FELSEFE DÜNYASI

2009/1 Sayı: 49 YILDA İKİ KEZ YAYIMLANIR ISSN 1301-0875

Sahibi
Türk Felsefe Dernegi Adına
Başkan Prof.Dr. Necati ÖNER

Sorumlu Yazı İşleri Müdürü
Prof.Dr. Ahmet İNAM

Yazı Kurulu
Prof. Dr. Necati ÖNER
Prof. Dr. Ahmet İNAM
Prof. Dr. Murtaza KORLAELÇİ
Prof. Dr. Hüseyin Gazi TOPDEMİR
Prof. Dr. Veli URHAN
Doç. Dr. İsmail KÖZ
Yrd. Doç.Dr. Levent BAYRAKTAR

Felsefe Dünyası Hakemli Bir Dergidir.

Felsefe Dünyası 2004 yılından itibaren PHILOSOPHER'S INDEX ve TUBİTAK/ulakbim tarafından dizinlenmektedir.

Yazışma ADRESİ
P.K 21 Yenişehir/Ankara
Tel & Fax: 0 312 231 54 40

Fiyatı: 15 TL (KDV Dahil)

Banka Hesap No: Vakıf Bank Kızılay Şubesi: 00158007288336451

Dizgi ve Baskı
Türkiye Diyanet Vakfı
Yayın Matbaacılık ve Ticaret İşletmesi
OSTİM Örnek Sanayi Sitesi 1. Cad. 358. Sk. No:11 Y.Mahalle/ANKARA
Tel: 0 312 354 91 31 (Pbx) Fax: 0 312 354 91 32

MATEMATİKSEL (?) MANTIK

İskender Taşdelen*

I

Felsefenin başlangıcından itibaren, matematik pek çok felsefecinin ilgi odağı olmuştur. Bu ilginin sonucu olarak, matematik felsefesi doğa bilimleri felsefesinden ayrı bir felsefe dalı olarak ortaya çıkmıştır. Elbette, matematik felsefesinin ayrı bir araştırma alanı olarak ortaya çıkması sadece öznel nedenlerden kaynaklanmaz. Matematik hem metafizik, hem bilgi kuramı, hem de yöntembilim açısından, doğa bilimlerinden ve sosyal bilimlerden önemli farklılık gösterir. Matematiğin metafiziği, özellikle de matematikçinin geleneksel nesneleri olan sayıların ve geometrik şekillerin varlıkbilimsel konumu, Platon'un idealar öğretisini geliştirmesinin ardından gelişen tartışmanın, bu tartışmanın başlangıcından itibaren geniş kısmını oluşturmuştur. Platon'un, son döneminde, idealar kuramına yöneltilen eleştirilerin ağırlığı altında, Pisagorcu sayı-idea kuramına dönmesi, matematik nesnelerin diğer soyut nesnelerden ayrıcalıklı bir varlıkbilimsel konuma sahip olduğu sonucuna vardığı şeklinde yorumlanabilir.

Tümellerin neliği ile ilgili tartışma, sadece sayılar ve geometrik şekiller için değil, günlük düşünüşümüzde kullandığımız tüm genel terimler bağlamında da yapılmakla birlikte, metafizikçinin matematik nesneler ile ilgili tartışma ile özel olarak ilgilenmesinin bazı açık nedenleri vardır. Bu nedenler matematiğin bilimler arasındaki ayrıcalıklı konumunu açıklayan bilgi kuramsal ve yöntemsel farklara da işaret eder.

(A) Matematiğe ait olmayan nesneler hakkında ya da matematiğe ait olmayan kavramları içeren sağlam bilgi sahibi olduğumuz en azından şüpheli iken, matematik bilgi sahibi olduğumuz ve bu bilginin hem kesin, -ya da, terk etmeye en az niyetli olduğumuz- hem de duyulur dünyada uygulanabilir bir bilgi türü olduğu yaygın bir kanıdır. Bu konudaki akıl yürütme iki yönde de geliştirilebilir: İlk olarak, matematik bilginin diğer bilgi türlerini aşan bir kesinlik derecesine sahip olduğuna duyulan inanç başlangıç noktası olarak kabul edilerek, matematiğin nesnelerinin -hakkında kesin bilgi sahibi olamayacağımız, duyulur nesneler ya da toplumsal yapılar gibi varlıklardan- apayrı niteliklere sahip varlıklar olması gerektiği savlanabilir. Tümeller tartışmasında Platonculuğun (aşırı gerçekçilik) temelinde bu akıl yürütme yatar. Tersine, matematik nesnelerin apayrı bir varlıkbilimsel konumu olduğu savı başlangıç noktası olarak alınarak da matematiksel bilginin özelliklerine dair yaygın inanç gerekçelendirilmeye çalışılabilir.

