JEOFİZİK 2, 27 - 43, 1988

YİNELEMELİ TERS ÇÖZÜM YÖNTEMİ İLE YERALTI YOĞUNLUK DAĞILIMININ SAPTANMASI

Determination of Underground Density Distribution Using Iterative Inverse Techniques

Coşkun SARI* ve Mustafa ERGÜN**

ÖZET

Bu çalışmada, gravite verisinin yaratacağı yeraltı yoğunluk dağılımının, alanı (hacmi) en küçük yapma ve cismin ağırlık merkezi etrafında yoğunlaştırılması ölçütlerine göre yinelemeli ters çözüm yöntemiyle hesaplanması işlemleri gösterilmeye çalışılmıştır. Verideki varolan gürültünün de göz önüne alınmasıyla, gürültü ve yoğunluk ağırlık fonksiyonları tanımlanarak, problemin çözümünü en küçük kareler yöntemiyle saptamak olasıdır.

Kuramsal modellerle yapılan uygulamalarda, mutlaka yakın çözümlere ulaşılmıştır. Bu yöntemle, jeolojik sınırlamalar fazla bir kişisel varsayımlar getirilmeden çözümün içerisine sokulabilmektedir. Ayırımlılık matrisiyle blokların saptanan yoğunluklarının anlamlı olup olmadığı ortaya konabilmektedir.

ABSTRACT

In this study, anomalous density distribution of the underground is obtained using iterative techniques according to minimization of volume and concentration around the center of gravity criteria. Noise is also included into formulation and the least squares approach of solution can be used after the noise and density weighting functions being described and incorporated.

The practical effectiveness of the method was tested for theoretical models with very satisfactory results. The advantage of this approach is that desirable geologic characteristics are automatically incorporated into the model with a minimum of subjective judgements on the part of the interpreter. Resolution matrix can be easily used to determine the contributions of block densities to the solution.

GİRİŞ

Gauss teoremine göre sonsuz sayıda yoğunluk veya manyetizasyon dağılımı aynı gravite veya manyetik alanları verebilmektedir. Ters çözüm işlemlerinde, varolan bu belirsizliği ortadan kaldırmak için gözlenen anomaliyi verebilecek eldeki bilgileri ve varsayımları gerçekleştirecek fiziksel veya geometrik özellikler bulunmaya çalışılır.

Matematiksel olarak tanımlanabilen yapıların yaratacağı anomali değerleri sayısal olarak hesaplanabiliyorsa, elde edilen verilerden bu anomaliye neden olan kaynağın fiziksel değiştirgenleri ters çözüm işlemleri yardımıyla saptanabilir. Temel olarak iki türlü ters çözüm yöntemi bulunmaktadır (Bott 1973).

(i) Doğrusal Ters Çözüm: Burada anomaliye neden olan yapı belli olup, yalnızca yoğunluk veya başka bir fiziksel değiştirgen (örneğin, manyetizasyon, hız, özdirenç vs.) değişimi söz konusudur. Oluşturulan doğrusal denklemler yoluyla integral denklemlerinin çözümü aranır. En uygun çözüm matris işlemlerini kullanmaktır.

(ii) Doğrusal Olmayan Ters Çözüm: Yoğunluğu veya başka bir fiziksel değiştirgeni bilinen bir yapının boyutları saptanmak istendiğinde bu çözüm yöntemi geçerli olur. Yapının köşe koordinatları doğrusal olmayan integral denklemlerinin çözümünü içermektedir. Yineleme veya optimizasyon yöntemlerinden biri kullanılarak sonuca ulaşılabilinir (Al-Chalabi 1972).

Ters çözümde amaç, N gözlem değeri ile M değiştirgen arasındaki ilişkiyi saptamaya çalışmaktır. Kullanacağımız model yapı ile hesaplanan anomali değeri arasında fonksiyonel bir ilişki vardır:

G_i (Gözlem Değerleri) $i : 1, 2, \ldots\ldots, N$

C_i (Hesaplanan Değer) $F_i(\rho_j)$ $j : 1, 2, \ldots\ldots M$

Varılmak istenen sonuç, gözlem değeri ile hesaplanan değer arasındaki farkı en aza indirgemektir.

* Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Jeoloji Mühendisliği Bölümü, Bornova-İZMİR

Doğrusal olmayan ters çözüm yönteminde karşılaşılan güçlükler nedeniyle problemimizi doğrusallaştırarak irdelemeye çalışmak daha yararlıdır.

Doğrusal denklemlerin çözümüne ilişkin ayrıntılı bilgiler Lanczos (1961) tarafından matematiksel olarak verilmiş, jeofizik uygulamaları ise Jackson (1972) ve Wiggins (1972) tarafından irdelenmiştir. Backus ve Gilbert (1967, 1968 ve 1970) çalışmalarında jeofizik ters çözüm problemine temel oluşturacak kuramlar ortaya koymuşlardır. Ters çözümden amaç, sonucun tekil olmaması nedeniyle veriye uyan belirti modelin olası tüm modellerini içeren Hilbert uzayında aranmasına çalışılmasıdır. Green (1975) değiştirgen uzayındaki başlangıç modelden olan "uzaklığı" en küçük yapmaya veya yineleme yöntemini kullanarak tek yoğunluk çözümüne ulaşmaya çalışmıştır. Jackson (1972) ve Pedersen (1977 ve 1979) ise genelleştirilmiş ters çözüm yöntemini kulanmışlardır. Mottl ve Mottlova (1972), Safon, Vasseur ve Ceur (1977), Ceur ve Bayer (1980), Fisher ve Howard (1980) da en küçük kareler ve doğrusal programlama yöntemini kullanarak gravite ters çözümü konusunda çalışmalar yapmışlardır. Last ve Kubik (1983) ise yapının geometrik fonksiyonunu en küçüğe indirgeyecek (en küçük hacim) çözüm yollarını önermişlerdir. Bu yöntemlerin veya çözüm yollarının herbiri belirli bir jeolojik problemi çözmede ve yorumlamada yararlı olabilirler. Ama her zaman göz önünde bulundurulması gereken kavram, ters çözümde sonucun hiçbir zaman tekil olmadığıdır. Ters çözüm kuramları, aynen matematiksel istatistik kuramlarında olduğu gibi sorunu aydınlatıcı olarak kullanılmalı, fakat temel dayanak olarak alınmamalıdır.

Gözlem değeri (G_i) ile hesaplanan değer (C_i) arasındaki farkı en aza indirgeyebilmek için problemimizi, başlangıçta ilk model etrafında doğrusallaştırmamız gerekmektedir. Taylor serilerine açıp, ikinci ve daha yüksek üslü terimleri atarsak, problemimiz doğrusallaşmış olur.

$$\Delta G_i = G_i - C_i \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial C_i}{\partial p_i} \Delta p_i \qquad (1)$$

Bu modeli değiştirgenlerine ayırma ve işlevleri doğrusallaştırma işlemleri bizi N denklemli, M bilinmeyenli denklemler kümesi çözümüne götürür. Her aşamada, değiştirgenlere eklenecek artım miktarını belirleyebilmek için hesaplanan Ci değerlerini ve onların değiştirgenlere göre kısmi türevlerinin ($\partial C_i / \partial p_j$) değerlerini hesaplamamız gerekir. Buradaki kısmi türevler matrisi A (N x M) :

$$[A] = \sum_{j=1}^{M} \partial C_i / \partial p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (2)$$

olur. [A] matrisinin satırları herhangi bir gözlem noktasının M değiştirgene göre kısmi türevlerinin değerlerini, sütunları ise N gözlem noktasının herhangi bir değiştirgene göre kısmi türevlerinin değerlerini gösterir. [A] matrisinin matris gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial P_1} & \frac{\partial C_1}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial C_1}{\partial P_M} \\ \frac{\partial C_2}{\partial P_1} & \frac{\partial C_2}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial C_2}{\partial P_M} \\ \frac{\partial C_3}{\partial P_1} & \frac{\partial C_3}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial C_3}{\partial P_M} \\ \frac{\partial C_N}{\partial P_1} & \frac{\partial C_N}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial C_N}{\partial P_M} \end{bmatrix}_{(N \times M)} = [A]_{(N \times M)}$$

Denklem (1)'i matris düzeninde yeniden yazıp düzenlersek, bulunması istenen değiştirgenin artım miktarını Δp matris işlemleri yoluyla bulabiliriz.

$$\underset{(N\times1)}{[\Delta G]} = \underset{(N\times M)}{[A]} \cdot \underset{(M\times1)}{[\Delta p]}$$

İkinci adım olarak, doğrusallaştırma işlemini modelin uzay boyutunu dikdörtgenler prizmaları şeklinde tasarlayıp yoğunluk (veya başka bir fiziksel değiştirgen) değişimlerini gözönüne alarak da yapabiliriz (Green 1975, Last ve Kubik 1983).

$$g_i = \sum_{j=1}^{M} a_{ij} d_i, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, N \qquad (4)$$

Burada d_j, j'inci bloğun yoğunluğu, a_{ij} ise j'inci bloğun etkisinin I'inci gravite değerine katkısını belirtir. Bu nedenle, blokların iki boyutlu gravite etkisinin saptanması için (Telford ve diğ. 1976) a_{ij} değerlerinin tüm gözlem noktaları ve bloklar için hesaplanması gerekir (Şekil 1).

A matrisinin her elemanının değeri:

$$a_{ij} = 2k \left(x_i - x_j + \frac{b}{2}\right) \log \frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} + b \log \frac{r_4}{r_3} - \left(z_j + \frac{h}{2}\right)(\Theta_4 - \Theta_2) + \left(z_j + \frac{h}{2}\right)(\Theta_3 - \Theta_1) \qquad (5)$$

olarak bulunur. k evrensel çekim katsayısını simgeler. Denklem (4)'ün matris üzerindeki gösterimi

$$\underset{(N\times1)}{[G]} = \underset{(N\times M)}{[A]} \cdot \underset{(M\times1)}{[D]}$$

olarak yazılır. Ters çözümde saptanmak istenen ise, [D] matrisi ile simgelenen her bloğun yoğunluklarıdır.

