Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi, 1 (1) (2011) 28-39

Poset Metriği İçin P-Tam Ağırlık Sayacı ve MacWilliams Özdeşliği

Seda Akbıyık, İrfan Şiap*

Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, Esenler, 34210 İstanbul
email: isiap@yildiz.edu.tr

Özet

Son zamanlarda ağırlıklı olarak poset metriğine bağlı lineer kodlar çalışılmaktadır. Poset metriği özel hal olarak iyi bilinen Hamming ile Rosenbloom-Tsfasman metriklerini içerir. Bu makalede, poset metriğine bağlı alternatif bir P-tam ağırlık sayacı tanımlanmaktadır. MacWilliams Özdeşliği ispat edilmekte ve aydınlatıcı bir örnek verilmektedir.

Anahtar Sözcükler: Poset metriği, ağırlık sayacı, MacWilliams özdeşliği

A P-Complete Weight Enumerator With Respect to Poset Metric and its MacWilliams Identity

Abstract

Recently linear codes with respect to the Poset metric have been studied intensively. Poset metric includes the well-known Hamming and Rosenbloom-Tsfasman metrics as special cases. Here, we define an alternative P-complete weight enumerator of linear codes with respect to poset metric. We establish a MacWilliams identity and conclude with an illustrative example.

Keywords: Poset metric, weight enumerator, MacWilliams identity

Giriş

Kodlama teorisi dijital (sayısal) mesajların gönderimi ya da depolanması esnasında meydana gelen hataları belirleme ve bunları düzeltmek için gerekli olan matematiksel teorileri sunmaktadır. Bilgilerin, kodlanması ile birlikte hataların meydana geliş şekillerine paralel olarak ağırlık ve uzaklık fonksiyonları tanımlanır. Bu uzaklık fonksiyonları yardımıyla gönderilen orijinal kodlanmış bilgi (kodsözler) ile alınan mesajlar arasındaki uzaklığa bağlı olarak dekodlama yapılmaktadır. En eski ve en çok uygulanan uzaklık fonksiyonlarından biri Hamming metriğidir. Ancak yukarıda vurgulandığı gibi bilgi gönderimlerindeki senaryolara paralel olarak farklı uzaklık fonksiyonları tanımlanır. Lineer kodlar ile dualleri arasında tanımlanan ağırlık sayaçları için çok önemli bir dönüşümü veren MacWilliams özdeşliği ilk olarak Hamming metriğine göre, sonraları ise diğer metriklere göre ispatlanmıştır. MacWilliams özdeşlikleri ayrıca literatürde tanımlanan yeni ağırlık sayaçları için de ispatlanmıştır. MacWilliams özdeşlikleri kodlama teorisinde önemli bir yere sahiptirler.

Son zamanlarda kodlama teorisi içinde birçok araştırma ve çalışma poset metriği üzerinde yapılmaktadır. Yakın zaman çalışmalarından biri olan [3] çalışmasında poset metriğine bağlı bir ağırlık sayacı tanımlanmış ve bu tanımlamaya paralel olarak aynı poset kullanıldığında dual kod için bunun bir problem teşkil ettiği bir örnek ile gösterilmiştir. Bu problemi aşmak için ise dual kod için dual poset kullanılmış ve buna paralel olarak MacWilliams özdeşliği ispatlanmıştır.

Bu makalede, [3] makalesinde tanımlanan ağırlık sayacı yerine tam ağırlık sayacı adını verdiğimiz posetin detaylarını daha iyi bir şekilde kullanan bir ağırlık sayacı tanımlanmış ve bundan faydalanarak dual poset kullanımına başvurulmadan MacWilliams özdeşliği ispatlanmıştır. Burada, [3] makalesinde ortaya çıkan probleme farklı bir çözüm sunulmaktadır. Ayrıca, tanımlanan bu yeni tam ağırlık sayacı sayesinde özel durumlarda çok iyi bilinen Hamming ile Rosenbloom-Tsfasman metriklerini de içerdiği gösterilmektedir.

