilir. Ya da öğretim programlarında ve ders kitaplarında *"Bütün tamsayılar aynı zamanda bir ondalık sayıdır."* şeklinde vurgulansa bile, virgüllü olmadıkları gerekçesiyle doğal ve tam sayılar ondalık olarak görülmeyebilir. Ondalık sayılar dışında kalan sayılar için sahip olunabilecek kavrayışlara da kısaca değinmek gerekirse, bilindiği gibi sayıların pek çok işlevleri vardır. Bunlar, sayma (bir kümedeki eleman sayısını sayılar yardımıyla bulunması ve bulunan sayının daima bir doğal sayı olması), ölçme (özellikle ondalık sayıların öğretiminde sayıların bu özelliğinin kullanılması), parçalara ayırma (bir bütünü ya da bir çokluğu eşit parçalara ayırmak için özellikle kesirlerin kullanılması, örneğin pastayı üç eşit parçaya bölüp 2/3'sini almak gibi) şeklinde özetlenebilir.

Mevcut çalışmanın amacı, 8. sınıf öğrencilerinin sayı ve sayı kümeleriyle ilgili kavrayışlarını ortaya koymaktır. Bu bağlamda, *"Öğrenciler için ne sayıdır ya da değildir?"*, *"Öğrenciler sayıları sayı kümleriyle ve sayı kümelerini kendi aralarında nasıl ilişkilendirmektedir?"* gibi sorulara cevap aranmıştır.

2. YÖNTEM

Araştırma, geçmişte ya da halen var olan bir durumu var olduğu şekliyle betimlemeye amaçladığından tarama modelindedir (Karasar, 2000). Nicel ve nitel analiz yöntemleri bir arada kullandığından karma yöntem deseninden yararlanmaktadır.

Araştırma Grubu

Araştırma grubunu bir ortaokulun 8. sınıflarında okuyan 62 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırma için bu sınıf öğrencilerinin seçilmesinin nedeni, sekizinci sınıfın ortaokulun son sınıfı olması nedeniyle tüm ortaokul sürecinin bir bilançosunu yapma olanağı vermesidir.

Başka bir ifadeyle, ortaokulu bitirecek olan bir öğrencinin, liseye sayılar ve sayı kümeleriyle ilgili hangi kavrayışlarla geçeceğinin gözlenmek istenmesidir.

Veri Toplama Aracı

Araştırmada veri toplama aracı olarak, açık uçlu sorulardan oluşan bir anket kullanılmıştır. Ankette toplam 15 soru yer olmakta olup, bunların belirlenmesinde, ortaokul matematik dersi programından, ilgili literatürden (Anselmo vd., 1999; Jacquier, 1996; Margolis ve Laurence, 2008) ve araştırmacının öğretmenlik deneyimlerinden yararlanılmıştır. Bu makale kapsamında, araştırma problemiyle doğrudan ilgili olmayan 4 soru çıkarılmış olup, geriye kalan 11 sorunun analizinin sonuçlarına yer verilmiştir. Geliştirilen anket taslağı ilköğretim matematik eğitiminde doktora sahibi üç öğretim elemanının görüşüne sunulmuş ve öğrencilerin sayılar ve sayı kümeleriyle ilgili kavrayışlarını ortaya çıkarmak amacıyla kullanılabileceği konusunda onay alınmıştır. Ayrıca anket uygulanmadan önce ilgili sınıfa giren 2 öğretmene incelettirilmiş ve yine 10 sekizinci sınıf öğrencisine okunabilirliğini ve anlaşılabilirliğini kontrol etmek amacıyla uygulanmıştır.

Bu araştırma kapsamında ele alınan sorular kısaca tanıtılacak olursa: Ankette yer alan bir soruda öğrencilerin sayı olarak neyi kabul edip etmediklerini ortaya koymak amaçlanmıştır. Öğrencilere verilen 14 ifadeden hangi ya da hangilerinin sayı olmadığı sorulmuştur. Bir soruda öğrencilerin verilen 8 sayıdan hangi ya da hangilerinin reel sayı olduğunu; bir başka soruda verilen 7 sayıdan hangi ya da hangilerinin ondalık sayı olduğunu işaretlemeleri istenmiştir. Bir soru aralık ve doğal sayı kavramıyla ilgili olup öğrencilerden $-5 \leq a < 7$ aralığındaki doğal sayıları yazmaları istenmiştir. Yine benzer bir başka soruda, sayı doğrusu üzerinde verilen bir aralıkta kaç tane doğal, kaç tane tam ve kaç tane reel sayı olduğunun yazılması istenmiştir. İki soruda öğrencilerin kesirlerle ilgili kavrayışları ortaya konmaya çalışılmıştır. Bunlardan birinde, öğrenciler bir basit kesri diğerinde ise bileşik kesri şekille göstermek durumundadırlar. Bir başka soruda ise, önceki soruların tersine, öğrencilerin verilen 3 farklı şekli kesir olarak ifade etmeleri gerekmektedir. Bir soruda, öğrencilere çeşitli sayıların ve sayı kümelerinin olduğu bir tablo verilmiş ve verilen sayıların ait olduğu sayı kümelerini işaretlemeleri istenmiştir. Son soruda ise, farklı sayı kümelerine ait sayılardan önce ve sonra gelen sayıların yazılması istenerek, öğrencilerin çeşitli sayı kümelerindeki büyüklük küçüklük ilişkisiyle ilgili kavrayışlarını belirlemek amaçlanmıştır.

Verilerin Analizi

Araştırma kapsamında elde edilen veriler bir nitel analiz yöntemi olan içerik analizi kullanarak analiz edilmiştir. Öğrencilerin sorulara verdikleri cevapların tümü incelenmiş ve kategoriler belirlenmiştir. Daha sonra, her bir kategorinin hangi sıklıkla tekrar ettiği (frekansı) bulunmuştur. Böylece, nitel veriler nicelleştirilmiştir. Nitel verilerin nicelleştirilmesindeki temel amaç, güvenirliği arttırmak, yanlılığı azaltmak ve kategoriler arasında karşılaştırmalar yapmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 1999). Araştırmacı ve iki uzmanın değerlendirmelerindeki görüş birliği (interrater agreement) Miles ve Haberman'ın (1994) belirttiği şu formülle hesaplanmıştır: Uzlaşma Yüzdesi=[Görüş Birliği/(Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı)] x 100. Bu hesaplama sonucu Uzlaşma Yüzdesi 81 olarak bulunmuş ve belirlenen kategorilerin tutarlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

3. BULGULAR

Araştırma kapsamında elde edilen bulgular bu kısımda tanıtılacaktır. Öğrencilerin sorulara vermiş oldukları cevapların kategorilere göre frekans ve yüzdeleri hesaplanmış ve bunlara dayalı olarak yorumlar yapılmıştır.