Aydın (1987), manyetik anomaliler üzerinde yaptığı benzer bir çalışma ile yeraltı manyetizasyon dağılımının saptanabileceğini göstermiştir.

TERS ÇÖZÜMLE İLGİLİ KURAMSAL TARTIŞMA

Doğrusal denklemlerin çözümü ile ilgili matematiksel yaklaşımlar Lanczos (1961) tarafından ortaya konmuş, Jackson (1972) ve Wiggins (1972) tarafından da jeofiziğe uyarlanmıştır.

[G] = [A] [D] gibi bir denklem sistemini çözmek için [D] = [A] ^{T} [F] gibi yeni bir denklem sistemini ekleyerek tüm sistemi kare matris haline dönüştürelim.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} G \\ C \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} \tag{7}$$

Burada [S] matrisi (N+M) x (N+M) boyutlu bakışık bir matris olup değeri sıfıra eşit olmayan 2p kadar Eigen değerine sahiptir. Çiftler halinde olan Eigen değerlerinin p kadarı [G] = [A] [D], p kadarı da [C] = $[A]^T$ [F] denklem sistemine aittir. Her iki denklem sisteminde p = N ve p = M olmalıdır.

$$\underset{(NxM)}{[A]} = \underset{(Nxp)}{[U]} \; \underset{(pxp)}{[\Lambda]} \; \underset{(pxM)}{[V]^T} \tag{8}$$

(pxp) boyutlu [Λ] matrisi sıfırdan farklı Eigen değerlerini içeren köşegen matristir. [U] ve [V] ise Eigen vektörlerinden oluşan (Nxp) ve (Mxp) boyutlu matrislerdir. Lanczos, [A]'nın doğal tersi [B]'yi aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$$[B] = [V] \; [\Lambda]^{-1} \; [U]^T \tag{9}$$

Buradan bulunması istenen değiştirgen matrisi [D] elde edilir.

$$[D] = [B] \, [G] \,. \tag{10}$$

M, N ve p değerlerine bağlı olarak problemi dört türlü irdeleyebiliriz.

(1) Bağımsız ve tam tanımlı düzen (M = N = p): Bu koşullar altında tam ve tek bir çözüm vardır. Bu çözüm de $D = A^{-1}$ G olarak tanımlanır.

(2) Kısıtlı ve tam tanımlı düzen (p = M < N): Aşırı tanımlı denklemler sistemi olup A^TA tekildir. D = (A^TA) A^T G matris sistemi ile sağlanan çözüm standart en küçük kareler yöntemi olarak bilinir.

(3) Bağımsız ve eksik tanımlı düzen (p = N < M): Bu düzende denklem sayısı bilinmeyen sayısından azdır. Genelleştirilmiş ters çözüm $D = A^T (AA^T)^{-1}$ G matris sisteminin çözümüyle sağlanır. Bu çözüm tekil değildir, fakat genel formülleştirmede sıfır Eigen değerlerine karşılık gelen Eigen vektörlerinin etkileri ortadan kaldırılır. Bu duruma birçok jeofizik ters çözüm işleminde karşılaşılır (Jackson 1972).

(4) Kısıtlı ve eksik tanımlı düzen (p < M ve N): Bu düzende çözüm M ve N değerlerine bağlıdır. Eğer M = N ise A, M < N ise (A^TA) tekildir. Denklemin sağ tarafı uyumluluk koşullarına bağlıdır.

Lanczos yöntemiyle matrisin tersini bulmak aslında bir en küçük kareler matris tersini bulma işlemidir. [A] ve onun tersi olan [B] matrislerini kullanarak oluşturulan yeni iki matris yardımıyla ters çözüm irdelemelerini gerçekleştirebilirz. (Jackson 1972). Bunlar Ayırımlılık matrisi [D] ve Bilgi yoğunluk matrisi [S]'dir ve

$$[R] = [B] \, [A] = VV^T$$
$$[S] = [A] \, [B] = UU^T \tag{11}$$

denklemleriyle verilir. [R] matrisi (MxM), [S] matrisi ise (NxN) boyutludur. (p = N < M) olduğunda R matrisi veriden çıkartılabilecek ayırımlılığın derecesini gösterir. Eğer R matrisi birim matris ise çözüm tekildir ve tam ayırımlılığa ulaşılmıştır. R matrisinin satırları tekil çözüme ulaşmak için irdelenecek değerleri taşırlar. (p = M < N) olduğunda ise S matrisi verinin bağımsızlık derecesini simgeler. S matrisinin köşegen elemanarının değerleri de karşıtına gelen gözlem değerlerinin model çözüme katkısının derecesini gösterir.

YÖNTEM VE TEMELLERİ

Dikdörtgenler prizması şeklinde bloklardan oluşan bir modelde Şekil 1 sadece blokların yoğunlukları (veya susseptibiliteleri) değişken olarak alınmıştır. Her bloktaki yoğunlukların tekdüze olduğu varsayılmıştır (Green 1975, Last ve Kubik 1983). Blokların neden olduğu gravite etkisi denklem (5)'den elde edilir Eğer her gözlem noktasında e_i kadar gürültü olduğu varsayılırsa i'inci gözlem noktasındaki gravite değeri

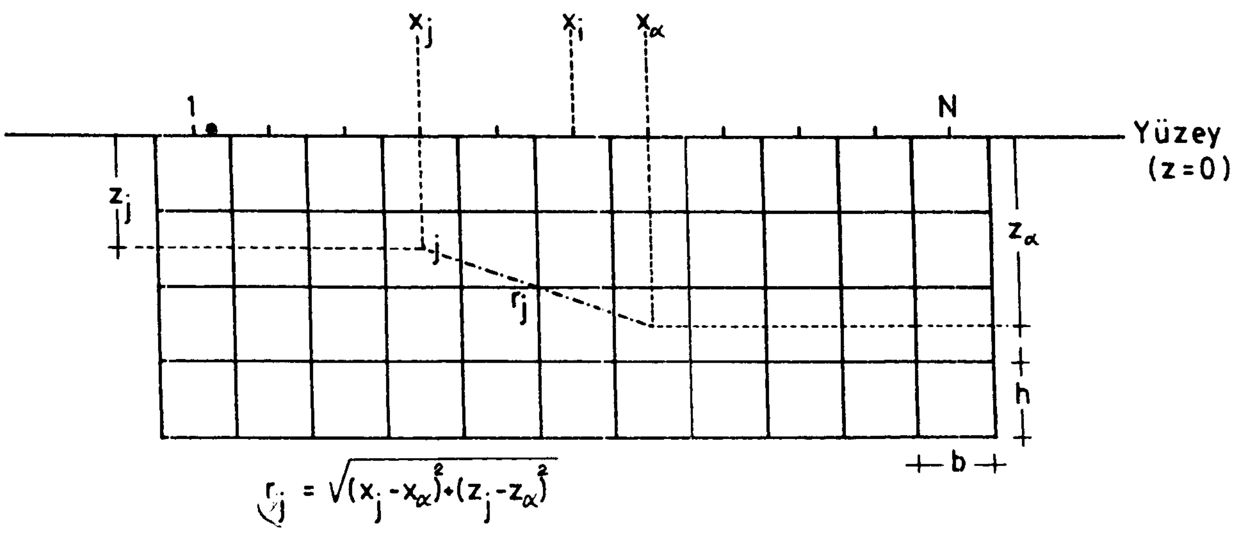
$$g_i = \sum_{j=1}^{M} a_{ij} d_i + e_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, N \tag{12}$$

olur. Burada d_j j'inci bloğun yoğunluğu, e_j i'inci gözlem noktasındaki gürültü ve a_{ij} ise i'inci gözlem noktasına j'inci bloğun gravite etkisidir. Bu veri denklemlerinin matris gösterimi

$$[G] = [A] \, [D] + E \tag{13}$$

şeklindedir.

Gravite ters çözümü, verilen bir [G] gözlem verilerini açıklayacak [D] yoğunluk değerlerinin saptanması işlemidir. Ters çözüm problemini tartışırken çözümün tekil olmadığını, veri sayısı ile değiştirgen sayısı arasındaki ilişkilerden sonuca ulaşma yollarının araştırılması gerektiğini vurgulamıştık. Burada problemimizi ortaya koyduğumuz gibi çoğunlukla M > N (değiştirgen sayısının veri sayısından fazla olması) olma olasılığının fazlalığından dolayı yoğunlukların ve gürültülerin fonksiyonlarını en küçük yaparak çözüme ulaşabiliriz. Last ve Kubik (1983) yoğunluk ve gürültü fonksiyonlarını en küçük yapacak ağırlıklı en küçük kareler yöntemini kullanarak yoğunluk değerlerini bulmuşlardır. Böyle sistem-



Şekil 1. Elemanter dikdörtgen blokları gösteren iki bo-yutlu model.
Fig. 1. The 2-D model showing an elementary rectangular block.

lerde yoğunluk ağırlık fonksiyonları varyans-kovaryans matrisi olarak alınmaktadır. Bloklar birbirlerinden bağımsız olduğundan kovaryans elemanları sıfır olarak alınabilmektedir.

$$q = \sum_{j=1}^{M} f_d(d_j) + \sum_{i=1}^{N} f_w(e_i) \ldots \text{En Küçük} \tag{14}$$

Yoğunluk fonksiyonu $f_d(d_j)$:

$$f_d(d_j) = Wd_j \cdot d_j^2 \,, \tag{15}$$

Gürültü fonksiyonu $f_w(e_i)$:

$$f_w(e_i) = W_{e_i} \cdot e_i^2 \tag{16}$$

Burada Wd_j ve We_i yoğunluk ve gürültü ağırlık fonksiyonlarıdır. Last ve Kubik (1983) tarafından izlenen yol, anomaliye neden olan alanın en küçüğe indirgenmesi (üç boyutlu durumda ise hacmi) yöntemidir. Eğer blokların kenar boyutları b ve h ise,

$$\text{Alan} = b \cdot h \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{M} \frac{d_j^2}{(d_j^2 + \varepsilon)} \tag{17}$$