(B) Matematik nesnelerin varlıkbilimsel konumu ne olursa olsun, yaygın olarak iddia edilmektedir ki, tümdengelimli *kanıtlama* matematiğin nesneleri hakkında bilgiye ulaşmada apayrı bir olanak olarak belirmektedir. Denilebilir ki, matematikçinin zihninde bir matematik önermenin doğru olduğu inancını ilk olarak uyandıran, doğa bilimcisinde olduğu gibi, tümevarımlı bir düşünmedir. Ancak, nihayetinde, matematikçinin

* Yard. Doç. Dr. Anadolu Üniversitesi, Felsefe Bölümü.

doğru olduğuna inandığı bir önermenin doğru olduğunu bilmesi, o önermenin tümdengelimli bir kanıtlamasını sunabilmesi ya da kendisine sunulan bir tümdengelimli kanıtlamanın ölçütlere uygun bir kanıtlama olduğunu denetleyebilmesi demektir. Doğruluğu apaçık görünen başlangıç önermelerine dayalı olarak gerçekleştirilen bir kanıtlama, matematik bilginin 'haklı gösterme' ya da 'gerekçelendirme' koşulunu sağlar. Demek ki, soyut nesneler konusundaki metafizik tartışmaların, matematik nesneler söz konusu olduğunda, matematik etkinliğin özellikleri, özellikle de kanıt-merkezli olması dolayısıyla çok daha sağlam bir zeminde ilerlediği düşünülebilir.

(C) Matematik bilgi, matematik nesneler hakkında bilgi, felsefeci için cazip bir tartışma konusu olması dışında, Parmenides'ten itibaren bir çok felsefeci için sağlam bilgiye ulaşmada bir model olarak görülmüştür. Denebilir ki burada model olması öngörülen, matematik yöntem denebilecek, matematiğe ait özel bir yöntem değil, belitsel yöntem (aksiyomatik yöntem) dediğimiz genel yöntemdir. İlkel kavramlar (başka kavramlar yardımıyla tanımlanmamış) hakkında doğruluğu apaçık görülen 'az sayıda' önermeden, sağlam akıl yürütme ilkelerine uygun olarak, sonuçlara ulaşma yöntemi olarak tanımlandığında, belitsel yöntemin, matematiğe ait bir yöntem değil, sistemli bir şekilde bilgilerimizi arttırmak amacıyla gerçekleştirilen tüm zihinsel etkinlikler için genel, ideal bir yöntem olduğunu söyleyebiliriz. Ancak, bu yöntemi uygulayan, termodinamik gibi fizik dallarının ya da mereoloji (Parça-bütün ilişkilerinin kuramı; Yun. *μερος* ve *λόγος* kelimelerinden) gibi metafizik dallarının da, belitsel ve biçimsel sistemler olarak ortaya konulmalarıyla matematik kuramlar haline geldiğini kabul etmemiz gerektiği de iddia edilebilir. Ancak, matematiksel olmanın biçimsel ve belitsel olma ile eş tutulması mümkün değildir. Belitsel sistemler olarak ortaya konmalarının matematik kuramlar için vazgeçilmez olduğunu kabul etsek bile (ki bilişimsel matematik konusundaki kimi araştırmacılar, bazı matematik teoremlerin bilgisayar kanıtlamalarının belitsel sistem mantığı dışında gerçekleştirilebildiğini belirterek, buna karşı çıkmaktadırlar), bu kabulden yola çıkılarak, belitselleştirmenin matematikselleştirme anlamına geldiği sonucu çıkarılamaz.

