

GRAVİTE YÖNTEMİNDE GÜÇ SPEKTRUMUNUN DEĞİŞİK MODELLERE UYGULANMASI

Interpretation of the Gravity Data due to Various Models by means of Fourier Power Spectra

Mustafa AKGÜN*, Zafer AKÇİĞ* ve Rahmi PINAR**

ÖZET

Gravite yönteminde anomaliye neden olan yapıya ait parametrelerin frekans spektrumu üzerindeki etkilerinin belirlenmesi ve güç spektrumundan yararlanarak yapı parametrelerinin saptanması bu çalışmanın konusunu oluşturmaktadır.

İlk aşamada düşey dayk, tek yatay tabaka, silindir ve küre modellerinin analitik olarak güç spektrumları hesaplanmıştır. Sadece yapı derinliğinin spektrum eğimini etkilediği saptanmıştır.

İkinci aşamada modellerin ayrıık değerlerinden yararlanarak sayısal güç spektrumları hesaplanmış ve yapı derinlikleri bulunmuştur.

Yapılan çalışmalar sonucunda; spektrum üzerindeki temel etkinin yapı derinliklerinden kaynaklandığı ve spektrum eğrisinin eğiminden yararlanarak yapı derinliklerinin bulunabileceği saptanmıştır.

ABSTRACT

The subject of this study is to evaluate the influence of body parameters on the frequency spectra of the gravity anomalies and to determine the parameters using the power spectra.

Some power spectra were calculated analitically for the vertical dike, semi-infinite horizontal sheet, cylinder, and sphere models to test the proposed method. Effective slopes of the spectra are only dependent on the depth of buried bodies.

At the second step, the depth of causative bodies were obtained by using the discrete power spectra calculated from the theoretical responses of the examined models.

It was concluded that the fundamental affect on the spectra was originated from the body depths, which could be obtained from the slopes of power spectra.

GİRİŞ

Güç spektrumunun potansiyel verilere uygulanması ve bozucu kütlelerin oluşturduğu anomalilerin güç spektrumlarının elde edilmesi ile ilgili çalışmalar Bhattacharyya (1966) ve Spector ve Bhattacharyya (1966) tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra anomaliye neden olan kütlelerin derinliklerinin saptanması ise Spector ve Grant (1970) tarafından gerçekleştirilmiştir.

Son yıllarda ise küre ve çubuk şekilli yapıların oluşturacağı doğal potansiyel (SP) belirtileri dalgasayısı ortamına dönüştürülerek davranışları Akçığ ve diğ. (1990) tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmada ise gravitede düşey dayk, tek yatay tabaka, silindir ve küre model anomalilerinin, Fourier dönüşümü (FD) kullanılarak, dalgasayısı ortamında davranışları kuramsal olarak incelenmiş ve güç spektrumlarından yararlanılarak yapı parametrelerinin frekans spektrumu üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

KURAM

Bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü (FD)

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iw \cdot x} dx \quad (1)$$

* DEÜ Müh. Fak. Jeofizik Müh. Böl., Bornova, İzmir.

$$F(w) = P(w) + i Q(w) \quad (2)$$

ile $F(w)$ 'nin genlik $A(w)$ ve güç spektrumları $E(w)$,

$$A(w) = |F(w)| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (3)$$

$$E(w) = |F(w)|^2 = P^2 + Q^2 \quad (4)$$

bağıntıları ile bulunur.

Küre Modeli

Kütlesi m , derinliği h ve yarıçapı r olan bir kürenin yüzeyinde bir $P(x)$ noktasındaki (Şekil 1) gravite değeri

$$g(x) = 2Gm \frac{h}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \quad (5)$$

bağıntısıyla verilir (Telford ve diğ. 1987). $g(x)$ denkleminin FD alındığında çift fonksiyon özelliğinden yararlanarak

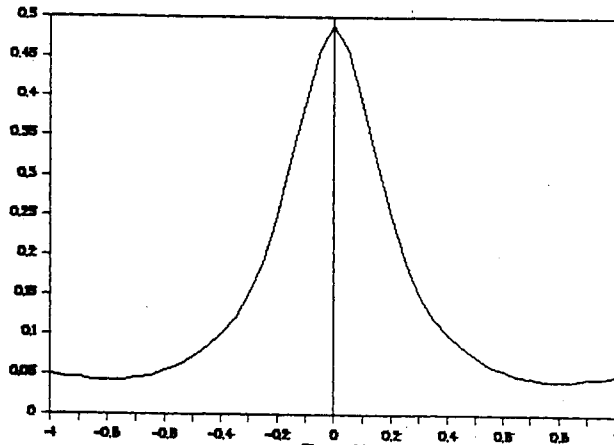
$$G(w) = 4G m h \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \cos(wx) dx \quad (6)$$

elde edilir.