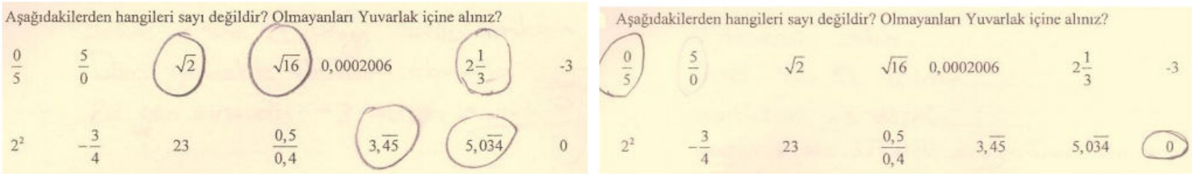
Öğrencilere Göre Sayı Olmayan İfadeler

Öğrencilerin sayı olarak neyi kabul edip etmediklerini ortaya koymaya yönelik soruya vermiş oldukları cevaplar analiz edildiğinde, Tablo 1'de verilen sonuçlar elde edilmiştir. Tablodan da anlaşıldığı gibi araştırmaya katılan öğrencilerin yarıdan fazlası 0/5 ve 5/0 ifadelerini sayı olarak kabul etmemektedir (sırasıyla %56,5 ve %53,2). Oranların birbirine çok yakın olması bu iki ifade arasındaki farkın öğrenciler tarafından tam olarak anlaşılmadığını da göstermektedir. 5/0 için yarıya yakın öğrencinin (%46,8) sayı olmadığını ifade etmemesi oldukça şaşırtıcı bir durumdur ve pek çok öğrencinin paydadaki sıfırın tanımsızlığa yol açtığını bilmediğini göstermektedir.

Tablo 1. Öğrencilere Göre Sayı Olmayanlar İfadeler

İfadeler	*f*	*%*
0/5	35	56,5
5/0	33	53,2
0,5/0,4	25	40,3
0	22	35,5
$5,0\overline{34}$	17	27,4
0,0002006	15	24,2
$3,\overline{45}$	14	22,6
$\sqrt{16}$	13	21
$\sqrt{2}$	12	19,4
$2^{\frac{1}{3}}$	12	19,4
2^2	12	19,4
-3	11	17,7
-3/4	9	14,5
23	3	4,8

Bununla birlikte öğrencilerin rasyonel sayılar ve ondalık sayılarla ilgili bazı zorluklar yaşadıkları da görülmektedir. Örneğin, %40,3'lük bir kesim 0,5/0,4 ifadesini bir sayı olarak kabul etmemektedir. Araştırmadan elde edilen ilginç bir sonuç da sıfırla ilgilidir. Öğrencilerin küçümsenemeyecek bir kısmı (%35,5) sıfırı bir sayı olarak kabul etmemektedir. Tablodan da görüleceği gibi $3,\overline{45}$, ve $5,0\overline{34}$ ifadelerinin sayı olarak kabul edilmeme durumu birbirine yakın oranlardadır (sırasıyla %22,6 ve %27,4). Ayrıca, öğrencilerin bazıları 0,0002006, $2^{\frac{1}{3}}$ ve 2^2 ifadelerini sayı olarak değerlendirmemişlerdir. Bu durum, bazı öğrencilerin kesirli sayıların yanı sıra üslü sayılar ve ondalık sayıları da sayı olarak kabul etmede bazı zorluklar yaşadıklarını göstermektedir (sırasıyla %24,2 ve diğer ikisi için %19,4). Köklü sayıları sayı olarak kabul etmeyen öğrenciler olduğu gibi negatif tam ve rasyonel sayıları da sayı olarak görmeyen öğrenciler bulunmaktadır. Şekil 1'de iki öğrencinin bu soruya vermiş oldukları cevaplar görülmektedir.



Şekil 1. Öğrencilere Göre Sayı Olmayanlar

Sonuç olarak, öğrencilerin sayı kavrayışları daha çok sıklıkla karşılaştıkları sayılardan (doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı gibi) oluşmaktadır. Sıfır öğrencilerin önemli bir kısmı tarafından bir sayı olarak kabul edilmezken, sıfırın içinde bulunduğu sayı ifadeleri sıfırın kendisinden daha fazla öğrencileri irrite etmektedir.

Öğrencilere Göre Reel Sayılar

Öğrencilerin en geniş sayı kümesi reel sayılarla olan ilişkilerini ortaya koyabilmek için, bazı sayı ifadeleri verilmiş ve hangilerinin reel sayı olduğu sorulmuştur. Anketin bu sorusuna ait cevaplar doğrultusunda oluşan frekans ve yüzdelikler Tablo 2'de yer almaktadır.

Tablo 2. Öğrencilere Göre Reel Sayılar

Sayı ifadeleri	$\sqrt[3]{-8}$	π	$\sqrt{4}$	$\sqrt{-9}$	7	0	8,21	3/4
f	28	27	23	24	18	16	14	13
%	45,2	43,5	37,1	38,7	29	25,8	22,6	21

Tablodan da görüldüğü gibi, öğrencilerin yaklaşık %80'inin 3/4 sayısını reel sayı olarak kabul etmemiş olması oldukça ilginçtir. Ayrıca, yine %70, 7 sayısının bir reel sayı olduğunu düşünmemektedir. İlginç olan durumlardan biri de 0 sayısının öğrenciler tarafından, yaklaşık %75 oranında, bir reel sayı olarak görülmemesidir. Bir önceki soruda dikkat çeken "sıfırın sayı olarak kabul edilmeme durumu" burada da bir reel sayı olarak kabul edilmeme şeklinde devam etmektedir. Öte yandan, önemli sayıda bir öğrencinin verilen köklü ifadeleri reel sayı olarak görmede de problemleri olduğu görülmektedir ($\sqrt{4}$ durumunda %63, $\sqrt{-9}$ durumunda %61). Bu iki sayının reel sayı olarak kabul edilme oranlarının birbirine oldukça yakın olması, karekök içerisinin negatif olmayacağı bilgisinin pek çok öğrenci tarafından dikkate alınmadığını da göstermektedir. $\sqrt[3]{-8}$ ve π ifadesi öğrenciler tarafından en çok reel sayı olarak görülen ifadeler olmuşlardır (sırasıyla %45,2 ve %43,5).

Sonuç olarak, araştırmaya katılan öğrencilerin reel sayılar kümesinin özellikleriyle, bir sayıyı reel sayı yapan ya da yapmayan unsurların neler olduğuyla, reel sayılar kümesinin diğer sayı kümeleriyle olan ilişkisiyle ilgili bilgilerinde önemli eksiklikler olduğu görülmektedir. Sayının ifadesi öğrenciler için biraz karmaşık ya da daha az tanıdık ise, en geniş sayı kümesi olması nedeniyle, reel sayı olarak nitelendiğini söylemek mümkündür.

Öğrencilere Göre Ondalık Sayılar

Araştırmaya katılan öğrencilere bir başka soruda, yine bazı sayı ifadeleri verilmiş ve bunlardan hangilerinin ondalık sayı olduğunu belirtmeleri istenmiştir. Verilen cevaplar doğrultusunda oluşan frekans ve yüzdelikler Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3. Öğrencilere Göre Ondalık Sayılar

Sayı ifadeleri	2,5	0,7	0,161616…	0,3333…	$2,1\overline{6}$	10	3
f	47	40	35	33	21	10	2
%	75,8	64,5	56,5	53,2	33,9	16,1	3,2

Tablodan da görüldüğü gibi, virgüllü olan sayıların ondalık sayı olarak nitelendirilmeleri diğerlerine göre oldukça yüksektir. En çok ondalık sayı olarak kabul edilen, %75,8'lik bir oranla, 2,5 sayısıdır. Bunu, %64,5 ile 0,7; %56,5 ile 0,161616… ve %53,2 ile 0,3333… sayıları takip etmektedir. $2,1\overline{6}$ sayısının farklı ifade biçiminin sayının ondalık olarak kabul edilme oranını önemli ölçüde düşürdüğü görülmektedir. Yaklaşık üçte ikilik bir oran bu farklı ifade ediliş biçimi yüzünden $2,1\overline{6}$ sayısını ondalık sayı olarak görmemektedir. Devirli ondalık sayıların, 2,5 ve 0,7'ye göre ondalık olarak görülme oranlarında bir düşüş söz konusudur. Bunu yazımlarında virgülün olması pek çok öğrenciyi çekerken, yine yazımlarındaki karmaşıklık bazı öğrencileri itmiştir şeklinde yorumlamak mümkündür. Başka ilgi çekici bir sonuç da 10 ile 3 sayısı arasında gözlenmektedir. Bu iki sayının ondalık olarak kabul edilme oranı düşük olmakla birlikte (sırasıyla, %16,1 ve %3,2), 10 sayısı daha fazla ondalık olarak görülmektedir. Bu durumu, bazı öğrencilerin "ondalık" ile "on" arasında bağlantı kurmuş olabilecekleri şeklinde yorumlamak mümkündür.