II

Felsefede mantık, hem doğru akıl yürütmenin kurallarını konu edinen bir araştırma etkinliği, hem de felsefe yapmaya girişenlerin el altında hazır bulundurmaları gereken bir 'alet kutusu' olarak anlaşılmaktadır. Mantık biliminin kurucusu olarak kabul edilen Aristoteles'ten bugüne değin, mantık her iki anlamda da büyük dönüşüm geçirmiştir. En önemlisi mantığın biçimsel bir çalışmaya dönüşmesidir. Mantığın biçimselleşmesi, önermeler arasındaki mantıksal ilişkilerin önermeleri 'temsil eden' somut işaret dizileri arasındaki duyusal özelliklere göre tanımlanabilmesi anlamına gelmektedir. Bunun sonucu olarak, yeni mantık sistemleri sadece 'terim üretme' kurallarına dayalı sistemler olarak görülebilir. Biçimsel mantık, başlangıcında, önermeleri belirsizlikten uzak bir dille ortaya koyma ve akıl yürütme kurallarını hatasız uygulama imkanı doğurduğu düşünülerek, birçok matematikçi ve felsefecinin elinde "sembolik mantık" adıyla şekillendikten sonra, "matematiksel mantık" adıyla matematiğe ve kuramsal bilgisayar bilimine terk edilmiştir.

Peki, nedir matematiksel mantık? Bu sorunun felsefeci açısından (sadece matematik felsefecisi için değil) önemli olduğunu düşünüyorum. "Matematiksel Mantık" ya da benzer adlı ders kitaplarındaki konu başlıklarının aşağı yukarı aynılaşmış olmasına bakarak, bu sorunun matematikçi-mantıkçıların gözünde yanıtlanmış olduğunu düşünebiliriz. Yine de, söz konusu anlaşmanın matematiksel mantığın neliğine dair bir yanıta dönüştürülüp dönüştürülemeyeceği sorgulanabilir. İki matematikçiden alıntıladığım *anlamlı biçimde farklı* iki tanım, matematikçi-mantıkçıların, "matematiksel mantık" adı altında nelerin inceleneceği noktasında uzlaşmış olsalar bile, matematiksel mantığın ne olduğuna dair sağlam bir görüşleri olmadığı düşüncesini destekler niteliktedir. Sadece iki matematikçi tarafından verilen iki ayrı tanımdan yola çıkarak, matematikçilerin matematiksel mantık kavrayışları üzerine sonuç çıkarmaya girişmek hatalı görünebilir ancak bu iki tanımın matematikçi-mantıkçıların matematiksel mantığa bakışlarını ana hatlarıyla yansıtmaya yeterli olduğunu düşünüyorum.

Tanım 1. Mantık akıl yürütmeye dair araştırma ve matematiksel mantık matematikçiler tarafından yapılan akıl yürütmeye dair araştırmadır[1].

Tanım 2. Matematiksel mantık "matematiksel yöntemlerin mantığa uygulanmasıdır"[2].

Bu tanımlardan ilkine göre matematiksel mantık, matematiksel düşünmenin biçimsel özelliklerini ve normlarını ortaya koyan özel bir *mantık türü*, ikincisine göre ise mantığın matematiksel incelemeye konu edildiği bir *matematik dalı*dır. Şimdi bu iki kavrayışa göre matematiksel mantığın şekillenişini ele alalım.

Matematiksel mantığın bir mantık türü olarak ele alınması ne anlama gelir? Bu soruyu, *à la* Wittgenstein, 'yeryüzüne indirip' matematikte mantığın nasıl sınırlandığına bakarak yanıtlamaya çabalayabiliriz. Mantık ile, birinci derece eşitlikli standart niceleme mantığını anlıyorsak (ki matematikçilerin ezici üstünlüğü, eğitimleri gereği, mantığı bu şekilde kabul eder) mantığın matematik için özel bir kısmının olması, matematiksel mantığın, özel bir mantık türü olması söz konusu değildir. Zira, mantıkçı olmayan matematikçilerce, birinci derece niceleme mantığı, tüm kuralları ile matematiksel akıl yürütme için geçerli kabul edilmektedir: Bu mantığın tüm belitleri matematiğin geçerli önermeleri ve tüm çıkarım kuralları matematiksel doğruluğu koruyucudur (Yani, birinci derece niceleme mantığının çıkarım kuralları kullanıldığında, doğru matematik önermelerden yanlış bir matematik önerme elde edilemez).