(6) bağıntısı Erdelyi (1954) tümlenme çizelgeleri kullanılarak (Bkz. Ek) çözüldüğünde

$$G(w) = 4G m w K_1(wh) \quad (7)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan güç spektrumu $E(w)$ da (4) yaklaşımı yardımıyla



Şekil 1. Küre modelinin gravite anomalisi.

Fig. 1. Gravity anomaly due to a sphere model.

$$E(w) = [G(w)]^2 = 16G^2 m^2 w^2 K_1^2(wh) \quad (8)$$

olarak bulunur. (8) bağıntısında yer alan $K_1(wh)$ Modifiye Bessel fonksiyonu olup (Bkz. Ek) aşağıda tanımlanan özellikler;

$$wh \geq 2, K_0 \cong K_1 = K$$

$$K = \frac{1.253}{(wh)^{1/2} e^{wh}} \quad (9)$$

(Abramowitz ve Stegun, 1972) kullanılarak tekrar düzenlenirse

$$E(w) = 16 G^2 m^2 w^2 K^2(wh) \quad (10)$$

bağıntısı elde edilir. (10) bağıntısında aşağıdaki yaklaşım kullanılarak

$$A = 16 G^2 m^2$$

ve her iki tarafın logaritması alınarak,

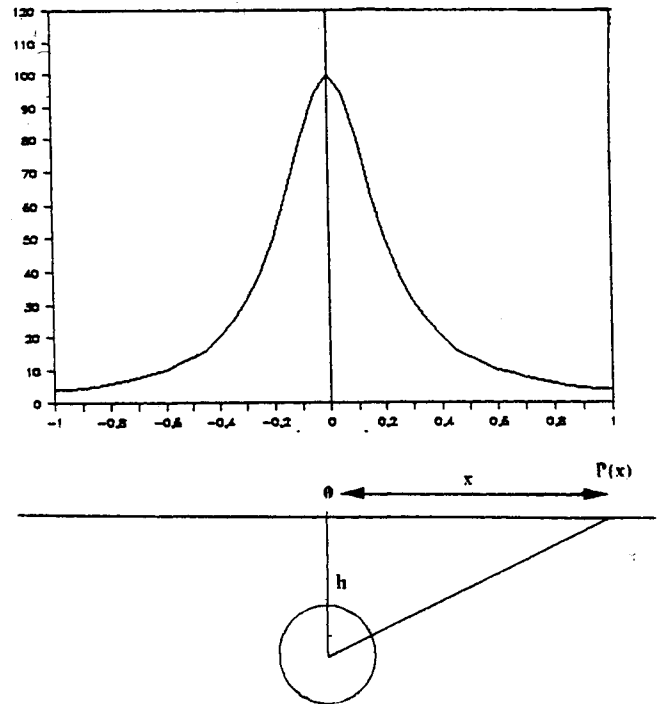
$$E(w) = A w^2 K^2(wh) \quad (11)$$

$$\ln[E(w)] = \ln A + 2 \ln w + 2 \ln K(wh) \quad (12)$$

bağıntısına ulaşılır. (12) bağıntısı (9) yaklaşımı kullanılarak tekrar düzenlenirse

$$\ln[E(w)] = \ln A + 2 \ln w + 2 \ln(1.25) - \ln wh - 2wh \quad (13)$$

bağıntısı elde edilir. (13) bağıntısı incelendiğinde de; birinci ve üçüncü terimlerin spektrumun genliğine etki ettiği, diğer terimlerin ise spektrumun eğimi üzerinde etkin olduğu görülmektedir. Eğimi denetleyen bu terimler incelendiğinde; ikinci ve dördüncü terimlerin, w 'nin değişimine



Şekil 2. Yatay silindir modelinin gravite anomalisi.

Fig. 2. Gravity anomaly due to a horizontal cylinder model.

Çizelge 1. Modellere ait derinlikler ve hata oranları.

Table 1. Percentage error and depths of the models

Model No	Gerçek derinlik (m)	Hesaplanan derinlik (m)	Hata Oranı (%)
1	50	48	4
2	150	148	2
3	250	245	2

bağlı olarak spektrumun eğimi üzerindeki etkilerinin az olduğu anlaşılmaktadır (Çizelge 1). Bu durumda spektrumun eğimi üzerindeki temel etki $-2hw$ teriminden kaynaklanmaktadır. Bu yaklaşımlarla