(ε çok küçük bir değer) ile ifade edilir.

$$\text{Buradaki} = wd_j \cdot d_j^2 = \frac{1}{(d_j^2+\varepsilon)} \cdot d_j^2$$

fonksiyonu verilen koşullarda ancak aşağıdaki değerleri alır.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d_j^2}{d_j^2+\varepsilon} = \begin{cases} 0 \,, & d = 0 \text{ için} \\ 1, & d \neq 0 \text{ için} \end{cases}$$

Bu sonuç bizi aşağıdaki yoğunluk ağırlık fonksiyonuna ulaştırır:

$$Wd_j = (d_j^2 + \varepsilon)^{-1} \tag{18}$$

Eğer gürültülü veri söz konusu ise, denklem (14)'deki ikinci terim göz önüne alınmalıdır. Yukarıda tanımlanan problemin doğrusal olmaması nedeniyle yineleme yoluyla çözülmesi gerekir. Eğer gürültü oranı (l_0) önceden saptanmışsa, her yinelemede yeni bir gürültü ağırlık fonksiyonu Jackson (1979) tarafından tanımlanan en küçük varyanslı en küçük kareler yöntemiyle bulunabilir.

$$[W_e]^{-1} = l_0^2 \text{ köşegen } \big[[A]\,[W_d]^{-1}\,[A]^T \big] \tag{19}$$

Yukarıdaki (19) denklemi gürültülerden bağımsız gürültü ağırlık fonksiyonunu tanımlar. Gerçek anlamda yapılan işlem bu ağırlıklı kalıntıların karelerinin toplamını en aza indirgemedir. Bu çözüm, eğer gürültüler dengeli olarak dağılmışsa sağlıklı sonuçlar verir. Gürültü dağılımı dengesiz ise, sıfırdan farklı kalıntıları en aza indirgeme yollarını araştırırız.

Yukarıda açıklanan alan (veya hacmi) en küçük yaparak ağırlık fonksiyonunun hesaplanması yöntemiydi. Bunun yerine Guillen ve Menichetti (1984) tarafından tanımlanan atalet momentini en aza indirgeyerek cismin ağırlık merkezi etrafında yoğunlaştırılması yöntemini kullanabiliriz. Bu yönteme göre, Atalet momenti M tüm momentlerin (M_j) toplamıdır:

$$M = \sum_{j=1}^{N} M_j \,. \tag{20}$$

Her bloğun yoğunluğu (veya süseptibilitesi) sabit olduğunda j'inci bloğun atalet momenti,

$$M_j = q_j d_j \,(k_j^2 + r_j^2) \tag{21}$$

ile verilir. Burada r_j bloğun ağırlık merkezinin toplam ağırlık merkezine olan uzaklığı ve k_j ise j'inci blok elemanının biçimine bağlı katsayıdır. q_j blok alanını veya hacmini göstermektedir. Ağırlık fonksiyonu

$$Wj = \frac{q_j \, ((k_j^2 + r_j^2)}{|d_j| + \varepsilon} \qquad (22)$$

bağıntısı ile verilir. Blokların atalet momentleri M_j verilen koşullarda,

$$Mj \lim_{\varepsilon \to 0} = \frac{q_j \, (k_j^2 + r_j^2)}{|d_j| + \varepsilon} d_j^2 \begin{cases} = 0, & \text{eğer } d_j = 0 \\ = q_j \, (k_j^2 + r_j^2)\, d_j, & \text{eğer } d_j \neq 0 \end{cases} \qquad (23)$$

değerini alır. Buradaki kj katsayısı cisim iki boyutlu ise,

$$k_j^2 = \frac{h^2 + b^2}{12} \qquad (24)$$

üç boyutlu ise,

$$k_j^2 = \frac{h^2 + b^2 + c^2}{3} \qquad (25)$$

olarak tanımlanır. h, b, c blokların boyutlarını göstermektedir. Bu yöntemle elde edilecek yapı ağırlık merkezi etrafında toplanacaktır. İlk ağırlık merkezi en küçük kareler yöntemiyle bulunur. Problemin geri kalan işlem sırası ise yukarıda tanımlandığı gibidir. Tanımlanan bu ikinci yöntem anomaliye neden olan kütle tek olması halinde gerçekçi bir yoldur.

HESAPLAMA YÖNTEMİ VE VARSAYIMLAR

Gürültü ve yoğunluk ağırlık fonksiyonları daha önce tanımlandığı gibi gürültü ve yoğunluklardan bağımsızdırlar. Denklem (12)'de belirtilen problemin çözümü en küçük kareler yöntemine dönüşür (Last ve Kubik 1983).

$$[\hat{D}] = [W_d]^{-1} [A]^T \left[[A] [W_d]^{-1} [A]^T + [W_e]^{-1} \right]^{-1} \cdot [G] \qquad (26)$$

Eğer yoğunluk ağırlık fonksiyonu $[W_d] = [I]$ birim olarak kabul edilirse, gürültünün olmadığı durumlarda denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[\hat{D}] = [A]^T \left[[A] [A]^T \right]^{-1} \cdot [G] \qquad (27)$$

Fakat bu durum jeolojik olarak kabul edilemeyecek yoğunluk dağılımına neden olur. Bu nedenle, değişken $[W_d]$ ve $[W_e]$ ağırlık fonksiyonları yineleme işleminin her aşamasında işleme sokulmalıdır. Denklem (26) k'ıncı işlem adımında

$$\left[\hat{D}^{(k)}\right] = \left[W_d^{(k-1)}\right]^{-1} [A]^T \left\{ [A] \left[W_d^{(k-1)}\right]^{-1} [A]^T + \left[W_e^{(k-1)}\right]^{-1} \right\}^{-1} [G] \qquad (28)$$

ve her işlem adımında da W_d ile W_e ;

$$\left[W_d^{(k-1)}\right]_{jj}^{-1} = \left[d_j^{(k-1)}\right]^2 + \varepsilon, \qquad (29)$$

$$\left[W_e^{(k-1)}\right]_{ii}^{-1} = 1_0^2 \text{ köşegen} \left[[A] \left[W_d^{(k-1)}\right]^{-1} [A]^T \right] \qquad (30)$$

olarak tanımlanır. Çözüme ulaşabilmek için ilk yinelemede:

$$\left[W_d^{(0)}\right] = [I] \qquad (31)$$

birim matris olarak verilir. Bundan da W_e gürültü ağırlık fonksiyonu ilksel olarak bulunarak yineleme işlemine başlanabilir. Denklem (28) kullanılarak blokların yoğunlukları saptanır. Ağırlık fonksiyonlarında kullanılan ε çok küçük artım miktarlarıdır. Örneğin kullanılan bilgisayarın duyarlılığı (hata limiti) olarak alınabilir. Gürültü miktarının (1_0) bulunması yöntemin uygulanmasında önemli olmamakla birlikte saptanması oldukça güçtür. Fakat Gürültü/Sinyal oranı 1_0'ı seçme sınırımız oldukça geniştir.

Eğer veride gürültü normal olarak dağılmamışsa ve birkaç tane aşırı gürültülü nokta varsa sıfırdan farklı kalıntıları en küçük yapacak yeni gürültü ağırlık fonksiyonu W_e aşağıdaki şekilde tanımlanmalıdır.

$$[W_e]_{ij}^{-1} = 1_0^2 \, [P]_{ii} \, C_0 \, (e_i^2 + n) \, \delta_{ij} \begin{cases} i = j & \delta_{ij} = 1 \\ i \neq j & \delta_{ij} = 0 \end{cases} \qquad (32)$$

Burada $[P] = [A] \, [W_v]^{-1} \, [A]^T$ olup, C_0 normalleştirme sabitidir.

$$C_0 = \frac{\sum e_i^2 / \left[[P]_{ii} \, (e_i^2 + n) \right]}{\sum e_i^2 / [P]_{ii}} \qquad (33)$$

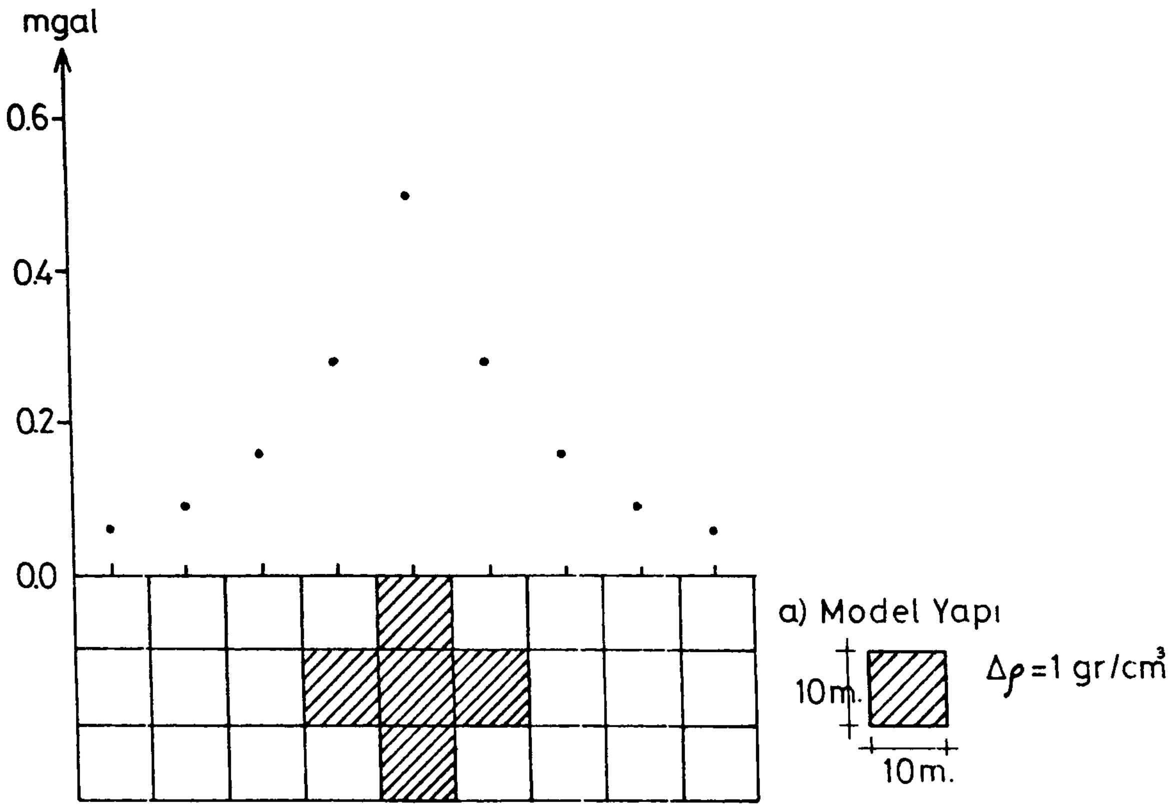
d_{ij} ise Kronecker delta değeridir. n değeri çok küçüktür ve ε değerine yakın seçilebilir. Bu konunun irdelemesi ayrıntılı olarak Last ε Kubik (1983) tarafından verilmiştir.