Biçimselleştirilmiş bir matematik kuramda, birinci derece eşitlikli niceleme mantığının sembolleri dışındaki semboller, mantıksal-olmayan semboller olarak kabul edilir.

---

[1] Joseph R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Mass.: Addison Wesley Pub. Co. 1967, s. 3.

[2] John N. Crossley, "What is Mathematical Logic?", *I. Hindistan Mantık ve Mantığın Diğer Disiplinler ile İlişkisi Konferansı*, Mumbai 2005, s. 1.

Bu sembollerin, sentaktik kategorilerine göre nasıl yorumlanacağı mantığın konusu olmakla birlikte, belirli bir yorumlama içinde ne şekilde yorumlanacağı ya da hangi belitlerle belirleneceği, mantığın değil, matematiğin konusudur. Dolayısıyla, bu sembollerle genişletilmiş bir dil, matematiğe özel bir biçimsel mantık sisteminin dili değil, bir matematik kuramın sembolik dilidir.

Matematikçilerin ayrı bir mantık sembolizmini ve ayrı bir mantıksal doğruluk tanımını yaygın biçimde kullanmamaları, "matematiksel mantık" denebilecek bir şey olmadığını göstermez. Aslında, matematikçinin ve felsefecinin standart mantık olarak aynı mantık sistemini incelemesinin ve kullanmasının önemli bir nedeni, önerme eklemlerinin ve niceleyicilerin matematik pratiğinden kaynaklanan yorumlanışının genel yorumlama olarak -felsefi bakımdan sürekli eleştirilse de- yerleşmiş olmasıdır. Sonuç olarak, önemli bir kısım felsefecinin araç olarak gördüğü sembolik mantık, önemli bir ölçüde matematiksel mantıktır. Ancak, standart sembolik mantığın matematiksel mantık olduğu söylenemez. Bunu iddia etmek, çağdaş standart mantığın sadece matematiksel düşünme biçimine uygun bir mantık olduğunu iddia etmek olurdu. Oysa ki, çağdaş mantığın gelişiminde matematiğe sağlam bir temel hazırlamak amacı dışında amaçların da rol oynadığını ve bu mantığın felsefede de verimli bir şekilde kullanılan bir araç olduğunu görmezden gelmek imkansızdır. Günlük dilin, matematiksel düşünme için olduğu kadar, felsefi düşünme için de elverişsiz bir araç olduğu, yalancı çatışkısı gibi çatışkıların ortaya çıkmasından dolayı bilinmekte idi. Çağdaş mantığın gelişiminde genel semantik çatışkıların engellenmesinin de rol oynadığı kabul edildiğinde, bu mantığın aynı zamanda 'felsefi mantık' olduğu kabul edilmelidir.

Bilindiği gibi matematik felsefesinde "sezgicilik" adı verilen görüş matematik etkinliği dilden bağımsız ve algıdan farklı olan bir zihinsel süreç olarak kabul eder. Dilsel gösterim matematik düşüncenin somutlaştırılmasına ve paylaştırılmasına yarayan bir araç olarak kabul edilir. Tanım 1'e göre matematik etkinlik sonradan mantık tarafından araştırma konusu yapılabilecek bağımsız bir etkinlik olarak görüldüğünden, bu tanım, ilk bakışta, sezgicilerin kabul ettiği matematik ve mantık kavrayışına uygun görünmektedir. Ancak tanım 1 matematiğe biçimci matematik felsefesi açısından bakıldığında kabul görecek şekilde de yorumlanabilir. Biçimci matematik felsefesi bakımından, matematik kuramlar biçimsel sistemler, matematiksel akıl yürütme de biçimsel sistemler içinde gerçekleştirilen bir terim üretme etkinliğidir. Biçimsel sistemlerde, hem önermeler hem de -sonlu önerme dizileri olarak- kanıtlamalar somut sembol dizilerdir. Matematiğe bu şekilde, sentaktik ya da kanıt kuramsal açıdan bakıldığında, tanım 1 ile belirlendiği şekliyle matematiksel mantık, matematikçilerin oluşturduğu biçimsel sistemler *içinde* gerçekleştirilen 'akıl yürütme' *hakkında* bir incelemedir.