$$Eğim = -2h \quad (14)$$

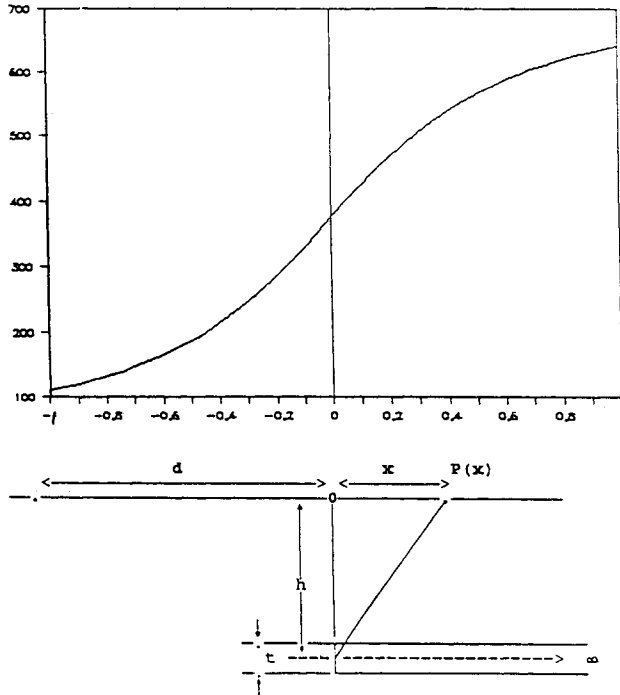
bağıntısı yazılabilir ve bu bağıntıdan anomaliye neden olan küre şekilli cismin merkezine olan derinliği (h) saptanabilir.

Silindirik Modeli

Derinliği h ve kütlesi m olan bir silindir (Şekil 2) yeryüzünde bir P(x) noktasındaki gravite değeri

$$g(x) = 2Gm \frac{h}{x^2 + h^2} \quad (15)$$

bağıntısı ile verilir (Telford ve diğ. 1987). (15) bağıntısı çift fonksiyon olduğundan sadece Fourier kosinüs dönüşü-



Şekil 3. Tek yatay yarı sonsuz tabaka modelinin gravite anomalisi.

Fig. 3. Gravity anomaly due to a semi-infinite horizontal sheet model.

ümü kullanılarak

$$G(w) = 4Gm h \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + h^2} \cos(wx) dx \quad (16)$$

sonucuna ulaşılır. (16) tümlemesi, Erdelyi (1954) tümleme çizelgeleri kullanılarak (Bkz. Ek) çözüldüğünde

$$G(w) = 2Gm \pi e^{-hw} \quad (17)$$

bağıntısı elde edilir. Buradan da güç spektrumu

$$E(w) = 4G^2m^2 \pi^2 e^{-2hw} \quad (18)$$

olarak bulunur. (18) bağıntısında

$$A = 4G^2m^2 \pi^2$$

yaklaşımı kullanılarak

$$E(w) = Ae^{-2hw} \quad (19)$$

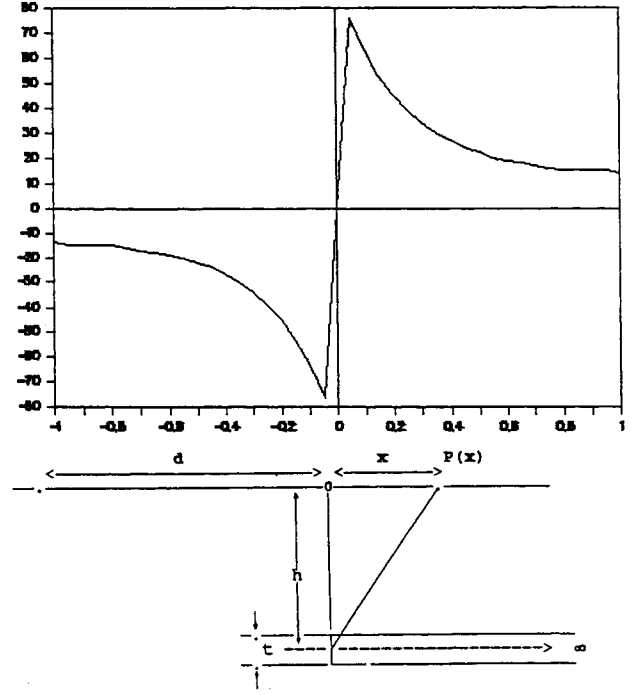
elde edilir. Bu bağıntının logaritması alınarak

$$\ln[E(w)] = \ln A - 2hw \quad (20)$$

sonucuna ulaşılır. (20) bağıntısından spektrumun eğimi üzerindeki temel etkinin $-2hw$ teriminden kaynaklandığı görülmektedir. Böylece küre şeklindeki yapılara benzer olarak spektrum eğiminden (14) bağıntısı kullanılarak silindirik merkezine olan derinliği (h) bulunabilir.