YOĞUNLUKLARI SINIRLAMAK VE TEK YOĞUNLUK MODELİ

Çoğu kez, çevresiyle tek yoğunluk farkı oluşturan yapının araştırılması sorunuyla karşılaşırız. Denklem (26)'ya eklenecek yeni bir sınırlama koşuluyla bu amacımızı gerçekleştirebiliriz.

$$d_j / d_o \leq 1 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, M \,. \qquad (34)$$

Burada d_0 ulaşılmak istenen yoğunluktur. Eğer yineleme adımlarında bir bloğun yoğunluğu ulaşılmak istenen yoğunluğa erişmiş veya aşmışsa bu bloğun yoğunluğu d_0 olarak kabul edilir ve dondurulur. Yoğunluğu dondurulan



b) 1. Yineleme

-0.03	-0.02	0.06	0.27	1.36	0.27	0.06	-0.02	-0.03
0.03	0.07	0.16	0.34	0.50	0.34	0.16	0.07	0.03
0.06	0.10	0.16	0.24	0.29	0.24	0.16	0.10	0.06

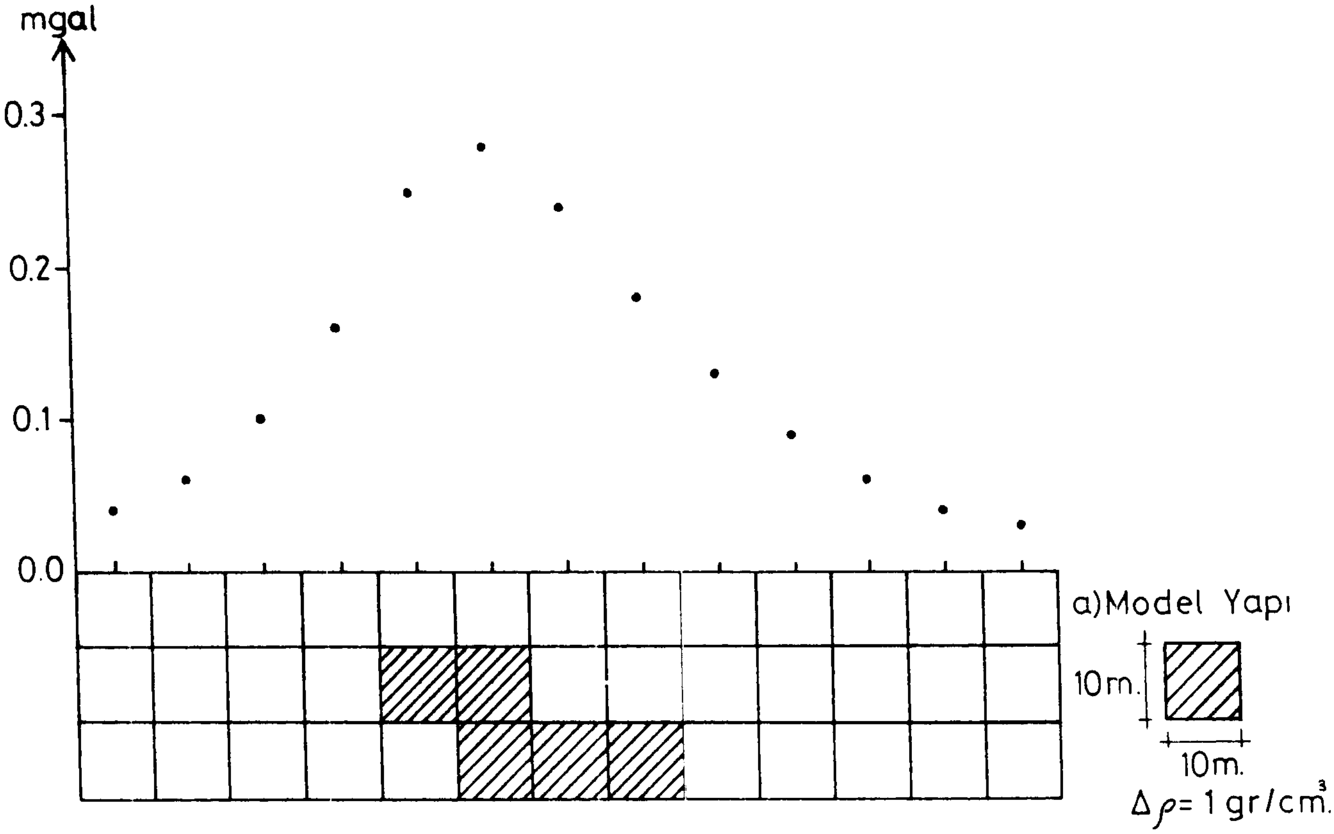
c) 4. Yineleme

0.00	-0.00	0.01	-0.02	0.89	-0.02	0.01	-0.00	0.00
0.00	0.00	0.02	0.77	1.80	0.77	0.02	0.00	0.00
0.00	0.00	0.02	0.17	0.36	0.17	0.02	0.00	0.00

d) 9. Yineleme

				1.00				
			1.00	0.99	1.01			
				1.00				

Şekil 2. Yoğunluk kısıtlamasız kuramsal haç modeli uygulaması
Fig. 2. Theoretical cross model example without density constraint



b) 1. Yineleme

-0.00	-0.00	0.02	0.15	0.41	0.50	0.33	0.20	0.10	0.04	0.01	0.00	0.00
0.02	0.04	0.08	0.16	0.26	0.30	0.25	0.18	0.12	0.07	0.04	0.02	0.02
0.04	0.06	0.10	0.14	0.19	0.21	0.19	0.16	0.12	0.08	0.06	0.04	0.03

c)4.Yineleme

			0.02	0.08	0.06	-0.01						
			0.04	0.69	0.94	0.44	0.19	0.07	0.01			
		0.01	0.08	0.37	0.68	0.61	0.37	0.17	0.06	0.02	0.01	

d) 7. Yineleme

				1.07	1.05							
					0.99	1.09	0.97					

Şekil 3. Yoğunluk kısıtlamasız kuramsal basamak modeli uygulaması
Fig. 3. Theoretical step model example without density constraint

bloğun gravite etkisi gözlem değerinden çıkarılır ve (k-1)'inci yineleme sonunda indirgenmiş veri vektörünün G* değerleri:

$$g_i^{*(k)} = g_i - d_0 \sum_{j=1}^{M} A_{ij}\, \Theta\, (d_j^{(k-1)} / d_0) \qquad (35)$$

olur. Burada Heaviside basamak fonksiyonu verilen koşullarda

$$\Theta\,(d_j / d_0) = \begin{cases} 0 \;, & \text{eğer } d_j < d_0 \\ 1 \;, & \text{eğer } d_j \geq d_0 \end{cases} \qquad (36)$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla yeni tanımlanan yoğunluk ağırlık fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$[W^{*(k)}]^{-1} = \varepsilon + (d_j^{(k-1)})^2 \left\{ 1 - \Theta\,(d_j^{(k-1)} / d_0) \right\} \qquad (37)$$

Bloklar d_0 yoğunluk sınırını aştıkça dondurulacağından her aşamada yeni l_0 değeri saptanmalıdır.Blok etkilerinin çıkarılması öncesi ve sonrası en büyük sinyal genliklerinin oranı ile l_0 değeri çarpılarak yeni l_0 değeri elde edilir.

$$l_0^{(k)} = l_0^{(k-1)} \frac{|\, g_i^* - e_i \,|_{max}^{(k-1)}}{|\, g_i^* - e_i \,|_{max}^{(k)}} \qquad (38)$$

Bulunan bu yeni l_0 değerini kullanarak denklem (30)'daki gürültü ağırlık fonksiyonu W_e^* tekrar hesaplanır. Yoğunluklar ise,

$$d_j^{(k)} = \left\{ [W_d^{*(k)}]^{-1} [A]^T \left\{ [A] [W_d^{*(k)}]^{-1} [A]^T + [W_e^{*(k)}]^{-1} \right\}^{-1} [G^{*(k)}] \right\} j + d_0\, \Theta\, (dj^{(k-1)}/d_0) \qquad (39)$$

denklemi yardımıyla hesaplanır. Bu denklem (26)'nın tek yoğunluk uygulamasıdır. Her yinelemede yoğunluk sınırını aşan bloklara da küçük bir düzeltme uygulanır. Eğer düzeltme miktarları ters yönde ise, bu blok yoğunlukları tekrar işleme girer, eğer aynı yönde ise bu bloklara ait büyük ağırlıklar korunarak ve blok yoğunluğu d_0 değerinde tutularak bir sonraki yineleme işleminde kullanılır.