Eğer biçimselleştirme ve belitselleştirme sadece matematik sistemler için geçerli bir yöntem olsaydı, biçimci mantık ve matematik felsefesi bakımından, biçimsel belit sistemlerinin incelendiği alanın tümünü meta-matematik diye görmemiz gerekirdi. Ancak, diğer alanlarda da kuramların *aynı şekilde* biçimselleştirilmesinin ve belitselleştirmesinin olanaklı ve etkili bir yol olabileceği kabul edilmelidir. Biçimsel sistemler olarak düşünüldüğünde, matematik kuramlar ile biçimselleştirilmiş felsefi kuramlar arasında farkın sadece matematikçinin ve felsefecinin niyetselliğinde olduğu gibi, matematiksel ya da felsefi mantık arasındaki fark da sadece mantıkçının niyetselliği düzeyindedir. Sonuç olarak, *uygun şekilde sınırlandırıldığında*, tanım 1'e göre matematiksel mantığın, matematikte geliştirilen biçimsel sistemlerin konu edildiği özel bir araştırma alanını, meta-matematiği, içerecek şekilde kabul edilmesi gerekir. Oysaki matematikçi-mantıkçılarca 'matematiksel mantık' adı verilen alanın biçimsel sistemlerin genel olarak incelendiği alanın tümünü kapsar şekilde yorumlandığını görüyoruz.

Bu yorumlamanın gerisinde, matematiksel kavram ve yöntemlerin kullanılmasının biçimsel sistemlerin incelenmesine dayalı bir araştırma -özel olarak meta-mantık- için vazgeçilmez olduğu düşüncesi vardır. Crossley tarafından verilen tanım 2 bu düşünceyi, tüm meta-mantığı matematiğin mantığa uygulaması sayarak, (Crossley matematiksel mantığı meta-mantığı kapsayan görüşü fiilen benimseyen bir mantıkçı olduğundan bunu söyleyebiliriz.) en aşırı şekilde dile getirmektedir. Crossley tarafından verilen ikinci 'tanımın', Shoenfield tarafından verilen birinci tanımın aksine, yanıtlanması güç sorulara yol açtığını düşünüyorum. Bu güç soruların bence en önemlisi, matematiğin mantığa *uygulanması* ile ne kastedildiğidir. Çünkü ancak bunun ardından, matematiğin 'uygulandığı' bir alan olarak matematiksel mantığın bir matematik dalı olarak görülüp görülemeyeceği ve matematiğin mantığa belirlenen şekilde uygulanmasının, 'matematiksel mantık' başlığı altında ele alınan sonuçları belirleyip belirlemediği gibi soruları ele alabiliriz. Bu amaçla, matematikçi-mantıkçıların "matematiksel mantık" adını verdikleri alana kısaca ama biraz daha yakından bakalım.

III

Matematikçiler -matematiksel mantığa dair verdikleri tanımlar bir yana- matematiksel mantık başlığı altında ele alınması gereken sonuçlarda uzlaştıklarına göre, bu sonuçları inceleyerek matematiksel mantık hakkında vardığımız yargıları sınamamıza yardımcı olacak kimi sonuçlar elde edebiliriz. Matematikçi-mantıkçılar, 'matematiksel mantık' başlığı altında, felsefe ya da bilgisayar biliminde de başvurulan mantık sistemlerinin tanıtılması dışında biçimsel sistemlerin genel olarak incelendiği alanı da ele alırlar.

Matematikçiler tarafından matematiksel mantığı oluşturduğu kabul edilen alanlar şöylece sıralanabilir: Kanıt kuramı, model kuramı, küme kuramı, yinelgen (rekürsif) fonksiyonlar kuramı. Bu alanların biçimsel mantık açısından yerini kısaca belirtelim.

Kanıt kuramı herhangi bir biçimsel mantık sistemini, sistemin diline ait önermeler arasındaki biçimsel ilişkilere göre tanımlanmış türetilebilirlik bağıntısı bakımından inceler. Bir mantık için türetilebilirlik bağıntısı, o mantığın biçimsel dilinden bahsetmek için kullandığımız meta-dilde (söz eden dil, üst-dil) tanımlanır. Örneğin, türetilebilirlik bağıntısı için, yaygınlıkla olduğu gibi, '$\vdash$' sembolünü kullandığımızda, önerme eklemleri mantığında türetilebilirlik bağıntısının gerekli tüm temel özellikleri aşağıdaki dört meta-önerme ile belirlenir (A, B, C herhangi birer önermeyi gösterir).