Sonuç olarak, öğrenciler bir sayının ondalık olup olmadığına, ondalık sayıların tanımından ziyade virgülle yazılmaları, farklı ifade edilmeleri ve okunuşlarında ondalık kelimesini çağrıştırıp çağrıştırmamaları gibi dış indislere bakarak karar vermektedirler.

Öğrencilerin Doğal Sayı Kavramı

Araştırmaya katılan öğrencilerin verilen bir aralıktaki doğal sayıları teşhis edip edemediklerini belirlemek amacıyla sorulan bir soruya verdikleri cevapların analizi Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. $-5 \leq a < 7$ Aralığındaki Doğal Sayılar

Kategoriler	*f*	*%*
Aralıktaki bütün tamsayıları yazanlar	20	32,3
Sadece 6 diyenler	17	27,4
Doğal sayıları yazanlar	4	6,5
Sadece 5 yazanlar	3	4,8
Eksik sayı yazanlar	2	3,2
Diğer	4	6,5
Boş	12	19,4
Toplam	62	100

Tablodan da anlaşıldığı gibi, soruyu doğru olarak cevaplayan öğrenci oranı sadece %6,5'tir. Öğrencilerin %32,3 gibi önemli bir oranı aralıktaki bütün tamsayıları yazma eğiliminde bulunmuşlardır. -5 sayısını 5 olarak algılayarak aralıkta sadece 6 sayısının olduğunu düşünen öğrencilerin oranı ise %27,4'tür. Bu öğrencilerin negatif sayıları kabul etmede problemleri olduğunu söylemek mümkündür. Öte yandan, %20'e yakın bir oranın soruyu cevaplamamış olması dikkat çekici bulunmuş ve sorunun öğrencilere zor geldiği şeklinde yorumlanmıştır.

Bir başka soruda öğrencilere sayı doğrusu üzerinde 0 ve 1 sayıları verilmiş ve bu aralıkta kaç tane doğal sayı, kaç tane tam sayı ve kaç tane reel sayı olduğu sorulmuştur. Tablo 5'de öğrencilerin doğal sayı sorusuna verdikleri cevapların analizleri yer almaktadır.

Tablo 5. Aralıktaki Doğal Sayı Sayısı

Kategoriler	***f***	***%***
Sıfır tane	15	24,2
Bir tane	11	17,7
İki tane	3	4,8
Üç tane	2	3,2
Sonsuz	1	1,6
Diğer	3	4,8
Boş	27	43,5

Buna göre, öğrencilerin sadece %24,2'lik bir kesimi hiçbir doğal sayı bulunmadığını belirterek soruyu doğru cevaplayabilmişlerdir. %43,5 gibi önemli bir oranının soruyu cevaplamamış olması oldukça ilginçtir ve sorunun bu öğrenciler için zor olduğu şeklinde yorumlanmıştır.

Tablo 6. Aralıktaki Tamsayı Sayısı

Kategoriler	***f***	***%***
Sıfır tane	16	25,8
Bir tane	11	17,7
İki tane	4	6,5
Sonsuz	1	1,6
Diğer	5	8,1
Boş	25	40,3

Tablo 6'da aralıktaki tamsayı sayısıyla ilgili soruya verilen cevapların analizi görülmektedir. Sonuçlara bakıldığında doğal sayılarla ilgili cevaplarla oldukça benzer oldukları görülmektedir. Soruda verilen aralık gereği cevabın değişmediği dikkate alındığında bu benzerlik pekte şaşırtıcı değildir.

Tablo 7. Aralıktaki Reel Sayı Sayısı

Kategoriler	*f*	*%*
Sonsuz	12	19,4
Sıfır tane	7	11,3
Bir tane	6	9,7
İki tane	5	8,1
Üç tane	1	1,6
Diğer	2	3,2
Boş	29	46,8

Aralıkta yer alan reel sayıların sayısıyla ilgili soruya verilen cevapların analizine gelince, Tablo 7'den de anlaşıldığı gibi, sadece %19,4'lük bir kesim söz konusu aralıkta sonsuz tane reel sayı olduğunun farkındadır. Bu oldukça düşük bir orandır. Önceki sorularda olduğu gibi, öğrencilerin yaklaşık %47'si soruyu cevaplamamıştır. Bu, sayıların ait oldukları kümeyi teşhis etmede öğrencilerin önemli bir bölümünün ciddi sorunlar yaşadığını göstermektedir. Sonuç olarak, öğrenciler verilen bir aralıktaki doğal sayıları teşhis etmede, tamsayılarla doğal sayıları birbirinden ayırmada ve negatif sayılarda problemler yaşamaktadırlar.

Kesirli sayıların şekillerle ifadesi

Bilindiği gibi kesirler, genel olarak doğal sayılardan farklı olarak bütünleri değil, parçaları ilgili oldukları bütünlerle ilişkili olarak saymak ya da ifade etmek için kullanılmaktadırlar. Kesirlerin öğrenciler tarafından şekillerle ifade edilebilmesi anlaşıldıklarını gösteren önemli göstergelerden biridir. Ankette bu konuyla ilgili 3 soru yer almaktadır. İlk iki soruda öğrencilerden verilen bir kesri şekil olarak ifade etmeleri istenmektedir. Birinde 2/7 basit kesrinin, diğerinde 7/2 bileşik kesrinin ifade edilmesi söz konusudur. Öğrencilerin bileşik kesri ifade etmede, basit kesre oranla daha fazla zorlanacakları düşünülmektedir. Tablo 8'de 2/7 kesrinin şekille ifadesini isteyen soruya öğrencilerin vermiş oldukları cevapların analizi yer almaktadır.

Tablo 8. 2/7 Sayısının Şema ile Gösterimi

Kategoriler	*f*	*%*
Doğru cevap	42	67,7
Şekli eşit parçalara ayırmadan 7'de 2 tarayanlar	9	14,5
Sayı doğrusunda hatalı gösterim yapanlar	4	6,5
Yanlış cevaplar	4	6,5
2/9 yapanlar	2	3,2
Boş	1	1,6

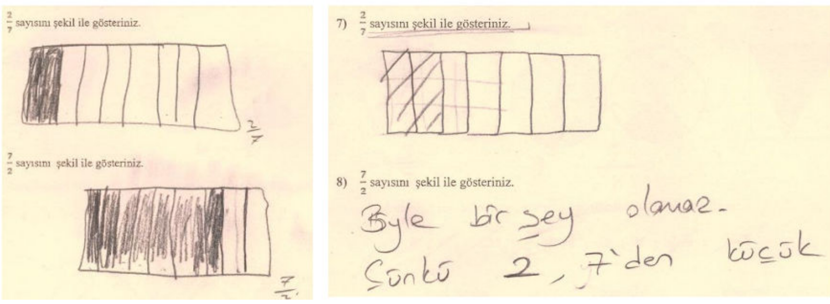
Tablodan da görüldüğü üzere 2/7 kesrini şekillerle doğru olarak ifade eden öğrencilerin oranı %67,7'dir. Bazı öğrenciler şekli eşit parçalara ayırmadan 7'de 2'yi tararken (%14,5), diğer bazıları sayı doğrusunda hatalı gösterimler yapmışlardır (%6,5). Az sayıdaki öğrenci, 2/7 yerine 2/9'u şekil ile ifade etmişledir (%3,2). Parçaların eşit alınmaması problem edilmezse, soruya doğru cevap veren öğrencilerin oranı, %82,2'lere kadar çıkmaktadır ki, bu da öğrencilerin basit kesirleri şekille ifade etmede oldukça başarılı olduklarını göstermektedir.