Giriş kısmında verilen tarihçe ile çalışılan problemin motivasyonunu takiben, ikinci bölümde poset metriği ile diğer önemli tanımlar ve teoremler verilmektedir. Üçüncü bölümde ise makalenin ana teoremi ispatlanmakta ve elde edilen bu sonuç bir örnek üzerinde uygulanmaktadır. Son bölümde ise sonuçlar özetlenmekte ve ileriye dönük yapılabilecek çalışmalara işaret edilmektedir.

1. Poset Kavramı ve Temel Teoremler

Bu bölümde ana teoremin ispatında faydalanılacak temel kavramlar ve teoremler verilmektedir.

Tanım 1.1: A**,** boş olmayan bir küme olsun. Bir $\beta : A \times A \to A$ bağıntısı

- Yansıma $\left(\forall a \in A \, için \, a\beta a\right)$

- Ters Simetri $(\forall a,b\in A$ için $a\beta b$ ve $b\beta a \Rightarrow a=b)$
- Geçişme $(\forall a,b,c\in A\, için\; a\beta b\; ve\;\; b\beta c\;\; \Rightarrow a\beta c)$

özelliklerini sağlıyorsa β bağıntısına sıralama bağıntısı denir.

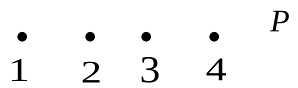
Bir sıralama bağıntısında herhangi iki eleman karşılaştırılabiliyorsa bu sıralama bağıntısına *tam sıralama bağıntısı*; bazı elemanlar karşılaştırılamıyorsa bu bağıntıya *kısmi sıralama bağıntısı* denir.

Bir A kısmi sıralı kümesi ya da poseti (partially ordered set) üzerinde tanımlı bağıntı, genel olarak $\leq$ bağıntı sembolü kullanılarak ifade edilir.

Tanım 1.2: Sıralı bir kümenin tam sıralı bir alt kümesine bir *zincir (chain)* denir.

Örnek 1.1: Herhangi iki elemanı birbiriyle kıyaslanamayan yani tüm zincirleri 1boyutlu olan küme bir posettir. Bu posete aşikâr (trivial) poset denir ve $P(1,1,...,1)$ ile gösterilir.

$\{1,2,3,4\}$ elemanları ile aşikar poset



şeklindedir.

Tanım 1.3 $[1]$**:** $P(n_1,n_2,...,n_s)=\{(i,j):1\leq i\leq s, 1\leq j\leq n_i\}$ poseti, sırasıyla $n_1,n_2,...,n_s$ boyutlu s tane farklı $N_1,N_2,...,N_s$ zincirlerinden oluşsun. I, $[n]=\{1,2,...,n\}$ kümesinin bir alt kümesi olmak üzere her $x\in I$ için $y\leq x$ iken $y\in I$ oluyorsa I kümesine bir *ideal* denir.

Alternatif Tanım 1.4: Bir P posetinin bir *ideal*i her i için N_i nin elemanlarının yani x_i özel elemanının altındaki elemanların oluşturduğu alt kümedir.

P, n elemanlı, $\leq$ bağıntısı ile tanımlanan bir poset olsun. Eğer $A\subseteq P$ ise $\langle A\rangle$, A kümesinin ürettiği ideal denir ve ayrıca A kümesini içeren P nin ideallerinin arakesitidir.

Tanım 1.5 $[6]$**:** Bir $P=([n],\leq)$ posetinde $[n]=\mathop{\dot{\bigcup}}\limits_{l=1,2,\ldots,h} H_l$ şeklinde parçalanabiliyorsa ve herhangi $i\in H_{l_i}$, $j\in H_{l_j}$ $(i\neq j)$ için $i\leq j$ iken $l_i\leq l_j$ sağlanıyorsa P posetine hiyerarşik poset denir.

Poset-uzaklığı ve Poset-ağırlığı

$\mathbf{Z}_2=\{0,1\}$ sonlu cismini alalım. $\mathbf{Z}_2^n$ ise $\mathbf{Z}_2$ cisminin kartezyen çarpım kümesi olsun.