Yarı Sonsuz Tek Yatay Tabaka Modeli

Yeraltında t kalınlığındaki tek yatay tabakanın (Şekil 3), yeryüzünde bir P noktasındaki gravite değeri



Şekil 4. Tek yatay yarı sonsuz tabaka modelinin $g_z(x)$ anomalisinin yatay türev bileşeni.

Fig. 4. The horizontal gradient of the anomaly $g_z(x)$ due to the semi-infinite horizontal sheet model.

$$g(x)=2G\Delta\rho t\left[\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x-d}{h}\right] \quad (21)$$

olarak verilir (Telford ve diğ. 1987). Çözüm kolaylığı açısından önce anomali sıfıra asimtot konuma getirilir. Bunun için (21) bağıntısına x yönünde türev işlemi uygulanarak

$$g_{zx}(x)=2G\Delta\rho t\frac{h}{x^2+h^2} \quad (22)$$

bağıntısına ulaşılr (Şekil 4). (22) bağıntısının FD ü Erdelyi (1954) tümlleme çizelgeleri yardımıyla

$$G_{zx}(w)=4G\Delta\rho th\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+h^2}\cos(wx)dx \quad (23)$$

$$G_{zx}(w)=2G\Delta\rho t\pi e^{-hw} \quad (24)$$

olarak elde edilir. Buradan güç spektrumu ise

$$G(w)=4G^2\Delta\rho^2t^2\pi^2e^{-2hw} \quad (25)$$

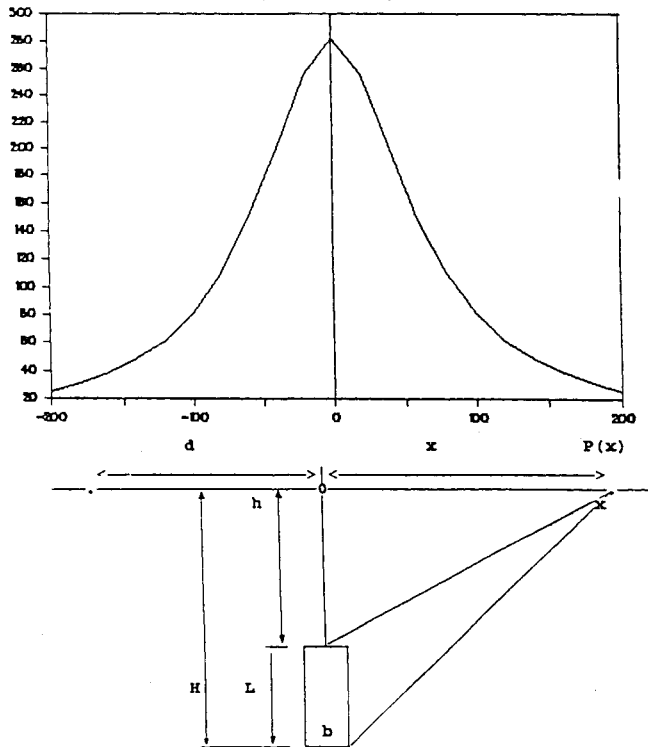
bağıntısı ile tanımlanır.

$$A=4G^2\Delta\rho^2t^2\pi^2 \quad (26)$$

(26) bağıntısının logaritması yukarıdaki yaklaşım gözönünde bulundurularak alınırsa

$$\ln[E(w)]=\ln A-2hw \quad (27)$$

olarak elde edilir. (27) bağıntısında da diğer yapılarda olduğu gibi spektrum eğimi, üzerindeki temel etki $-2hw$ teriminden kaynaklanmakta olup, (14) bağıntısı yardımıyla anomaliye neden olan yapının derinliği bulunabilir.



Şekil 5. Düşey dayk modelinin gravite anomali.

Fig. 5. Gravity anomaly due to a vertical dike model.

Düşey Dayk Modeli

Üst yüzünün derinliği h , alt yüzünün derinliği H ve genişliği b olan düşey bir daykın $P(x)$ noktasındaki gravite etkisi (28a) bağıntısı ile tanımlanır (Dobrin 1974). Güç spektrumu uygulamalarında logaritmalı terimlerle çalışmak matematiksel olarak zor olduğundan, logaritma teriminden kurtulmak istenir. Bunun için $g_z(x)$ anomalisinin x yönünde türevi alınarak (28b) bağıntısı elde edilir ve güç spektrum uygulaması bu bağıntı üzerinde yapılabilir (Şekil 5 ve 6).

$$g_z(x)=G\Delta\rho b \ln\left[\frac{(x^2+H^2)^{1/2}}{(x^2+h^2)^{1/2}}\right] \quad (28a)$$

$$g_{zx}(x)=2G\Delta\rho b\left[\frac{x}{x^2+H^2}-\frac{x}{x^2+h^2}\right] \quad (28b)$$