Pay ve paydanın yer değiştirilmesiyle elde edilen 7/2 bileşik kesrinin şekille ifadesine gelindiğinde, öğrencilerin vermiş oldukları cevapların analizinden elde edilen sonuçlar Tablo 9'daki gibidir.

Tablo 9. 7/2 Sayısının Şema ile Gösterimi

Kategoriler	***f***	***%***
Doğru cevap	20	32,3
2/7'yi gösterenler	17	27,4
Yanlış cevaplar	9	14,5
7/9'yi gösterenler	5	8,1
Sayı doğrusunda gösterenler	3	4,8
"Böyle bir şey olamaz" diyenler (Açıklaması: 7 >2)	2	3,2
Boş	6	9,7

Tablodan da görüldüğü gibi, soruyu doğru olarak cevaplayan öğrenci oranının %32,3'e kadar düşmüş olması, öğrencilerin 2/7 ifadesinde göstermiş oldukları başarıyı (%82,2) 7/2'de sergileyemeyecekleri öngörüsünü desteklemektedir. Bazı öğrenciler 2/7'deki rahatlıklarından vazgeçememişler ve sanki 2/7 isteniyormuş gibi davranarak soruyu cevaplamışlardır (%27,4). Az sayıda da olsa bazı öğrenciler bileşik kesirlerin paylarının paydalarından büyük olmasından dolayı şema ile gösterilemeyeceğini söylemiş olmaları oldukça ilginçtir (%3,2). Şekil 2'de iki öğrencinin bu soruya vermiş oldukları cevaplar verilmiştir.



Şekil 2. Basit ve Bileşik Kesirlerin Şekillerle Gösterimi

Bu kısma ait son soruda ise, öğrencilere bazı kısımları taranmış 3 geometrik şekil verilerek bunları kesir olarak ifade etmeleri istenmektedir. Şekillerden ilkinde basit, ikincisinde tam sayılı kesir söz konusu iken, üçüncüsünde parçalar eşit olmadığından bir kesirden bahsetmek zordur.

Tablo 10. Basit Kesre Karşılık Gelen Şeklin İfadesi

Cevaplar	2/5	5/2	3/5	5/3	3/2	Diğer
f	1	4	37	12	5	3
%	1,6	6,5	59,7	19,4	8,1	4,8

Tablo 10'dan da görüldüğü gibi, öğrencilerin %60'a yakın bir kısmı şekli doğru olarak ifade edebilmiştir. %19,4'lük bir kesim pay ve paydanın yeri konusunda zorluklara sahip olup, 3/5 yerine 5/3 yazmışlardır. Soruda verilen ikinci şekil iki parçadan oluşmaktadır ve öğrenciden taralı bölgeyi bileşik ya da tam sayılı kesir şeklinde ifade etmeleri beklenmektedir. Verilen cevapların analizi Tablo 11'de görüldüğü gibidir.

Tablo 11. Bileşik Kesre Karşılık Gelen Şeklin İfadesi

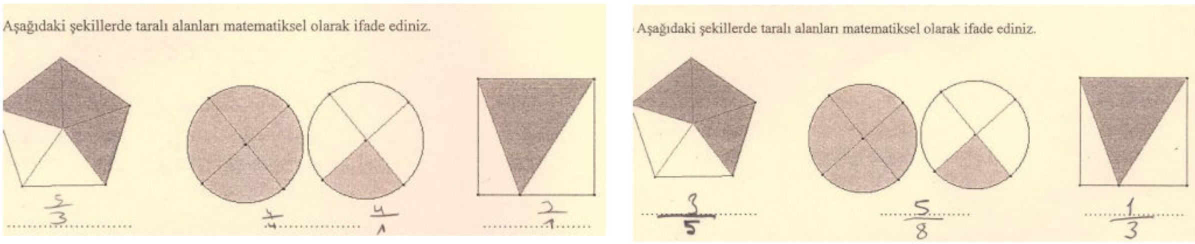
Kategoriler	*f*	%
5/4	14	21,9
5/8	13	20,3
İki farklı şekil olarak algılayanlar	12	18,8
8/5	8	12,5
Diğer	15	23,4
Boş	2	3,1
Toplam	64	100

Şeklin kesir olarak ifadesini doğru yapan öğrenci oranı sadece %21,9'dur. Birinci şekilde %60 olan başarı oranının bu kadar düşmüş olması, "öğrencilerin bileşik kesri ifade etmede, basit kesre oranla daha fazla zorlanacakları" şeklindeki öngörüyü desteklemektedir. Yine öğrencilerin yaklaşık %20'si iki şekli tek bir bütünmüş gibi ele alarak 5/8 yanlış cevabını verirken, %18,8 sanki iki farklı şekil söz konusuymuş gibi davranarak şekillere denk gelen kesri ayrı ayrı ifade etmişlerdir. Hatalı bir yol izlemiş olsalar da, %12,5 için pay ve paydayı karıştırma problemi hala bu soruda da kendini göstermektedir. Diğer cevap oranının yüksekliği, öğrencilerin şekil karşısında bir bocalama yaşadıkları şeklinde yorumlanmıştır (%23,4).

Tablo 12. Parçaları Özdeş olmayan Taralı Şeklin Kesir Olarak İfadesi

Kategoriler	*f*	%
1/3	27	43,5
3/1	13	21
½	10	16,1
2/1	2	3,2
2/2	1	1,6
Tanımsız	4	6,5
Boş	5	8,1

Tablo 12’de öğrencilerin parçaları eşit olmayan taranmış bir şekil için vermiş oldukları cevapların analizi yer almaktadır. Tablodan da görüldüğü gibi, öğrencilerin yarıya yakını, parçaların eşit olup olmadığına dikkat etmeksizin, taralı bölgeyi 1/3 kesriyle ifade etmektedir (%43,5). Şeklin bir kesir belirtmediğinin farkında olarak, “tanımsız” cevabını veren öğrenci oranı ise sadece %6,5’tir. Hatalı çözüm içinde pay ve paydayı karıştıranlar %21, 1/2 cevabını vererek taralı alan ile taranmamış alanları oranlayanlar ise %16,1’dir. Şekil 3’de iki öğrencinin bu soruya vermiş oldukları cevaplar görülmektedir.



Şekil 3. Taralı Alanların Kesirlerle İfadesi

Sonuç olarak, öğrencilerin kesirleri şekille ya da şekilleri kesirle ifade etme konusundaki başarıları istenen seviyede değildir. Ayrıca, basit kesirlerde gösterdikleri başarıyı bileşik kesirler söz konusu olduğunda tekrarlayamamakta ve hatta bazıları bileşik kesirlerin şema ile gösterilemeyeceğine inanmaktadırlar. Ayrıca, kesirlerin anlaşılmasında hayati öneme sahip parçaların eşitliği ilkesi de öğrencilerin çok azında yerleşmiş gözükmektedir.