1. $\vdash (A \square (B \square\square))$
2. $\vdash ((A \square (B \square C)) \square ((A \square B) \square\square\square C)))$
3. $\vdash ((\square B \square\ \square A) \square (A \square\square))$
4. $\vdash A\ \&\ \vdash (A \square\square) \square \vdash B$

Bu sistemde, 1.-3. sistemin başlangıç önermelerini ya da aksiyomlarını, 4. ise tek dönüşüm kuralı olarak *modus ponens*'i belirler (Aksiyomlarla dönüşüm kuralları arasındaki fark aslında yapaydır: Aksiyomlar da kolaylıkla, boş sembol dizisinden yapılan, dönüşümler olarak kabul edilebilir). Sistemin teoremleri ise şunlardan oluşur: Başlangıç önermeleri; başlangıç önermelerinden çıkarım kuralı yardımıyla elde edilen önermeler; bu şekilde elde edilen önermelerden ve başlangıç önermelerinden çıkarım kuralı kullanılarak elde edilen önermeler... *ad nauseam.*

Kanıt kuramsal bakımdan, biçimsel mantık sistemlerinde incelenen özelliklerin başında *kanıt kuramsal tutarlılık* gelir. Standart bir biçimsel mantık sisteminin kanıt kuramsal tutarlı olması demek, en az bir önermenin sistemin teoremleri arasında olmaması demektir (Sistemde değilleme eklemi varsa, daha yaygın olan, hiçbir önermenin hem kendisinin hem de değilinin sistemin teoremleri olmaması biçimindeki tanım yeterlidir).

Model kuramı ise biçimsel sistemlerin yorumlamaları bakımından incelendiği araştırmadır. Standart bir önerme eklemleri mantığının bir yorumlaması (önerme eklemlerinin yorumlamaları doğruluk tablolarıyla sabit olduğu için) bu mantığın dilindeki önerme değişkenlerine birer doğruluk değeri atanmasından ibarettir. Kanıt kuramsal tutarlılık kavramından farklı olarak, bir biçimsel mantık sisteminin semantik tutarlılığı, sistemin başlangıç önermelerinin tümünü sağlayan bir yorumlamanın olması demektir.

Meta-mantıkta elde edilen birçok ilginç sonuç, mantık sistemlerinin model kuramsal ve kanıt kuramsal özellikleri arasında var olan ilişkilerin ortaya konduğu sonuçlardır. Sistemin geçerli önermelerinin (sistemin tüm yorumlamalarında sağlanan önermelerin) tümünün aynı zamanda sistemin teoremleri olduğunu ortaya koyan *tamlık* teoremleri, sistemin teoremlerinin sistemin olanaklı yorumlamalarının hiçbirinde yanlış olamayacağını ortaya koyan *sağlamlık* teoremleri bu türden sonuçlardır. Bu sonuçlar ne salt model kuramsal ne de kanıt kuramsal sonuçlar olup, sistemlerin meta-dillerinde ifade edilen ve kanıtlanan sonuçlar olmaları ve dolayısıyla sistem hakkında bilgi vermeleri bakımından meta-mantığa aittir.

Model kuramında ve kanıt kuramında elde edilen sonuçlara ve bu sonuçların kanıtlamalarına bakıldığında, küme kuramına ve yinelgen fonksiyonlar kuramına yoğun biçimde başvurulduğunu görebiliriz. Bu nedenle küme kuramına ve yinelgen fonksiyonlar kuramına çoğu matematiksel mantık kitabında yer verilmektedir. Aslında, meta-mantık sonuçların elde edilmesindeki işlevleri bakımından, küme kuramının ve yinelgen fonksiyonlar kuramının aritmetik, topoloji gibi diğer alanlardan, derece farkı dışında, farkı yoktur. Nitekim Gödel, eksiklik teoremlerinin kanıtlamasında, aritmetiğe de (örneğin, asal sayılarla ilgili basit kimi sonuçlara), yinelgen fonksiyonlar kuramına da başvurmuştur.