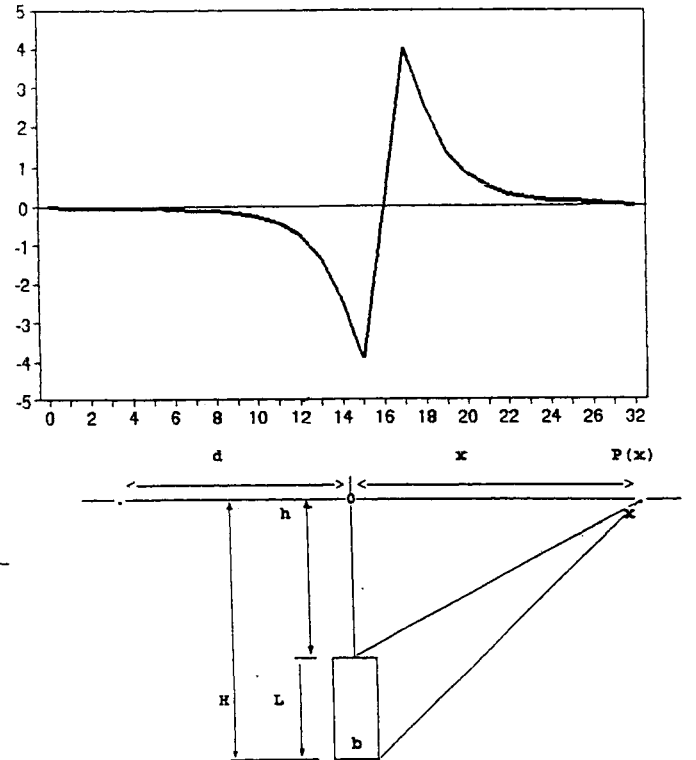
FD özelliğinden de (28b) bağıntısının FD

$$G_{zx}(x)=4G\Delta\rho bi\int_0^{\infty}\left[\frac{x}{x^2+H^2}-\frac{x}{x^2+h^2}\right]\sin(wx)dx \\ =2G\Delta\rho bi[-e^{Hw}+e^{hw}] \quad (29)$$

ve güç spektrumu

$$E(w)=[G_{zx}(w)]^2=4G^2\Delta\rho^2b^2[-e^{Hw}+e^{hw}]^2 \quad (30)$$

bağıntıları ile verilir. (30) bağıntısında aşağıdaki yaklaşımlar yapılarak



Şekil 6. Düşey daykın $g_z(x)$ anomalisinin yatay türev anomali.

Fig. 6. The horizontal gradient of the anomaly $g_z(x)$ due to the vertical dike model.

Çizelge 2. B teriminin w'ya göre değişimi

Table 2. Variation of the term B versus w

W	e^{-2Hw}	$e^{-w(H+h)}$	e^{-2hw}	B
0.1	$4.2 \cdot 10^{-18}$	$1.8 \cdot 10^{-13}$	$2.06 \cdot 10^{-9}$	$2.059 \cdot 10^{-9}$
0.2	$1.8 \cdot 10^{-35}$	$1.75 \cdot 10^{-26}$	$4.2 \cdot 10^{-18}$	$4.199 \cdot 10^{-18}$
0.3	$7.6 \cdot 10^{-53}$	$1.6 \cdot 10^{-39}$	$8.8 \cdot 10^{-27}$	$8.8 \cdot 10^{-10}$
0.4	$3.26 \cdot 10^{-70}$	$1.53 \cdot 10^{-52}$	$1.8 \cdot 10^{-35}$	$1.8 \cdot 10^{-35}$

$$A = 4G^2\Delta\rho^2b^2$$

$$B = [-e^{-Hw} + e^{hw}]^2 \quad (31)$$

bağıntısı elde edilir ve (31) bağıntısındaki B eşitliğinin açılımı yapıldığında

$$B = e^{-2Hw} - 2e^{-w(H+h)} + e^{-2hw} \quad (32)$$

bulunur. w'nın çeşitli değerleri için (32) bağıntısındaki terimlerin değişimi Çizelge 2'de verilmektedir.