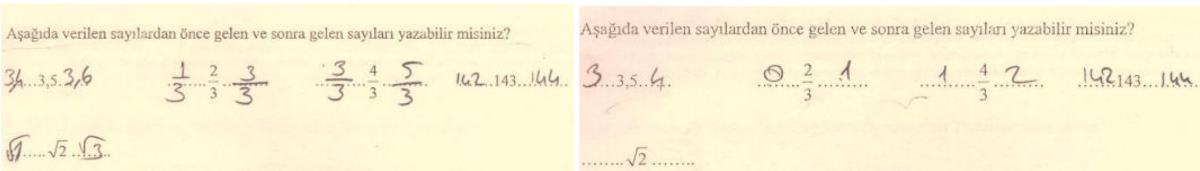
Önce Gelen Sonra Gelen Sayıyı Yazma

Ankette yer alan bir soruda, öğrencilere farklı sayı kümelerine ait bazı sayılar verilerek, bu sayılardan önce ve sonra gelen sayıları yazmaları istenmiştir. Sorudan beklenen şey, öğrencilerin doğal sayılar ve tam sayıların bir özelliği olan ardışıklığı, aşırı genelleyerek, diğer sayı kümelerine de uygulayıp uygulamadıklarını gözlemlemektir. Verilen cevapların analizi Tablo 13’de verildiği gibidir.

Tablo 13. Önce ve Sonra Gelen Sayılar

Sayılar		Kendi cinsinden		Kendi cinsinden olmayan		Boş
		Doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış	
3,5	*f*	41	1	11	2	7
	%	66	2	18	3	11
2/3	*f*	47	4	3	3	5
	%	76	6	5	5	8
4/3	*f*	43	8	2	4	5
	%	69	13	3	6	8
143	*f*	54	0	0	1	7
	%	87	0	0	2	11
$\sqrt{2}$	*f*	41	1	1	1	18
	%	66	2	2	2	29

Tablodan da görüldüğü gibi öğrenciler çoğunlukla, verilen sayıdan önce ve sonra gelen sayıları belirlerken, herhangi bir zorunluluk olmamasına rağmen, verilen sayının cinsinde (virgüllü ise virgüllü, a/b şeklinde ise a/b, köklü ise köklü vb.) sayılar yazmayı tercih etmişlerdir. Her sayı için bu oran yüksek olup, 143 doğal sayısı için en yüksektir (%87). Dikkati çeken bir başka durum ise, öğrencilerin verilen sayının cinsinden bir sayı yazmayı tercih ettiklerinde, verilen sayının türü ne olursa olsun, 1 artırma ve 1 eksiltme yoluna giderek, ardışıklık ilişkisine göre hareket etmeleridir. Şekil 4'de iki öğrencinin bu soruya vermiş oldukları cevaplar yer almaktadır.



Şekil 4. Önce ve Sonra Gelen Sayı

Sonuç olarak, öğrenciler doğal sayı ve tam sayılardan bildikleri ardışıklık özelliğini diğer sayı kümelerine de uygulamaya çalışmaktadırlar. Sayıların yazılış biçimleri önce gelen ve sonra gelen sayının seçiminde dikkat edilen en önemli ölçütlerden biridir.

Sayı Kümeleri ve Sayılar

Ankette yer alan bir soruda öğrencilerin sayılar ile sayı kümeleri arasındaki ilişkiye yönelik kavrayışlarını ortaya koymak amaçlanmıştır. Bu bağlamda, öğrencilere bazı sayılar verilmiş ve bunların yine verilen sayı kümelerinden hangi ya da hangilerine ait olduğunu belirtmeleri istenmiştir. Tablo 14, doğru-yanlış ayrımına gitmeden, öğrencilerin verilen sayıları hangi sayı kümesine ait gördüğüne bakılarak oluşturulmuştur.

Tablo 14. Sayı Kümeleri ve Sayılar

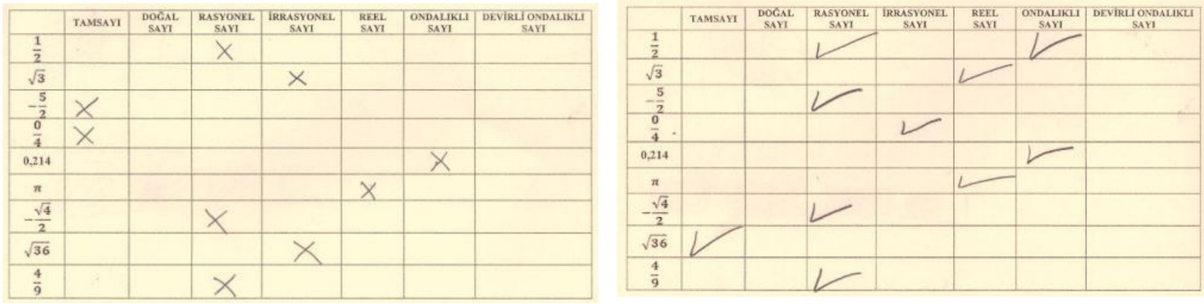
	Tamsayı		Doğal		Rasyonel		İrrasyonel		Reel		Ondalık		Devirli Ondalık	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
1/2	15	24	9	15	27	44	4	6	26	42	16	26	3	5
$\sqrt{3}$	4	6	4	6	3	5	22	35	10	16	2	3	3	5
-5/2	7	11	9	15	19	31	4	6	24	39	15	24	2	3
0/4	6	10	17	27	8	13	5	8	22	35	9	15	5	8
0,214	5	8	3	5	4	6	2	3	22	35	36	58	11	18
π	4	6	4	6	3	5	9	15	39	63	7	11	8	13
$-\sqrt{4}/2$	15	24	3	5	12	19	12	19	27	44	6	10	3	5
$\sqrt{36}$	14	23	9	15	8	13	14	23	29	47	2	3	7	11
4/9	11	18	11	18	21	34	3	5	23	37	11	18	3	5

Tablodan da görüldüğü gibi, sayıların hepsi reel olmasına rağmen, en çok reel olarak algılanan sayı pi sayısı iken (%63), en az reel kabul edilen sayı %16'lık bir oranla $\sqrt{3}$ sayısıdır. Bu iki sayının irrasyonel olarak nitelenmelerine baktığımızda ise, $\sqrt{3}$'ün daha çok irrasyonel olarak algılandığını görüyoruz (%35'e karşın %15). Bunda, pi sayısının bazen 3 bazen de 3,14 olarak alınmasının etkisi olduğunu söylemek mümkündür. 0,214 sayısı öğrencilerin %58 gibi önemli bir oranı tarafından ondalık sayı olarak algılanırken, aynı şekilde ondalık olan ama kesirli şekilde yazılmış 1/2 sayısı sadece öğrencilerin %26'sı tarafından ondalık sayı olarak nitelenmektedir. Bu durum, öğrencilerin sayı kavrayışlarında sayıların yazılış biçiminin ne kadar önemli rol oynadığını göstermektedir. Kesirli formatta yazılan sayılar arasında en çok rasyonel olarak algılanan sayı ise 1/2'dir. Aynı formatta yazılmış olmasına rağmen 0/4 sayısı sadece %13 tarafından rasyonel olarak nitelendirilmiştir. Bunda sonucun sıfır olması ve sıfırın da daha çok tam ya da doğal sayı olarak görülmesinin etkisi olabilir. $\sqrt{3}$ sayısını irrasyonel olarak niteleyen öğrenci sayısı %35 iken, yine köklü olup ama irrasyonel olmayan -$\sqrt{4}$/2 ve $\sqrt{36}$ sayılarını irrasyonel olarak niteleyen öğrenci oranı, sırasıyla %19 ve %23'tür. Bu oranlar, her köklü sayı irrasyoneldir anlayışının öğrencilerde ne kadar güçlü olduğunu göstermektedir. 4/9 sayısı öğrencilerin çok azı tarafından (%5) devirli, %18'i tarafından ondalık ve %34'ü tarafından rasyonel olarak nitelenmektedir. Burada da kesirli yazımın rasyonel olarak algılanmada etkili olduğu söylenebilir. 0/4 sayısının tam sayı olarak algılanma oranı doğal sayı olarak algılanma oranından düşüktür (%10'a karşı %27). Bunda, sıfırın tam sayıdan ziyade doğal sayı olarak algılanmasının etkisi olduğu düşünülebilir.