Meta-mantıksal teoremlerin kanıtlamalarında matematik sonuçlara başvurulduğu, - hattâ, örneğin, küme kuramının meta-mantık için vazgeçilmez olduğu- doğru bile olsa, bu durum meta-mantığı matematiğin bir dalı ya da tümüyle matematiğin uygulaması olarak görmeye yeterli değildir. Aksi takdirde, tarih, sosyoloji gibi bilimlerin, oyun kuramı ya da istatistik gibi matematik dallarını yoğun olarak kullanarak elde ettikleri sonuçları da matematik sonuçlar olarak kabul etmek gerekirdi. Belli türden tarih ya da sosyoloji yapma biçimine 'matematiksel sosyoloji', 'matematiksel tarih' adı verilebilir ancak bu *etiketlemenin* bu alanları birer matematik dalı yaptığını söyleyemeyiz. Asıl anlamda matematiksel düşünme bir yöntemden çok matematiksel nesneler hakkında düşünmedir. Matematiğin bir dalında o dala özgü kurallar var ise bu durum o alanda ele alınan nesnelerin yapısı gereğidir. Örneğin, tümevarım ilkesi tüm yapılarda değil, örneğin, doğal sayılar kümesinde geçerli bir ilkedir.

Meta-mantığı matematiğin bir dalı saymak istemeyişimin bir diğer nedeni, bu alanda kullanılan matematiğe ait kavram ve yöntemlerin her durumda vazgeçilmez olmamasıdır. Örneğin, bir mantığın kompakt olduğu bu mantığın bir topolojik uzayla karşılıklı olduğu gösterilmesinin ardından, bu uzayın incelenmesiyle de kanıtlanabilir ancak bu kanıtlama biçimi vazgeçilmez olmayabilir (Çoğu mantık ders kitabında kompaktlık kanıtlaması topolojik kompaktlık kavramına başvurmadan verilir). Demek ki 'matematikselliği' meta-mantığın da özsel bir niteliği değildir. Meta-mantığın 'matematiksel' mantık olarak nitelendirilmesinin, meta-mantığın özellikle matematikçi-mantıkçılar tarafından araştırılması ve bu mantıkçıların 'matematiksel mantık' olarak adlandırılmasında uzlaştıkları alana,

1. Yinelgen fonksiyonlar kuramı gibi, meta-mantık için kimi durumlarda başvurulabilecek araç sayılması gereken ve mantıkçı olmayan matematikçilerin yaygın olarak ilgi göstermedikleri teknik alanları,

2. Aritmetiğin modellerinin incelenmesi gibi, meta-mantığın bir matematik kurama uygulaması sayılması gereken alanları da dahil etmelerinden kaynaklandığını düşünebiliriz. Bu doğru ise, meta-mantığı sadece matematiğin mantığa uygulamasından ibaret bir alan saymaktan kaçınarak, matematiğin meta-mantık içindeki işlevini uygun biçimde ortaya koymak gerekir. Shoenfield'in verdiği tanım 'matematiksel mantık' adı altında toplanan sonuçların tümünü uygun bir anlamda matematiksel mantık olarak kabul etmemize yol açacak bir belirlenim olmamakla birlikte, matematiksel mantığın aslında ne olması gerektiğini ortaya koymaktadır: Matematikçilerin geliştirdiği biçimsel sistemler olarak matematik kuramların incelendiği alan.