Jeolojik koşullar göz önünde bulundurularak yoğunlukların belirli sınırlar arasında tutulması da istenebilir. Yoğunluk sınırları

$$d_{min} \leq d \leq d_{max} \qquad (40)$$

olarak seçildiği gibi, bunu her blok içinde düşünebiliriz. Yineleme işlemi sırasında, eğer bir veya daha fazla blok yoğunlukları belirlenen yoğunluk sınırları dışına taşarsa, bunlar sınır değerlerine taşınır ve dondurulur. Bu durumda Θ fonksiyonunun iki ayrı koşuluna göre yoğunluk ağırlık fonksiyonunu tanımlamak gerekmektedir.

$$\Theta_1\,(d_j / d_{min}) = \begin{cases} 1 \;, & \text{eğer } d_j \leq d_{min} \\ 0 \;, & \text{eğer } d_j > d_{min} \end{cases}$$

$$\Theta_2\,(d_j / d_{max}) = \begin{cases} 1 \;, & \text{eğer } d_j < d_{min} \\ 0 \;, & \text{eğer } d_j \geq d_{min} \end{cases}$$

koşullarında yeni ağırlık fonksiyonu,

$$[W^{*(k)}]^{-1} = \varepsilon + (d_j^{(k-1)})^2 \left\{ 1 - \Theta_1 (d_j^{(k-1)}/d_{min}) + \Theta_2\, (d_j^{(k-1)}/d_{max}) \right\} \qquad (41)$$

olarak tanımlanır. Bu blokların ağırlık fonksiyonlarına çok büyük bir değer atanır ve gravite etkileri aynen tek yoğunluk modelinde olduğu gibi gözlenen anomali değerinden çıkarılır. Bir sonraki yineleme işleminde yeni $D^{(k)}$, $G^{(k)}$ ve $W_d^{(k)}$ değerleri kullanılır.

BİLGİ YOĞUNLUK VE AYIRIMLILIK MATRİSLERİ

Verinin çözüme katkısını belirleyen Bilgi Yoğunluk Matrisi (S)'nin bu tür ters çözüm işleminde anlamı yoktur. Çünkü veriye uygun yoğunluk dağılımı saptanmaktadır. Bilgi Yoğunluk Matrisi,

$$[S] = [A]\,[W_d]^{-1} [A]^T \left[[A]\, [W_d]^{-1} [A]^T + [W_e]^{-1} \right]^{-1} \qquad (42)$$

denkleminden hesaplanabilir. Bu matrisin köşegen elemanları bir ve bire yakın değerler alırlar.

Blok yoğunluklarının bulunmasında önemli bir belirteç olan Ayırımlılık Matrisi (R) ise aşağıdaki bağıntıyla bulunabilir.

$$[R] = [W_d]^{-1} [A]^T \left[[A]\, [W_d]^{-1} [A]^T + [W_e]^{-1} \right]^{-1} [A] \qquad (43)$$

Bu matristeki köşegen değerler de çözüme ulaşmadaki başarıyı gösterir ve birime yakın olması çözümü simgelemektedir.

UYGULAMALAR

Yoğunluk Kısıtlamasız Çözüm

Şekil 2a ve 3a'da görülen tek yoğunluklu yoğunluk kısıtlamasız model yapıların oluşturdukları anomali değerleri yukarıda tanımlanan yöntemle irdelenmiştir. Taralı blokların yoğunlukları 1 gr/cm^3 olarak alınmıştır. Şekil 2b ve 3b'de görülen ilk yinelemenin sonuçlarında modeli tanımlayann yoğunluk değerleri bloklar arasında gelişigüzel dağılmıştır. Yineleme işlemi ilerledikçe, bloklar arasında dağılan yoğunluk değerleri giderek model yapıya doğru yaklaşmaktadır (Şekil 2c ve 3c). Devam eden yineleme işlemi sonucunda model yapıyı tanımlayan yoğunluk değerleri belirgin olarak gözlenmektedir (Şekil 2d ve 3d). Şekil 4 ile Şekil 5, Şekil 2 ve Şekil 3'de görülen model yapıların ters çözüm işlemi sırasında sürdürülen yi-

0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

1. Yineleme

0.5	0.3	0.6	0.3	1.0	0.4	0.6	0.3	0.5
0.0	0.0	0.3	0.8	0.8	0.8	0.3	0.0	0.0
0.0	0.0	0.1	0.4	0.3	0.4	0.1	0.0	0.0

4. Yineleme

0.7	0.7	0.4	0.1	1.0	0.1	0.4	0.7	0.7
0.1	0.0	0.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

9. Yineleme

Şekil 4. Haç modeli uygulamasının ayrımlılık dizeyi gösterimi
Fig. 4. Resolution matrix for the cross model application

0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

1. Yineleme

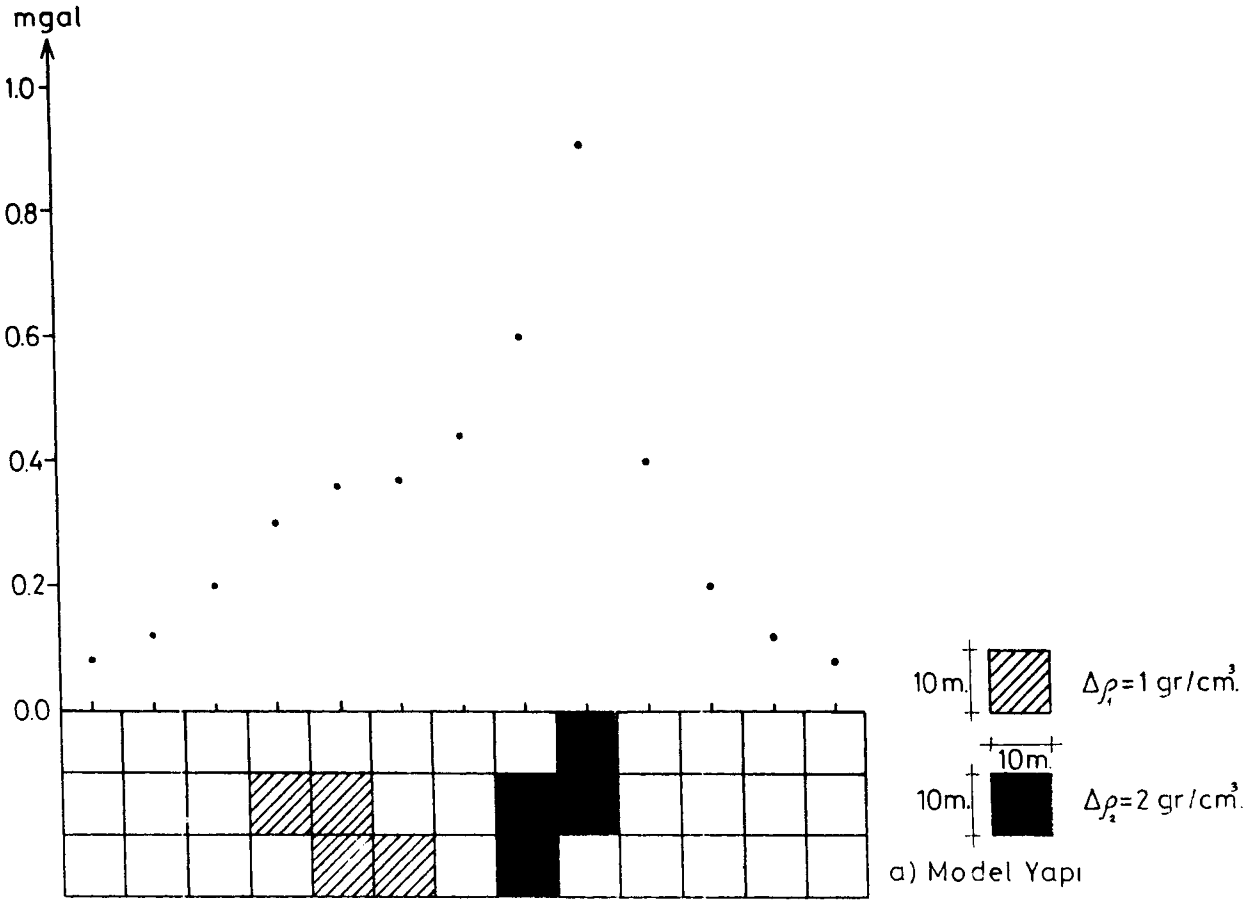
0.5	0.5	0.1	0.8	0.9	0.8	0.6	0.5	0.6	0.2	0.4	0.6	0.6
0.1	0.0	0.0	0.6	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.3	0.1	0.1	0.2
0.1	0.1	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.2	0.2	0.1

4. Yineleme

0.8	0.8	0.6	0.6	0.2	0.0	0.1	0.3	0.5	0.6	0.8	0.8	0.8
0.1	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.3	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

7. Yineleme

Şekil 5. Basamak modeli uygulamasının ayrımlılık dizeyi gösterimi
Fig. 5. Resolution matrix for the step model application



b) 1. Yineleme

-001	-0.0C	0.12	0.37	0.43	0.27	0.32	0.61	2.48	0.05	-0.10	-0.08	-0.06
0.05	0.08	0.17	0.27	0.33	0.35	0.44	0.69	0.88	0.47	0.16	0.05	0.03
0.08	0.12	0.17	0.24	0.29	0.34	0.41	0.51	0.52	0.39	0.23	0.13	0.08

c) 4. Yineleme

		0.04	0.19	0.23	0.07	-001	0.04	2.03				
	0.01	0.09	0.62	0.46	0.30	0.34	1.92	1.97				
	0.04	0.17	0.36	0.41	0.42	0.61	1.00	0.56	0.03			

d) 11. Yineleme

								2.01				
			1.03	1.03			2.05	1.99				
				1.04	0.97		2.04					

Şekil 6. Yoğunluk kısıtlamasız iki ayrı yoğunluk kuramsal modeli uygulaması
Fig. 6. Theoretical two different density model example without density constraint

1. Yineleme

0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

4. Yineleme

0.1	0.1	0.9	0.9	0.9	0.7	0.3	0.6	1.0	0.0	0.7	0.4	0.8
0.0	0.1	0.6	0.3	0.2	0.2	0.4	0.7	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1	0.3	0.5	0.2	0.0	0.0	0.0

12. Yineleme

0.6	0.6	0.6	0.2	0.1	0.2	0.3	0.1	1.0	0.1	0.7	0.7	0.8
0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Şekil 7. İki ayrı yoğunluk modeli uygulamasının ay-rımlılık dizeyi gösterimi
Fig. 7. Resolution matrix for the two different density model application

nelemeler boyunca ayırımlılık dizeyi R'nin köşegen elemanlarının aldığı değerleri göstermektedir. Görüldüğü gibi, işlemler sırasında model yapıyı tanımlayan yoğunluk değerlerinin saptandığı yinelemelerde ayırımlılık dizeyi R'nin köşegen elemanları yapının yeraldığı bloklarda birim (1) değerini almaktadır.