Tablo 15. Sayı Kümleri Arasındaki İlişkiler

Sayılar	Sayı Kümeleri
1/2	QRO (%1,6), QR (%9,7), QO (%6,5), RO (%3,2), R (%12,9), Q (%12,9), O (%8,1)
$\sqrt{3}$	RI (%9,7), I (%22,6)
-5/2	QRO (%1,6), QR (%4,8), RO (%6,5), QO (%3,2), Q (%16,1), O (%6,5), R (%16,1)
0/4	NQR (%1,6), NR (%11,3), NQ (%1,6), ZR (%4,8), N (%8,1), Q (%9,7), R (%11,3), Z (%4,8)
0,214	QRO (%3,2), RO (%16,1), O (%30,6), Q (%1,6), R (%9,7)
π	RI (%1,6), I (%11,3), R (%43)
-$\sqrt{4}$/2	ZQR (%1,6), ZQ (%1,6), QR (%3,2), ZR (%9,7), R (%22,6), Z (%11,3), Q (%11,3)
$\sqrt{36}$	ZNR (%4,8), N (%4,8), NQ (%1,6), NR (%1,6), Q (%4,8), ZR (%3,2), ZQ (%1,6), QR (%1,6), R (%25,8), Z (%9,7)
4/9	RO (%1,6), QR (%6,5), D (%1,6), O (%6,5), Q (%19,4), R (%21)

Öğrencilerin sayı kümelerini birbirleriyle olan ilişkilerine yönelik kavrayışlarına gelince, Tablo 15'ten de anlaşıldığı üzere, bu konuda oldukça zayıf oldukları görülmektedir. Örneğin, 1/2 sayısının hem ondalık, hem rasyonel hem de reel olduğunu bilen öğrenci sayısı neredeyse yok denecek kadar azdır (sadece %1,6). Benzer durum, -5/2, 0/4, π, -$\sqrt{4}$/2 ve 4/9 için de söz konusudur. Sonuç olarak, araştırmaya katılan öğrencilerin sayı kümeleri ve bunların birbiriyle olan ilişkileri konusundaki bilgileri çok yetersizdir. Şekil 5'de iki öğrencinin bu soruya vermiş oldukları cevaplar yer almaktadır.



Şekil 5. Sayıların Sayı Kümeleriyle İlişkileri

4. SONUÇ ve TARTIŞMA

Genel olarak sayı kavramı, özellikte de reel sayı kavramı, kazanılması kolay kavramlardan değildir. Jacquier'nin (1996) de ifade ettiği gibi, "bütün sayıların kesirli bir yazımı vardır" düşüncesinden "sayılar arasında bazılarının kesirli yazımı vardır" düşüncesine geçişin sorunsuz olacağını beklemek oldukça zordur. Araştırmanın bulgularından da anlaşıldığı gibi, öğrencilerin sayılar ve sayı kümleriyle ilgili kavramsal bilgileri çok yetersizdir. Buna neden olarak bazı araştırmacılar, sayılarla ilgili olarak daha çok işlemlere odaklanıldığını, işlemsel ve kurala dayalı bilginin yanında, bunların temelini oluşturan kavramsal bilgilere de yer verilmesinin gerektiğini ifade etmektedirler (Küçük ve Demir, 2009; Temel ve Eroğlu, 2014). Mevcut araştırmada, sekizinci sınıf öğrencilerinin sayılar ve sayı kümeleriyle ilgili kavrayışları 62 öğrenciye uygulanan bir anket yardımıyla ortaya konmaya çalışılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Öğrencilerin sayı kavrayışları daha çok sıklıkla ya da ilk karşılaştıkları, doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı gibi sayılarla sınırlıdır. Baştürk ve Dönmez'in (2008) KPSS'ye hazırlık için özel bir dershaneye devam eden üniversite mezunu yetişkinlerle gerçekleştirdikleri çalışmada da, araştırmaya katılan kursiyerlerin en iyi tanıdıkları sayı kümeleri doğal ve tam sayı kümeleri olması, söz konusu kavrayışların ne kadar direnç gösterdiğini, eğer önlem alınmazsa, sonraki eğitim-öğretim aşamalarında da pek fazla değişmediğini göstermektedir. Öğrencilerin önemli bir kısmı sıfırı bir sayı olarak kabul etmekte zorlanmaktadırlar. Hatta içinde sıfırı barındıran sayı ifadeleri söz konusu olduğunda, bu oran daha da artmaktadır. Sıfır, yüzyıllar boyunca insanoğluna hem ilham kaynağı olmuş hem de kafasını karıştırmış sıra dışı bir sayıdır. Öğrencilerin sıfır hakkındaki düşünceleri genellikle kendine has ve alışılagelenin dışındadır. Belki de bunda diğer sayıları sayarak, nesnelerin miktarını ifade ederek somut bir şekilde öğrenirken, sıfırı onunla bir şey ifade etmeden soyut olarak tanımalarının bilmelerinin etkisi bulunmaktadır (Seidelmann, 2004). Sonuç olarak sıfır yokluğu, olmayanı ifade etmektedir ve insanoğlu için de var olanı bilmek ve anlamak olmayanı, yokluğu anlamaktan daha kolaydır. Benzer olarak, Temel ve Eroğlu'nun (2014) çalışmasında da sıfırın sekizinci sınıf öğrencileri tarafından rasyonel sayı olarak kabul edilmediğini görüyoruz. Kabul etmemenin gerekçesi ise, öğrenciler tarafından *"sıfırın değeri olmadığı için rasyonel sayı olmadığı"* şeklinde dile getirilmektedir. Araştırmacılar, söz konusu yanılgının üstesinde gelebilmenin yolu olarak, sıfırın sadece yokluk anlamı üzerinde durulmayarak, diğer anlamlarının ve sıfırın bir sayı olduğunun üzerinde durulmasını tavsiye etmektedirler.

Araştırmaya katılan öğrencilerin bildikleri en geniş sayı kümesi, sınıf seviyeleri gereği reel sayılardır. Henüz karmaşık sayılarla tanışmadıklarından bütün öğrendikleri sayılar reel sayılar kümesinin bir elemanı ve bütün sayı kümeleri de reel sayılar kümesinin alt kümesidir.