Tanım 1.6 $[5]$**:** $\mathbf{Z}_2^n$ vektör uzayının bir C alt vektör uzayına n uzunluğunda bir *lineer ikili kod*; C lineer kodun elemanlarına (vektörlerine) *kodsöz*; eğer C, $\mathbf{Z}_2^n$ nin k boyutlu bir alt uzayı ise C lineer koduna bir $[n,k]_2$ *lineer kod* denir.

Tanım 1.7 $[1]$**:** $\mathbf{Z}_2^n$ vektör uzayında keyfi bir eleman $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ için bir $P=([n]=\{1,2,\ldots,n\},\leq)$ poseti verilsin. x vektörünün sıfırdan farklı yerlerinin indis kümesi kısaca $\operatorname{supp}(x)=\{i: x_i\neq 0\}$ ile gösterilmek üzere x vektörün *Poset-ağırlığı (P-ağırlık)* $w_P(x)=|\langle\operatorname{supp}(x)\rangle|$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.8 $[1]$**:** $\mathbf{Z}_2^n$ vektör uzayında alınan herhangi iki vektör $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ olmak üzere bunlar arasındaki *Poset-uzaklık (P-uzaklık)* $d_P(x,y)=w_P(x-y)$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.9 $[1]$**:** $\mathbf{Z}_2^n$ üzerindeki $d_P(.,.)$ metriğine bir *poset-metrik* denir. Eğer $\mathbf{Z}_2^n$ bir poset-metrik ile verilirse $\mathbf{Z}_2^n$ nin bir C alt kümesine *poset-kod* denir.

Önerme 1.1 $[1]$**:** Eğer P, n elemanlı bir poset ise *P-uzaklık* $d_P(.,.)$, $\mathbf{Z}_2^n$ üzerinde bir metriktir.

Tanım 1.10 $[4]$**:** x ve y, n uzunluklu bir A alfabesinden alınmış iki söz olsun. Bu iki söz arasındaki *Hamming uzaklık* birbirlerinden farklı yerlerin sayısı olarak tanımlanır. Eğer

$x = x_1, x_2, ..., x_n$ ve $y = y_1, y_2, ..., y_n$ ise x_i ve y_i lerin her biri bir uzunluklu söz gibi düşünülür ve böylece $d(x,y) = d(x_1,y_1)+...+d(x_n,y_n)$ ve $d(x_i,y_i) = \begin{cases} 1, x_i \neq y_i \\ 0, x_i = y_i \end{cases}$ dir.

x, $\mathbf{Z}_2^n$ nin herhangi bir sözü olsun. Bu sözün *Hamming ağırlığı* sıfırdan farklı yerlerin sayısı olarak tanımlanır ve $w(x)$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle $w(x) = d(x,0)$ dir.

Not 1.1: Eğer P, 1boyutlu, $n$zincirden oluşan bir aşikar poset ise *P-ağırlık* ve *P-uzaklık* sırasıyla *Hamming ağırlık* ve *Hamming uzaklıktır* (Bkz: Örnek 3.2).

Not 1.2: Eğer P, $n$boyutlu 1zincirden oluşursa *P-ağırlık* ve *P-uzaklık* sırasıyla *RT-ağırlık* ve *RT-uzaklıktır* (Bkz: Örnek 3.2).

Tanım 1.11 $[4]$**:**

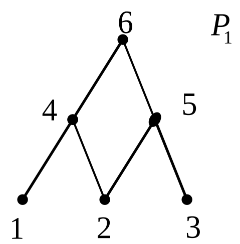
i. $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ve $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$, $\mathbf{Z}_2^n$ den alınmış herhangi iki vektör olsunlar. Bu durumda bu iki vektörün iç çarpımı $\langle v, w\rangle = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + ... + v_n \cdot w_n$ şeklinde tanımlanır.

ii. Herhangi $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbf{Z}_2^n$ için $\langle v, w\rangle = 0$ ise bu iki vektör diktir denir.

iii. S, $\mathbf{Z}_2^n$ nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. S nin *dual*i $S^{\perp} = \{v \in \mathbf{Z}_2^n \mid \langle v, s\rangle = 0, \forall s \in S\}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.2:

i.