IV

Bu yazıda, bu uzunlukta bir çalışmanın el verdiğince açık bir şekilde, matematiksel mantığın sınırlarına ilişkin belirsizliğe ve bu belirsizliğin felsefi anlamına dikkat çekmeye çalıştım. Buna göre, matematiksel mantık, meta düzeyde, matematikçilerce geliştirilen biçimsel sistemlerin mantık bakımından incelendiği alanla, meta-matematikle, sınırlı olmalıdır. Bu belirlenim Shoenfield tarafından verilen tanımla, ifade bakımından büyük ölçüde uyuşmakla birlikte, Shoenfield'in -pek çok matematikçi-mantıkçı gibi- matematiksel mantık olarak fiilen kabul ettiği alan (birinci derece niceleme mantığı + meta-mantık + yinelgen fonksiyonlar kuramı + küme kuramı) göz önünde bulundurulduğunda, anlam bakımından ayrılmaktadır. Matematiksel mantığın kendine has alanı bu yazıda iddia edildiği gibi, meta-matematik olarak kabul edildiğinde, örneğin, küme kuramının ve aritmetiğin modellerinin incelemesini, içermekte, ancak genel olarak biçimsel mantık sistemlerinin incelendiği meta-mantığı içermemektedir. Meta-mantıkta elde edilen sonuçları, bu sonuçların elde edilmesinde matematiğin kavram ve yöntemlerine başvurulduğunda bile, matematik sonuçlar olarak kabul etmek yanlıştır. Zira, bir araştırma alanı, kullandığı yöntemlerden önce, konusu ile belirlenir.

Matematiksel mantığın ne olduğunun ve (bulanık da olsa) sınırlarının belirlenmesinin önemi, bu belirlemenin ardından, matematiksel mantığın -genel olarak biçimsel sistemlerin türetilebilirlik bağıntısı ve yorumlamaları bakımından incelendiği alan olan- meta-mantıktan ayırt edilebilmesi ve meta-mantığı da kapsayan mantığın böylece felsefe için araç olarak işlevinin belirginleşmesidir.

Mantıkla ilgili felsefi tartışmaların özellikle matematik felsefesi çevresinde yoğunlaşması, sembolik mantığın 'matematiksel mantık' olduğu izleniminin yerleşmesine felsefecinin katkısı olarak sayılmalıdır. Hakikaten, matematik felsefecisi için meta-mantığı hatta tüm sembolik mantığı matematiksel mantık olarak kabul etmekte bir sakınca olmayabilir. Özellikle, pek çok çağdaş analitik felsefecinin -belli bir tür- metafiziğin geleneksel sorunsallarını da anlamlı felsefe sorunsalları arasında sayıp ilgileri arasına kattığı ve bu sorunsalları ele alırken mantık sistemlerine ve bu sistemlerin meta-mantıksal özelliklerine başvurduğu düşünülürse, felsefi yöntem araştırmalarının *da* mantık felsefesi konusunda belirgin bir güdülenme sağlayacağını bekleyebiliriz. Felsefi yöntem araştırmalarının etkin olduğu mantık felsefesi çalışmaları, örneğin, belli felsefi kuramlara en uygun mantık sistemlerinin hangileri olduğu tartışmasına giriştiğinde, söz konusu mantık sistemlerinin karşılaştırılmasında sağlam ölçütlere başvurma gereği ortaya çıkacaktır (Bu tartışmanın bir örneği, felsefede uygulanabilir mantık sistemleri olarak bilinen epistemik mantık, ödev mantığı, zaman mantığı gibi felsefi mantıkların her biri için farklı bilgi, ödev ve zaman kavramlarına denk gelen onlarca farklı mantık sisteminin ortaya çıktığı dönemde yaşanmıştır). Farklı sistemlerin karşılaştırılabilmesinin en önemli gereği, bu sistemlerin arasındaki farkın olabildiğince açık şekilde ortaya konmasıdır. Tam olarak nerelerde ayrıldığımızı bilmeden tartışmanın akılcı bir tartışma olduğu söylenemez. Bu nedenle mantık sistemlerinin kesin olarak belirlenebilen özelliklerinin ortaya konduğu araştırma alanı olarak meta-mantık, mantık felsefesinin vazgeçilmez aracıdır.

Abstract

Based on a distinction according to each philosopher's choice, while a part of contemporary logic named "symbolic logic" is accepted as a tool for philosophy, another part called "mathematical logic", is regarded as a part of mathematics. Although mathematician-logicians agree upon the issues that mathematical logic should cover, that they do not have a reliable definition of mathematical logic can be seen in the two 'definitions' provided by Crossley and Shoenfield.

Keywords: Mathematical logic, philosophy of mathematics, philosophy of logic, formalization.

Kaynakça

John N. Crossley, "What is Mathematical Logic?", *I. Hindistan Mantık ve Mantığın Diğer Disiplinler ile İlişkisi Konferansı*, Mumbai 2005

Joseph R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Mass.: Addison Wesley Pub. Co. 1967.