Çizelgeden görüldüğü B bağıntısındaki terimlerin değişimi incelendiğinde eğim üzerindeki temel etkinin e^{-2hw} teriminden kaynaklandığı izlenmektedir. Sonuçta güç spektrumu ve logaritması

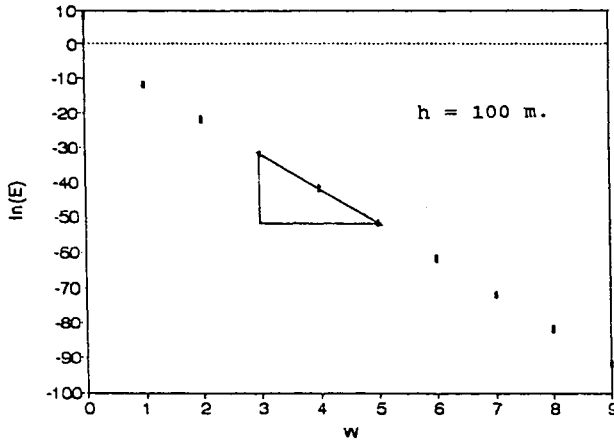
$$E(w) = A - e^{-2hw} \quad (33)$$

$$\ln[E(w)] = \ln A - 2hw \quad (34)$$

bağıntıları yardımıyla elde edilir. (34) denkleminde görüldüğü gibi spektrum eğimi üzerindeki temel etki $-2hw$ teriminden kaynaklanmakta olup, buradan da (15) bağıntısı yardımıyla yapının üst yüzünün derinliği h bulunabilir.

UYGULAMA

Çalışmanın bu aşamasında sözkonusu yapılar için güç spektrumu uygulamaları sürekli ve ayrık veriler kullanılarak iki farklı şekilde yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.



Şekil 7. Kuramsal bağıntıdan hesaplanan küre modeli güç spektrumu.

Fig. 7. Power spectra calculated from the expression of the sphere model.

Çizelge 3. Model uygulama sonuçları

Table 3. The results of the model application

Model	Kuramsal derinlik h(m)	Analitik güç spektrumundan elde edilen derinlik h(m)	Sayısal güç spektrumundan elde edilen derinlik h(m)
Küre	100	100	80
Silindir	100	100	92
Düşey Dayk	100	100	95
Tek Yatay			
Tabaka	100	100	107

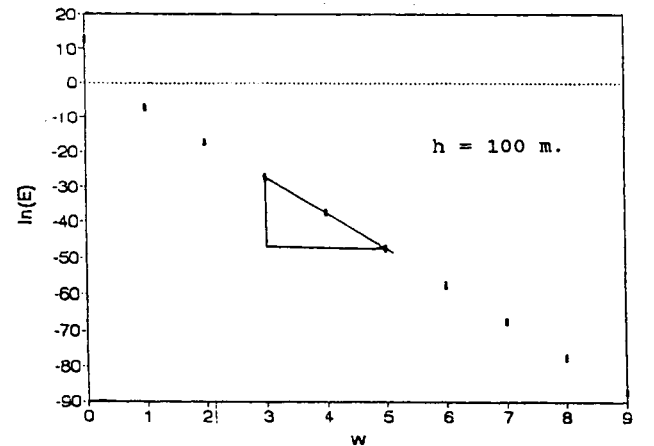
İlk olarak daha önceki aşamalarda her model için bulunan (küre modeli için (13), silindir modeli için (20), tek yatay tabaka modeli için (27), dayk modeli için (34) bağıntılar yardımıyla kuramsal güç spektrumu değerleri üretilmiştir. Daha sonra bu değerlerden yararlanarak elde edilen güç spektrumu eğrilerinin eğiminden (14) bağıntısıyla kuramsal yapı derinlikleri elde edilmiştir (Şekil 7, 8, 9, 10).

İkinci aşamada ise aynı modellerin analitik denklemlerinden elde edilen ayrık verilerden sayısal güç spektrumları hesaplanmış ve güç spektrumlarının eğiminden yapı derinlikleri bulunmuştur (Şekil 11, 12, 13, 14). Sonuçta her iki uygulamada bulunan derinliklerin birbirleri ile uyumlu olduğu görülmüştür (Çizelge 3).

SONUÇLAR

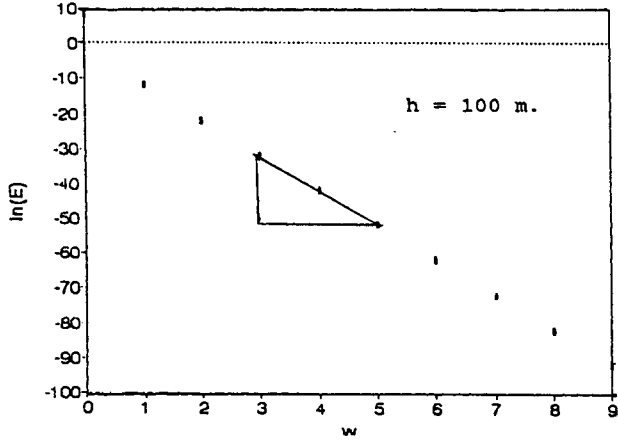
Gravite yönteminde çeşitli modellere ait sürekli ve ayrık veriler yardımı ile gerçekleştirilen güç spektrumu uygulamalarından aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