Böyle olmasına rağmen, öğrencilerin reel sayılar kümesinin özellikleri, reel sayılar kümesinin diğer sayı kümeleriyle olan ilişkisiyle ilgili bilgilerinde önemli eksiklikler olduğu görülmektedir. Tanıdıkları en geniş sayı kümesi olduğundan, sayının ifadesi öğrenciler için biraz karmaşık ya da daha az tanıdık ise, öğrenciler tarafından reel sayı olarak nitelendiği görülmektedir. Sayıları reel sayı olarak niteleme oranı diğer sayı kümelerine göre biraz yüksek olsa da, pek çok öğrencide sayı hakkında edinilen ilk izlenim kolay kolay değişmemektedir. Başka bir ifadeyle, bir sayının ilk olarak tam sayı ya da rasyonel sayı olarak öğrenilmesi, sayı kümeleri ve aralarındaki ilişkiler üzerinde yeterince durulmadığında, söz konusu sayının diğer üst sayı kümelerine ait olarak algılanmasını zorlaştırmaktadır.

Virgüllü yazım ondalık sayıları ifade etmede en yaygın kullanılan yazım biçimlerinden biridir. Ancak sadece bir yazım biçimidir. Yaygın olarak kullanılması öğrencilerde her virgüllü sayı ondalıktır ya da bir sayı virgüllü yazılmamış ise ondalık değildir şeklinde hatalı bir kavrayışın yerleşmesine neden olmaktadır. Örneğin pi sayısı virgüllü olarak yazılabilmekte ve bir ondalık sayı değilken, 1/2 sayısı kesirli şekilde yazılmış bir ondalık sayıdır. Araştırmaya katılan öğrencilerin de, bir sayının ondalık olup olmadığına, daha çok yazım şekline bakarak karar verdikleri görülmektedir. Benzer duruma Baştürk ve Taştepe'nin (2013) sınıf öğretmeni adaylarıyla yapmış oldukları çalışmada da rastlanmış, araştırmaya katılan öğretmen adaylarının pek çoğunun "her virgüllü sayı bir ondalık sayıdır" genellemesini taşıdığı görülmüştür.

Öğrenciler ondalık sayıları virgülle bu kadar özleştirmelerine rağmen, literatürdeki pek çok çalışmanın da altını çizdiği gibi, virgülün sayıdaki işlevini tam olarak anlamamakta, sanki virgül yokmuş gibi işlem yapmakta, ondalık sayıyı iki doğal sayının basitçe yan yana getirilmiş bir hali şeklinde algılamakta ve virgülü basitçe kaydırarak bunları tam sayı haline getirebileceğini düşünmektedir (Seyhan ve Gür, 2004; Temel ve Eroğlu, 2014). Brousseau (1983) bu tip hataların en önemli gerekçelerinden birinin ondalık sayıların öğretiminde tercih edilen yaklaşımlar olduğunu ifade etmektedir. Pek çok öğretmen, ondalık sayıların öğretiminde, uzunluk ölçüleri yaklaşımını kullanılmakta ve bir cismin uzunluğunu, 1,75 m yani 1 m 75 cm ya da 175 cm örneğinde olduğu gibi, bir birim ve bir alt birim şeklinde ifade etmektedir. Bu ise öğrencinin ondalık sayıyı, sanki yan yana gelmiş birbirinden bağımsız iki sayı olarak algılamasına yol açmakta ve ondalık sayılarla işlem yaparken 3,7+2,8=5,15 gibi hatalar yapmasına ya da 1,75 m = 175 cm örneğinde olduğu gibi metre ile santimetre arasındaki ilişkiyi dikkate almadan virgülü basitçe kaydırmasına neden olmaktadır.

Bilindiği gibi matematikte bazı tanım, teorem, özellik ya da kurallar belli sayı kümeleri üzerinde tanımlıdır. Örneğin $x^2 = -4$ reel sayılarda bir anlam ifade etmezken karmaşık sayılarda bir anlamı vardır. Ya da (0,1) aralığında hiçbir tane doğal ve tamsayı yokken, sonsuz tane rasyonel ya da reel sayı vardır. Öğrencinin bunların ayrımında olması, hem sayıları bilerek ve yerinde kullanabilmesi hem de ilerleyen öğretim safhalarında zorluk yaşamaması açısından oldukça önemlidir. Ne yazık ki, araştırmaya katılan öğrencilerin büyük bir çoğunluğu, verilen bir aralıktaki doğal sayıları teşhis etmede, tamsayılarla doğal sayıları birbirinden ayırmada problemler yaşamaktadırlar. Öte yandan, öğrencilerin sayı kümeleri ve bunların birbiriyle olan ilişkileri konusundaki bilgileri de çok yetersizdir. Örneğin, 4 sayısı doğal sayıdır, tam sayıdır, rasyonel sayıdır ve aynı zamanda reel sayıdır. Ama pek çok öğrenci 4 sayısını sadece doğal ya da tam sayı olarak düşünmekte ve diğer sayı kümeleriyle olan ilişkisini göz ardı etmektedir. Bu sadece sayılara özgü bir durum değildir. Örneğin, pek çok öğrenci için kare karedir, dikdörtgen dikdörtgendir, ancak karenin de bir dikdörtgen olduğu, bu her ikisinin dörtgenlerin özel bir durumu olduğu meçhuldür. Aslında bütün bunlar, eğitim sistemimizin "ilişkisel anlama" (Skemp, 1976) adına ne durumda olduğunu ortaya koyan önemli göstergelerdir. Zimmermann ve Cunnigham (1991) anlamayı, öğrencinin konular arasındaki ilişkiyi görmesine bağlamışlar ve ilişki kurulmadan yapılan öğretimin, öğrenme anlamadan gerçekleşmiş olsa da, her konunun birbirinden bağımsızmış gibi algılanmasına neden olacağının altını çizmişlerdir. Skemp (1976) bu tür öğrenmeleri kuralların kullanım gerekçelerini bilmeden basitçe uygulanmasına dayanan "enstrümantal öğrenme" olarak nitelerken, "ilişkisel öğrenmeye" dikkat çekmiş bu öğrenmenin diğerinden üstünlüğünü savunmuştur.

Bazen öğrenciler daha önce işlenen bir konuda öğrendikleri bir teoremi, özelliği sonraki konularda da, uygun olup olmadığına bakmadan, kullanma eğilimlerindedirler. Graeber ve Johnson (1991) öğrencilerin, belli bir sınıf, küme ya da durum için geçerli olan kural, prensip, özellik ya da kavramı diğer başka durumlar için de geçerliymiş gibi düşünerek uygulamasına "aşırı genelleme" adını vermektedirler. Araştırmada da buna benzer bir durumla karşılaşılmış olup, öğrencilerin doğal sayı ve tam sayılardan bildikleri ardışıklık özelliğini diğer sayı kümelerine de uygulamaya çalıştıkları gözlenmiştir. Pek çok öğrenci, örneğin ondalık sayılarda, doğal sayılardan kalma bir özellik olan, "her doğal sayının bir ardışığı vardır" özelliğini kullanılabilmekte ve 2,65'den hemen sonra 2,66 gelir şeklinde hatalı sonuçlara ulaşmaktadır. Dolayısıyla, öğrencide ondalık sayı kavramının tam olarak yerleşmesi, ancak bu düşüncenin ortadan kalkmasıyla mümkündür (Baştürk, 2014). Ayrıca, öğrencilerin sayıların yazılış biçimlerine olan bu aşırı bağlılıkları, söz konusu sayıdan önce ve sonra gelen sayının seçiminde de kendini göstermektedir. Sayı köklü yazılmışsa, önce ve sonra gelen sayı köklü, kesirli yazılmışsa önce ve sonra gelen sayı kesirli olarak ifade edilmektedir.