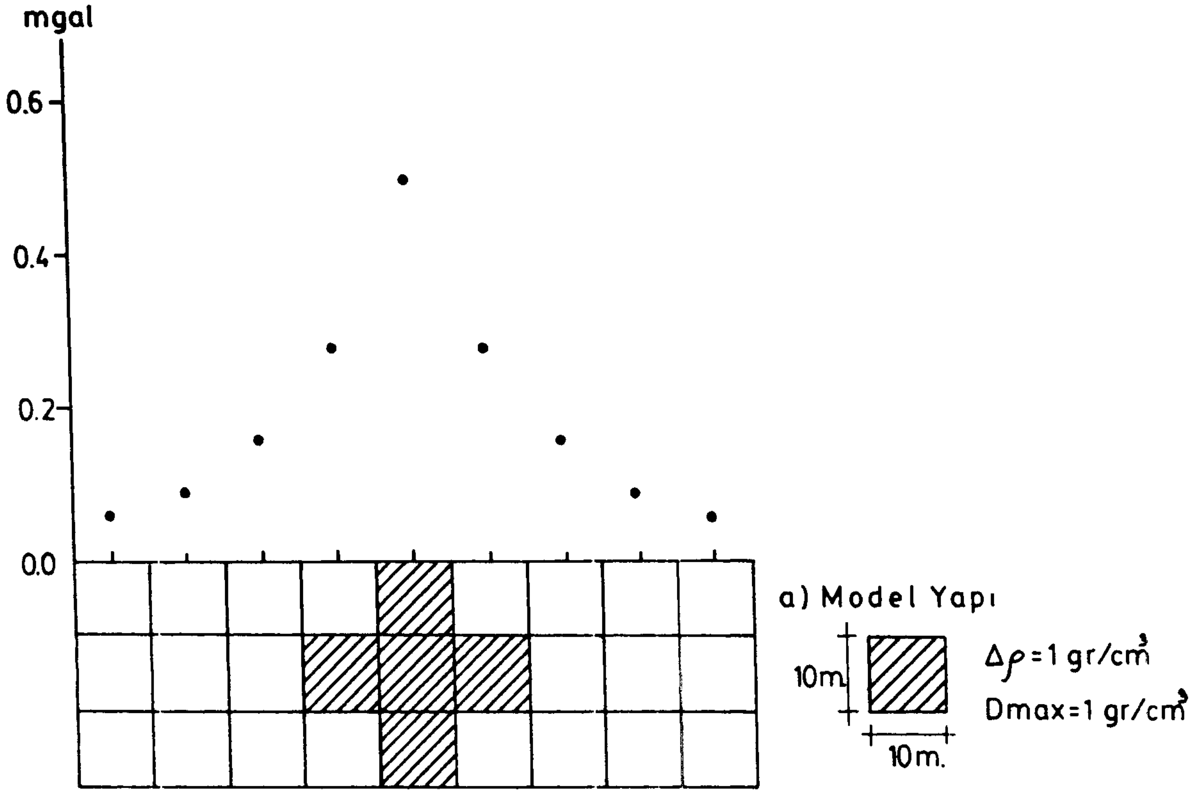
Şekil 6.a'da ise taralı blokların yoğunluğu 1 gr/cm^3, içi dolu blokların yoğunluğu 2 gr/cm^3 olarak alınan iki farklı yoğunluklu model yapı ve oluşturduğu anomali değerleri görülmektedir. Önceki örneklerde de görüldüğü gibi, ilk yinelemede yoğunluk değerleri tüm bloklara dağılmış (Şekil 6b), artan yineleme işlemi sayısı ile de blokların yoğunlukları model yapıların yer aldığı bloklara doğru yoğunlaşarak model yapıların şeklini oluşturmuştur (Şekil 6c, 6d). Ayırımlılık dizeyi R'nin köşegen elemanları model yapının saptandığı yinelemede, yapının yer aldığı bloklarda birim (1) değerini almaktadır (Şekil 7).

Yoğunluk Kısıtlamalı Çözüm

Şekil 2a'da görülen model yapının oluşturduğu verilere yoğunluk kısıtlamalı ters çözüm işlemi uygulanırken, model yapının yer aldığı blokların yoğunlukları 1 gr/cm^3'ü aşmama koşulu ile kısıtlandırılmıştır. Böylelikle, yoğunluğu 1 gr/cm^3'ü aşan blokların yoğunlukları dondurularak gravite etkisi yineleme işleminde gözlem değerinden çıkarılmış, sonuca yoğunluk kısıtlamasız ters çözüm işlemine oranla hızlı bir şekilde ulaşmak amaçlanmıştır. Şekil 8'de de görüldüğü gibi, yoğunluk değerleri 8'inci yinelemede model yapının tanımlandığı bloklarda 1 değerini almıştır. Bu uygulama sırasında da ayırımlılık dizeyi R'nin köşegen elemanlarının modelin saptandığı yinelemede yapının yer aldığı bloklarda birim (1) değerini aldığı görülmüştür.

Kuramsal modeller üzerinde yapılan bu uygulamalardan sonra, yöntem yoğunluk kısıtlamalı ve yoğunluk kısıtlamasız olması koşullarına göre Aydın-Germencik gravite verilerine uygulanmıştır.

Yoğunluk kısıtlamasız ters çözüm uygulamasında çözüme altıncı yinelemeden itibaren ulaşılmakla birlikte, yapıyı tanımlayan blokların yoğunluklarının yüzeye doğru yoğunlaştığı gözlenmiştir (Şekil 9). Bu nedenle, Talwani modelleme çalışması ile saptanan 3 km'lik derinlik 2 km olarak bulunmuştur. Derinlikler arası farkın nedeni ise olasılıkla, gözlenen arazi anomalisine neden olan jeolojik yapıların tekdüze bir yoğunluğa sahip olmamalarıdır. İnceleme alanında yer alan jeolojik yapıların yoğunluklarının tekdüze olmaması ve hızlı bir değişim göstermesi nedeniyle, saptanan anomali aranan jeolojik yapıyı tam olarak simgelememektedir. Bu amaçla yoğunluk kısıtlamalı ters çözümde var olabilecek bozucu etkilerin giderilmesi için bir kısıtlama işlemi uygulanmıştır. Ters çözüm işlemine uygulanan yoğunluk kısıtlaması ile, gerçek arazi verilerinden olası jeolojik yapıya daha uygun sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, bu kısıtlama işlemi kullanılan bilgisayar zamanını da oldukça kısaltmaktadır.



b) 1. Yineleme

-0.03	-0.02	0.06	0.27	1.36	0.27	0.06	-0.02	-0.03
0.03	0.07	0.16	0.34	0.50	0.34	0.16	0.07	0.03
0.06	0.10	0.16	0.24	0.29	0.24	0.16	0.10	0.06