1. Model parametrelerinin spektrum üzerindeki etki-



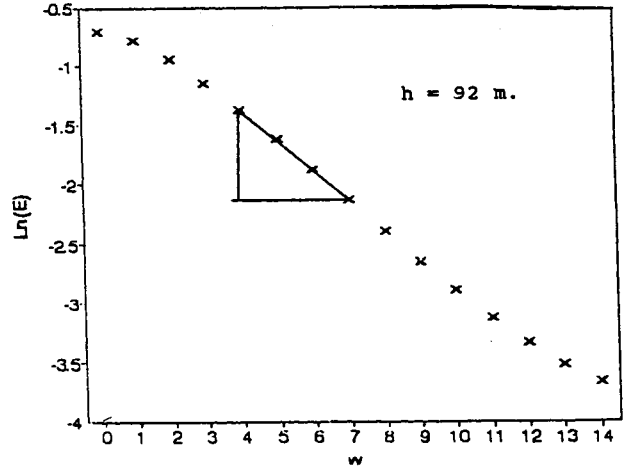
Şekil 8. Küre modeli sayısal değerlerinden hesaplanan güç spektrumu.

Fig. 8. Power spectra calculated from the discrete values of the sphere model.



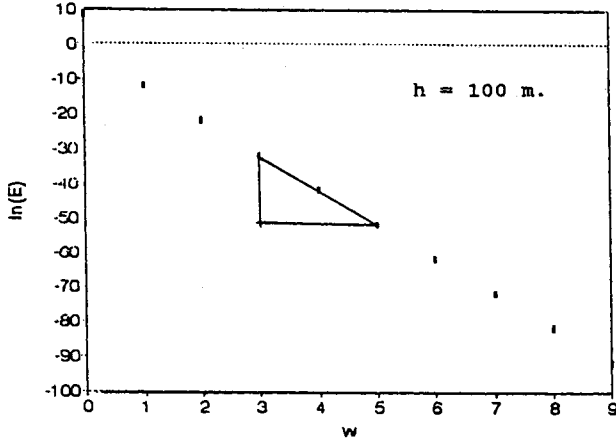
Şekil 9. Silindir modeli kuramsal güç spektrum değerleri.

Fig. 9. Theoretical calculated power spectra values due to the cylinder model.



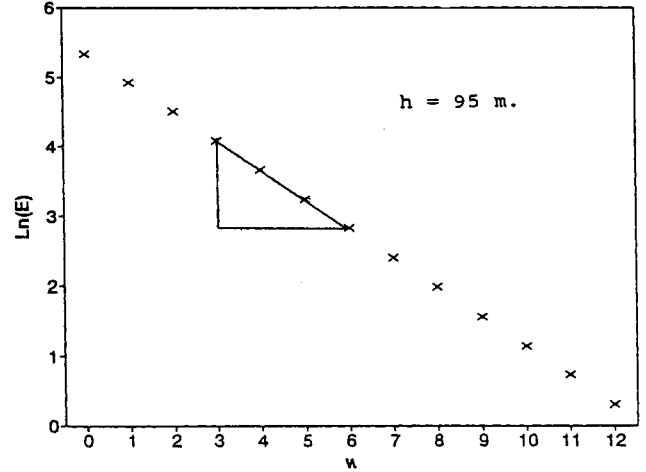
Şekil 12. Tek yatay yarı sonsuz tabaka modeli sayısal değerlerinden hesaplanan güç spektrumu.

Fig. 12. Power spectra calculated from the discrete values of the semi-infinite horizontal sheet.



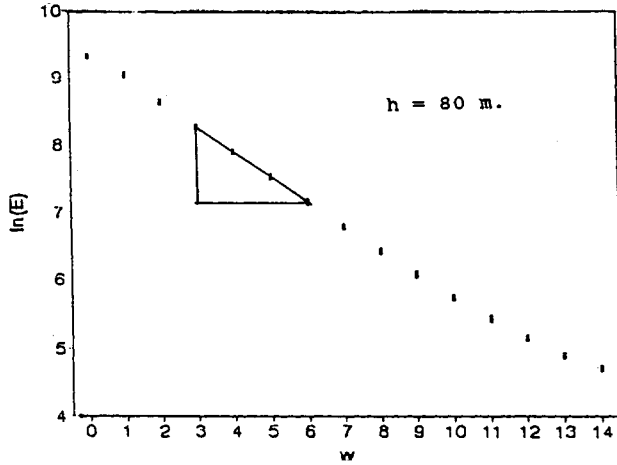
Şekil 10. Silindir modeli sayısal değerlerden hesaplanan güç spektrumu.

Fig. 10. Power spectra calculated from the discrete values of the cylinder model.