Kesirler tamsayılar gibi bir miktar belirtirler, ancak bütünlerin değil parçaların söz konusu bütünde kaç tane olduğunu gösterirler. Şekiller kesirleri görünür kıldıklarından kesir kavramının kazanılmasında, şekilden kesre ya da kesirden şekle geçişlerin, yadsınamayacak önemi vardır (Altun, 2005). Araştırmaya katılan öğrencilerin kesirleri şekille ya da şekilleri kesirle ifade etme konusundaki başarıları istenen seviyede değildir. Ayrıca, basit kesirlerde gösterdikleri başarıyı bileşik kesirler söz konusu olduğunda tekrarlayamamakta ve hatta bazıları bileşik kesirlerin şema ile gösterilemeyeceğine inanmaktadırlar. Ayrıca, kesirlerin anlaşılmasında hayati öneme sahip parçaların eşitliği ilkesi de öğrencilerin çok azında yerleşmiş gözükmektedir.

Araştırmadan elde edilen sonuçlar doğrultusunda, şu öneriler verilebilir:

- Araştırmanın bulguları öğrencilerin anket sorularına vermiş oldukları cevaplarla sınırlıdır. Elde edilen bulguları tamamlanması açısından, öğretimin farklı unsurlarını da dikkate alarak, örneğin öğretmenlerin ders anlatımları, sayılarla ilgili kavrayışları, öğretim programları ve ders kitaplarında sayı ve sayı kümelerinin ele alınışı vb. konularda çalışmalar yapılabilir.
- Mevcut araştırma sadece 8. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Dolayısıyla elde edilen bulgular sadece bu sınıf seviyesiyle sınırlıdır. Yapılacak olan yeni araştırmalarla farklı sınıf seviyeleri ve farklı araştırma grupları incelenebilir. Belirlenen yanılgılar nitel araştırma yöntemleri kullanılarak daha detaylı incelenebilir.

TEŞEKKÜR

Yazar, Derya DEMİROĞLU ve Tahir ERKUL'a anketin uygulanması sırasındaki yardımlarından dolayı teşekkür eder.

KAYNAKÇA

Altun, M. (2005). *Eğitim fakülteleri ve ilköğretim öğretmenleri için matematik öğretimi*. Bursa: Aktüel Yayınları.

Anselmo, B., Bonnet, M., Colonna, A., Combier, G., Latour, J., ve Planchette, P. (1999). *La sixième entre fractions et décimaux.* Lyon : Irem De Lyon.

Archer, M., ve Roy, M. (1991). *A la rencontre des décimaux au cm1*. Lyon : Irem De Lyon.

Bachelard, G. (1965). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : J. Vrin.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In séminaire *Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques*, D. Grenier, Grenoble, Imag, pp. 219-244.

Baroddy, A.J. (1987). *Children's mathematical thinking: a developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. New York: Teachers College, Colombia University.

Baştürk, S. (2014). Matematik öğretiminde öğrenci hatasının yeri: Hata ve engel kavramı. *Bilim ve Aklın Aydınlığında Eğitim*. *14*(167), 14-13.

Baştürk, S., ve Dönmez, G. (2008). Üniversite mezunu yetişkinlerde sayı kavramı. VIII. Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Baştürk, S., ve Taştepe, M. (2013). Öğretmen adaylarının sayı kümeleri kavramlarının incelenmesi. , *International Symposıum on Changes and New Trends in Education,* Cilt 2, 169-177.

Bloom, P. (2000). *How children learn the meanings of words*. Cambridge, Mass: Mit Press.

Brannon, E. (2005). What animals know about numbers? In J. Campbell (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 85–108). New York: Psychology Press.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, *2*(1), 37-280.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes enmathématiques. *Recherches en Didactiquedes Mathématiques*, *4*(2), 166-198.

Carey, S. (2001). Cognitive foundations of arithmetic: evolution and ontogenesis. *Mind & Language*, *16*(1), 37–55.

Carey, S. (2004). Bootstrapping and the origin of concepts. *Daedalus*, *133*, 59-68.

Clement, P. (1994). Représentations, conceptions et connaissances. *In Conceptions Et Connaissances*, A. Giordan, Y. Girault Et P. Clément, Ed Peter Lang, Berne, 15-45.

Confrey, J. (1986). Misconceptions across subject matters: charting the course from a constructivist perspective. Annual Meeting of the American Educational Research Association.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: how the mind creates mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Douady R., ve Perrin-Glorian M.J. (1986). *Liaison école-collège: nombres décimaux*. Ed. Interirem.

Gallistel, C. R. (1990). *The organization of learning*. Cambridge, Ma: Mit Press.

Gallistel, C. R., ve Gelman, R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Giordan, A. (1998). *Apprendre !* Paris : Ed. Belin.

Graeber, A, ve Johnson, M. (Eds.) (1991). *Insights into secondary school students' understanding of mathematics.* College Park,University of Maryland, MD.

Hughes, M. (1989). *Children and number: difficulties in learning mathematics*. Oxford: Basil Blackwell.

Hurford, J. (1987). *Language and number: the emergence of a cognitive system*. Oxford: Blackwell.

Jacquier, I. (1996). Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième. *Petit X, 41*, 27-50.

Karasar, N. (2000). *Bilimsel araştırma yöntemi* (12. Basım). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Köktürk, E. (2005). Sıfır '0' rakamının sancılı doğumu. *Jeodezi, Jeoinformation Ve Arazi Yönetimi Dergisi*, *92*, 55-60.

Küçük, A. ve Demir, B. (2009). İlköğretim 6–8. sınıflarda matematik öğretiminde karşılaşılan bazı kavram yanılgıları üzerine bir çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, *13*, 97-112.

Léonard, F., ve Sackur C. (1991). Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *10* (2.3), 205-240.

Margolis, E., ve Laurence, S. (2008). How to learn the natural numbers: inductive inference and the acquisition of number concepts. *Cognition*, *106,* 924-939.

Meissner, H., Grassmann, M., Mueller- Philipp, S. (Eds.): Proceedings of the international conference "creativity and mathematics education". Muenster, Westfaelische Wilhelms University, Germany 1999.

Munyazikwiye, A. (1995). Problèmes didactiques liés aux écritures des nombres. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(2), 31-62.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 103-132.

Raynal, F., ve Rieunier A. (1997). *Pédagogie : dictionnaire des concepts clés*. Paris : Esf.

Roditi, E., ve Robert, A. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en 6ème, étude de pratiques ordinaires.* Paris : IREM de Paris VII.

Seidelmann, A. L. (2004). *Students' Conceptions of Zero.* Unpublished Doctoral Dissertation, Illinois State University, USA.

Seyhan, G., ve Gür, H. (2004). İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin ondalık sayılar konusundaki hataları ve kavram yanılgıları. *Matematikçiler Derneği*, www.matder.org.tr

Şiap, İ., ve Duru, A. (2004). Kesirlerde geometrik modelleri kullanabilme becerisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 12*(1), 89-96.

Skemp, R.R (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77,* 20-26.

Spelke, E. (2003). What makes us smart? Core knowledge and natural language. In D. Gentner & S.Goldin-Meadow (Eds.), *Language In Mind: Advances In The Study Of Language And Thought* (Pp. 277–311). Cambridge, Mass: Mit Press.

Temel, H., ve Eroğlu, A. O. (2014). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin sayı kavramlarını anlamlandırmaları üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *22*(3), 1263-1278.

Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (1999). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zimmerman, W., ve Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmerman and S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. (p.1-8). Washington, DC: The Mathematical Association of America.