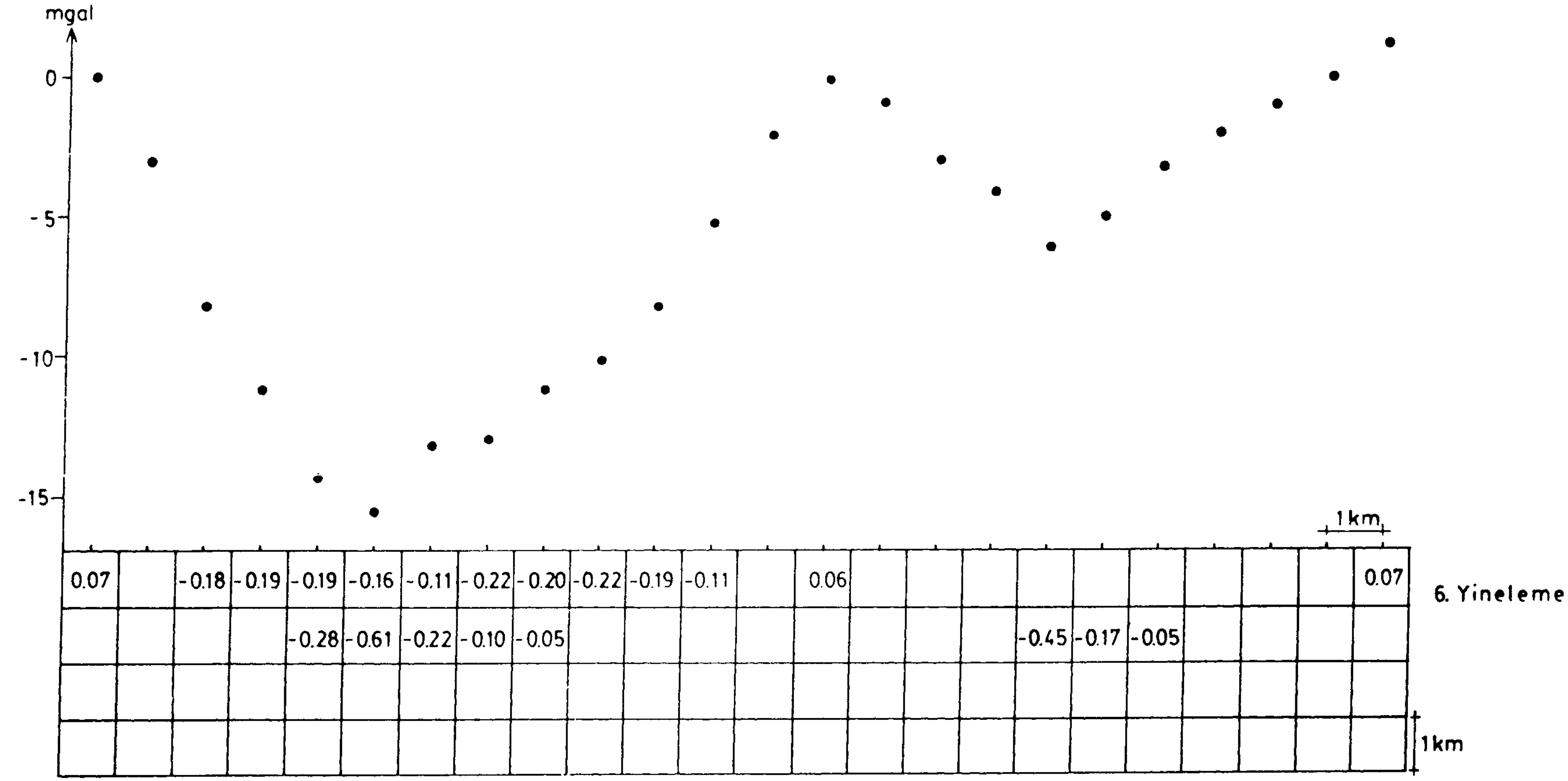
c) 4. Yineleme

		0.01	-0.02	0.89	-0.02	0.01		
		0.02	0.78	1.79	0.79	0.02		
		0.02	0.17	0.36	0.17	0.02		

d) 9. Yineleme

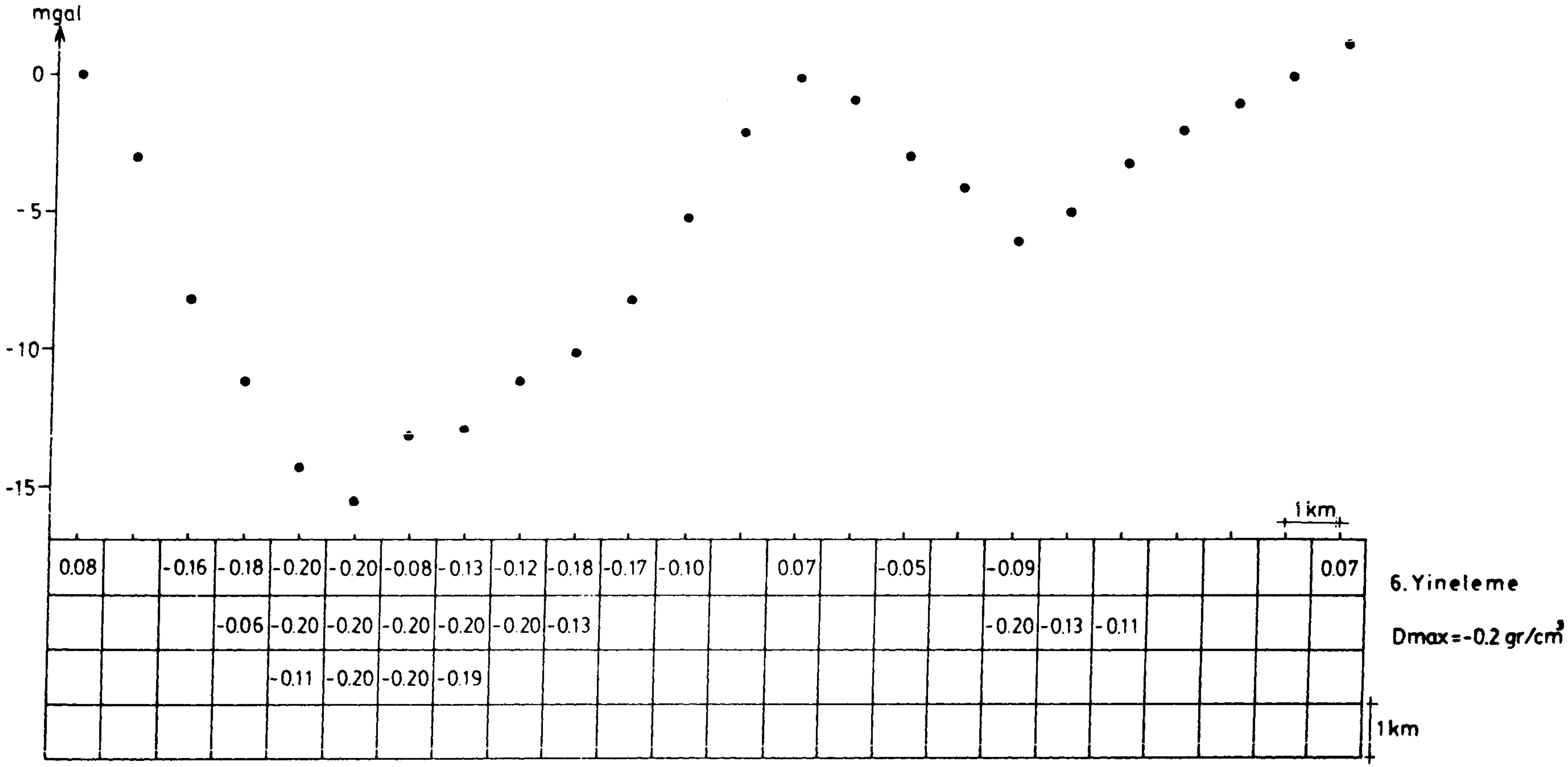
				1.00				
			0.99	1.01	1.00			
				1.01				

Şekil 8. Yoğunluk kısıtlamalı kuramsal haç modeli uygulaması
Fig. 8. Theoretical cross model example with density constraint



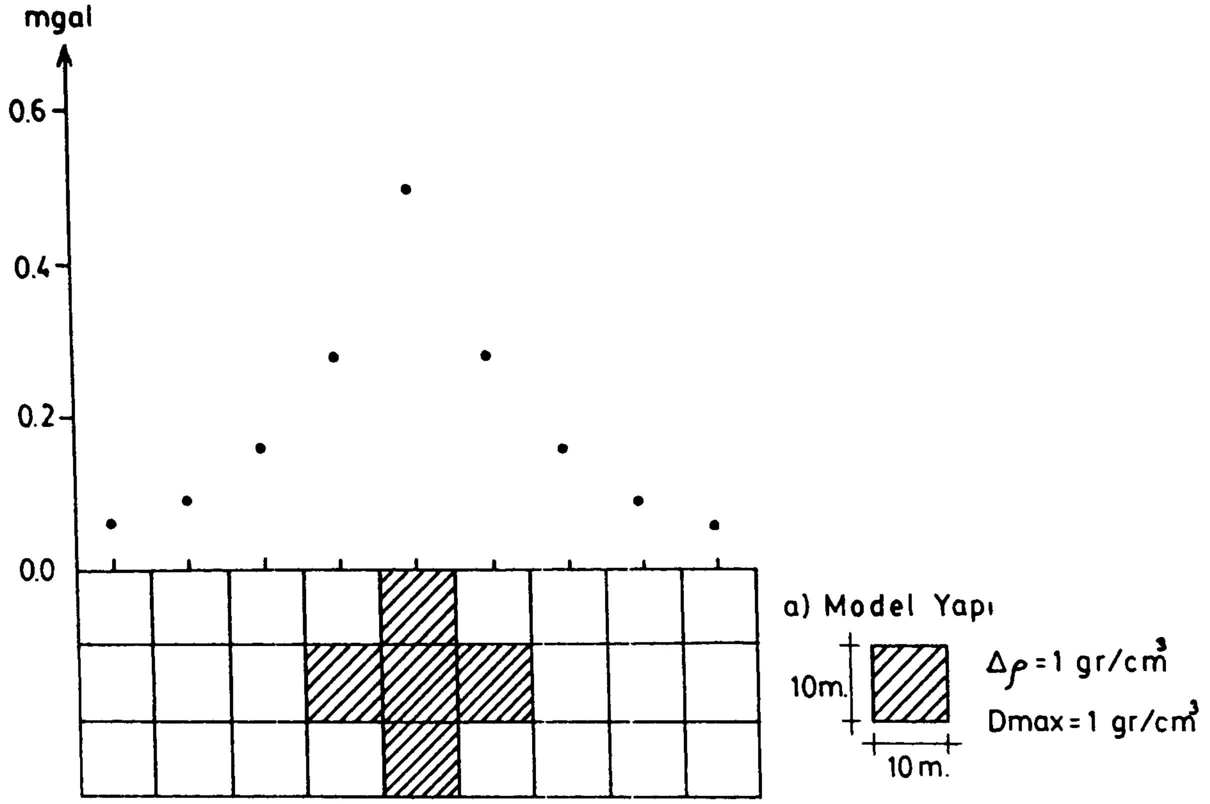
Şekil 9. Germencik (Aydın) residüel Bouguer gravite anomalisinin yoğunluk kısıtlamasız en küçük hacim yaklaşımıyla çözümü

Fig. 9. Interpretation of the residual Bouguer gravity anomaly of Germencik (Aydın) according to the minimum volume approach without density constraint



Şekil 10. Germencik (Aydın) residüel Bouguer gravite anomalisinin yoğunluk kısıtlamalı en küçük hacim yaklaşımıyla çözümü