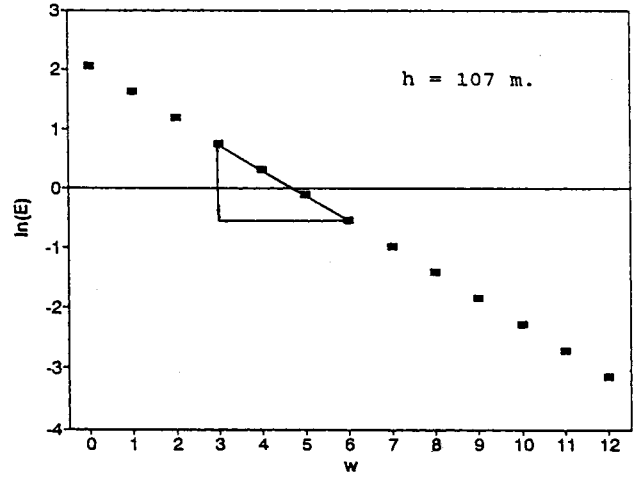
Şekil 13. Düşey dayk modeli kuramsal güç spektrum değerleri.

Fig. 13. Theoretical calculated power spectra values due to the vertical dike model.



Şekil 11. Tek yatay yarı sonsuz tabaka modelinin kuramsal güç spektrum değerleri.

Fig. 11. Power spectra calculated from the expression of the semi-infinite horizontal sheet.



Şekil 14. Düşey dayk modeli sayısal değerlerinden hesaplanan güç spektrumu.

Fig. 14. Power spectra calculated from the discrete values of the vertical dike model.

leri araştırıldığında; derinliğin güç spektrumunun eğimini diğer parametrelerin ise (kütle, yoğunluk farkı, genişlik) spektrumun yalnızca genliğini etkilediği bulunmuştur. Böylece uygulanan tüm modellerde, güç spektrumunun eğimini sadece derinlik parametresinin etkilediği saptanmıştır.

2. Gerek bu çalışmadaki gerekse önceki çalışmalarındaki bulgular bizi tüm potansiyel alan verilerinin (gravite ve manyetik) güç spektrumu uygulamalarında, derinlik tayininin

$$\text{Eğim} = - 2h$$

bağıntısı ile bulunabileceği sonucuna ulaştırmıştır.

3. Ayrık ve sürekli ortamlarda yapılan işlemler sonucunda elde edilen sonuçların da birbiri ile uyumlu olduğu gözlenmiştir.

EK

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(xy) dx$$

$$f(x) = (x^2 + a^2)^{-v-1/2}$$

$$f(y) = (1/2y/a)^v \pi^{1/2} [\Gamma(v+1/2)]^{-1} K_v(ay)$$

$a > 0, v > -1/2$

(Erdelyi 1954, s. 11)

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(xy) dx$$

$$f(x) = (x^2 + a^2)^{-1/2}$$

$$g(y) = \frac{1}{2} \pi a^{-1} e^{-ay} \quad \text{Re } a > 0$$

(Erdelyi 1954, s.8)

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(xy) dx$$

$$f(x) = (x^2 + a^2)^{-1/2}$$

$$g(y) = K_0(ay) \quad \text{Re } a > 0$$

(Erdelyi 1954, s.9)

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(xy) dx$$

$$f(x) = x(x^2 + a^2)^{-1}$$

$$g(y) = \frac{1}{2} (\pi e^{-ay}) \quad \text{Re } a > 0$$

(Erdelyi 1954, s.65)

$$\Gamma = 1 \quad \Gamma(1/2) = (\pi)^{1/2} \quad \Gamma(3/2) = 1/2 (\pi)^{1/2}$$

(Abramowitz ve Stegun 1972, s. 255)

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A. 1972, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., New York.
- Akçığ, Z., Pınar, R. Ulugergerli, E. 1990, Güç spektrumunun SP yönteminde küre modeline uygulanması, Jeofizik 1, 37-40.
- Bhattacharyya, B.K. 1966, Continuous spectrum of the total magnetic field anomaly due to a rectangular prismatic body, Geophysics 31, 97-121.
- Cantez, N., Yaramancı, U., Özdemir, H. 1987, Spectral Analiz ve Jeofizikte Uygulamaları, TMMOB Jeofizik Mühendisleri Odası, Eğitim Yayınları, No: 1.
- Erdelyi, A. 1954, Tables of Integral Transforms, Vol. 1, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
- Spector, A. and Bhattacharyya, B.C. 1966, Energy spectrum and autocorrelation function of anomalies due to simple magnetic models, Geophysical Prospecting 14, 242-272.
- Spector, A. and Grant, F.S. 1970, Statistical models for interpreting aeromagnetic data, Geophysics 35, 293-302.