Fig. 10. Interpretation of the residual Bouguer gravity anomaly of Germencik (Aydın) according to the minimum volume approach with density constraint



b) 1. Yineleme

-0.03	-0.02	0.06	0.27	1.36	0.27	0.06	-0.02	-0.03
0.03	0.07	0.16	0.34	0.50	0.34	0.16	0.07	0.03
0.06	0.10	0.16	0.24	0.29	0.24	0.16	0.10	0.06

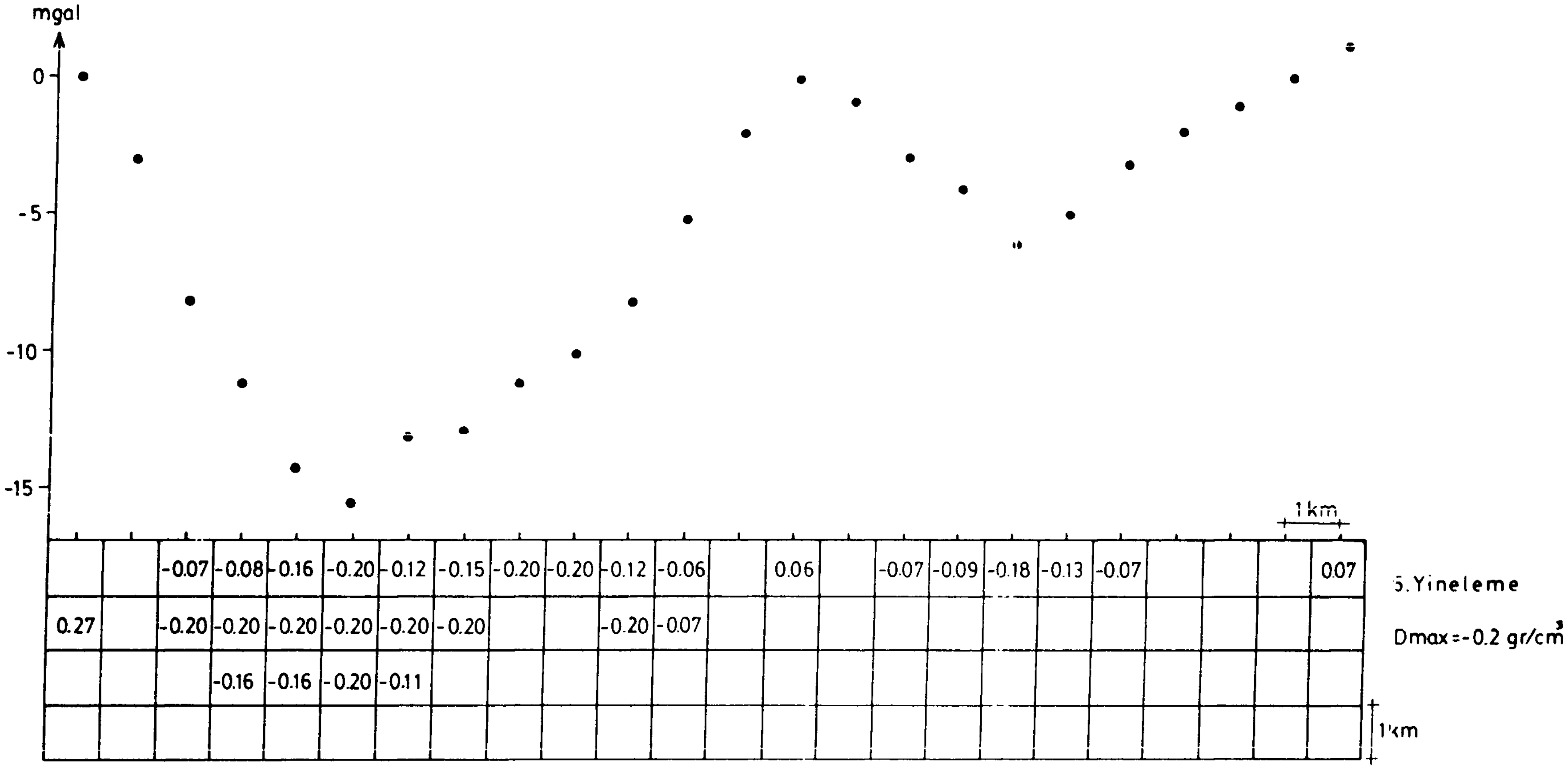
c) 4. Yineleme

		-0.01	-0.01	1.00	-0.02	-0.03	-0.02	-0.01
	-0.08	0.02	1.00	1.00	1.00	0.07	-0.01	
	0.02	0.13	0.14	0.59	0.24	0.01		

d) 7. Yineleme

				1.00				
			1.00	1.00	1.00			
				0.96				

Şekil 11. Yoğunluk kısıtlamalı kuramsal haç modelinin ağırlık merkezine göre çözümü
Fig. 11. Theoretical cross model example with density constraint according to the center of gravity approach



Şekil 12. Germencik (Aydın) residüel Bouguer gravite anomalisinin yoğunluk kısıtlamalı ağırlık merkezine göre çözümü
Fig. 12. Interpretation of the residual Bouguer gravity anomaly of Germencik (Aydın) according to the center of gravity approach

Yoğunluk kısıtlamalı ters çözüm uygulamasında ise, yapının yer aldığı bloklardaki yoğunluk farkı 0.2 gr/cm^3'ü aşmama koşulu ile kısıtlanmıştır. Kuramsal çalışmada olduğu gibi, 0.2 gr/cm^3'ü aşan blokların yoğunlukları dondurulmuş, gravite etkileri yineleme sırasında gözlem değerinden çıkarılarak sonuca ulaşılmak istenmiştir. Gözlenen anomali değerlerine uygulanan yöntem 6'ıncı yinelemede sonuca ulaşmış, Talwani modelleme çalışmasında olduğu gibi yapının derinliği 3 km. olarak saptanmıştır (Şekil 10).

SONUÇLAR

İki boyutlu yapıların yarattığı gravite anomalisini verebilecek yoğunluk dağılımları, alanın en küçük yapılması ve cismin ağırlık merkezi etrafında yoğunlaştırılması yöntemler kuramsal modeller üzerinde yoğunluk kısıtlamasız ve yoğunluk kısıtlamalı olması koşullarına göre irdelenmiştir. Kuramsal modellerde, her iki çözüm yöntemiyle tam bir sonuca ulaşılmıştır. Fakat yoğunluk kısıtlamalı durumda, sonuca daha az sayıda yineleme aşamasından sonra ulaşılmaktadır. Çözüme ulaşma ölçütü hakkında ayırımlılık matrisi kullanılarak bilgi edinilmektedir. Bilgisayar programının uzun zaman alması nedeniyle, kullanılacak arazi verisi ve blok sayısının sınırlı tutulması gerekmektedir.

Bu yöntemlerle elde edilecek yeraltı yoğunluk dağılımından sonra, herhangi bir bölgenin elde varolan jeolojik ve diğer bilgileri ışığında kuramsal modelleme yoluyla yorumuna gitmek daha kolay olacaktır. Ters çözüm yöntemleri tek başına sorunun yanıtı değildir. Burada amaç, belirli koşullar altında incelenen bölge hakkında ilk bilgileri ortaya koymaktır.

KAYNAKLAR

Al-Chalabi, M. 1971, Interpratation of gravity anomalies by non-linear optimisation, Geophysical Prospecting 20, 1-16.

Aydın, İ. 1987, Manyetik anomali veren kütlelerin düşey geometrisinin bulunması konusunda bir deneme, Jeofizik 1, 76-88.

Backus, G.E. and Gilbert, J.F. 1967, Numerical application of a formalism for geophysical inverse problems, Geophys. Jour. 13, 247-276.

Backus, G.E. and Gilbert, J.F. 1968, The resolving power of gross earth data, Geophys. Jour. 16, 169-205.

Backus, G.E. and Gilbert, J.F. 1970, Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A. 266, 123-192.

Bott, M.H.P. 1973, Inverse methods in the interpretation of magnetic and gravity anomalies, Methods in Computational Physics.

Cuer, M. and Bayer, R. 1980, Fortran routines for linear inverse problems, Geophysics 45, 1706-1719.

Fischer, N.J. and Howard, L.E. 1980, Gravity interpretation with the aid of quadratic programming, Geophysics 45, 402-419.

Green, W.R. 1975, Inversion of gravity profiles by use of Backus-Gilbert approach, Geophysics 40, 763-772.

Guillen, A. and Menichetti, V. 1984, Gravity and magnetic inversion with minimization of a specific functional, Geophysics 49, 1354-1360.

Jackson, D.D. 1972, Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data, Geophy. J. Roy. Astr. Soc. 28, 97-109.

Jackson, D.D. 1979, The use of priori data to resolve non-uniqueness in linear inversion, Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 57, 137-157.

Lanczoc, C. 1961, Linear Differantial Operators, D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey.

Last, B.J. and Kubik, K. 1983, Compact gravity inversion, Geophysics 48, 713-721.

Mottl, J. and Mottlova, L. 1972, Solution of the inverse gravity problem with the aid of integer linear programming, Geoexploration 10, 53-62.

Pedersen, L.B. 1977, Interpretation of potantial field data, a generalized inverse approach, Geophysical Prospecting 25, 199-230.

Pedersen, L.B. 1979, Constrained inversion of potantial field data, Geophysical Prospecting 27, 726-748.

Safon, C., Vasseur, G. and Cuer, M. 1977, Some applications of linear programming to the inverse gravity problem, Geophysics 42, 1215-1223.

Telford, W.M., Geldart, L.P., Sheriff, R.E. and Keys, D.A. 1976, Applied Geophysics, Cambridge University Press, Cambridge.

Wiggings, R.A. 1972, The general linear inverse problem: Implication of surface wave and free oscillations for earth structure, Rev. Geophys. and Space Phys. 10, 251-285.