Yandaki şekilde, 3seviyeden oluşan 6 uzunluklu P_1 poseti üzerinde tanımlı $C_1 = \{000000, 100101, 001011, 101110\}$ ve $C_2 = \{000000, 100001, 010110, 110111\}$ lineer $P-$kodların kodsözlerinin ağırlıklarını ve posetteki her elemanın ürettiği ideali inceleyelim.

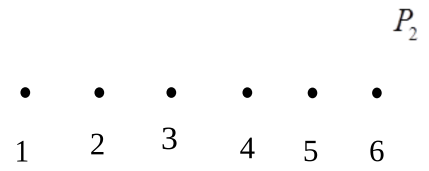
$\langle 1\rangle = \{1\}$, $\langle 2\rangle = \{2\}$, $\langle 3\rangle = \{3\}$, $\langle 4\rangle = \{1,2,4\}$, $\langle 5\rangle = \{2,3,5\}$, $\langle 6\rangle = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\forall u \in C_1$ için $w_{P_1}(u)$ hesaplayalım: $w_{P_1}(000000) = 0$ $w_{P_1}(100101) = 6$ $w_{P_1}(001011) = 6$ $w_{P_1}(101110) = 5$

Benzer şekilde ; $\forall u \in C_2$ için $w_{P_1}(u)$hesaplayalım:

$w_{P_1}(000000)=0$ $w_{P_1}(100001)=6$ $w_{P_1}(010110)=5$ $w_{P_1}(110111)=6$

ii.



i. deki C_1 ve C_2 kodları yandaki 6 uzunluklu aşikar poset üzerinde inceleyelim:

$\langle 1\rangle=\{1\}$, $\langle 2\rangle=\{2\}$, $\langle 3\rangle=\{3\}$,
$\langle 4\rangle=\{4\}$, $\langle 5\rangle=\{5\}$, $\langle 6\rangle=\{6\}$

$\forall u \in C_1$ için $w_{P_2}(u)$ hesaplayalım:

$w_{P_2}(000000)=0=w_H(000000)$ $w_{P_2}(100101)=3=w_H(100101)$

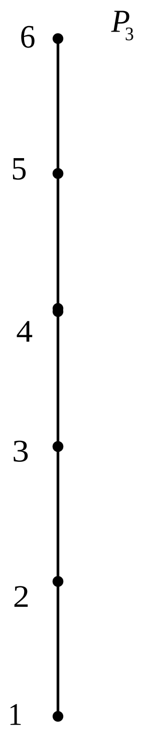
$w_{P_2}(001011)=3=w_H(001011)$ $w_{P_2}(101110)=4=w_H(101110)$

Benzer şekilde; $\forall u \in C_2$için $w_{P_2}(u)$hesaplayalım:

$w_{P_2}(000000)=0=w_H(000000)$ $w_{P_2}(100001)=2=w_H(100001)$
$w_{P_2}(010110)=3=w_H(010110)$ $w_{P_2}(110111)=5=w_H(110111)$

Not 1.3: Bu örnekteki poset ağırlığı Hamming ağırlığına denktir.

iii.



i. deki kodları yandaki P_3 poseti üzerinde inceleyelim:

$$\langle 1\rangle=\{1\},\langle 2\rangle=\{1,2\},\langle 3\rangle=\{1,2,3\},\langle 4\rangle=\{1,2,3,4\},$$
$$\langle 5\rangle=\{1,2,3,4,5\},\langle 6\rangle=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

$\forall u\in C_1$ için $w_{P_3}(u)$ hesaplayalım.

$w_{P_3}(000000)=0=w_{RT}(000000)$

$w_{P_3}(100101)=6=w_{RT}(100101)$ $w_{P_3}(001011)=6=w_{RT}(001011)$

$w_{P_3}(101110)=5=w_{RT}(101110)$ $w_{P_3}(100101)=6=w_{RT}(100101)$ dir. Şimdi $\forall u\in C_2$ için $w_{P_3}(u)$ hesaplayalım.

$w_{P_3}(000000)=0=w_{RT}(000000)$, $w_{P_3}(100001)=6=w_{RT}(100001)$,

$w_{P_3}(010110)=5=w_{RT}(010110)$, $w_{P_3}(110111)=6=w_{RT}(110111)$ dir.

Not 1.4: Bu örnekteki poset ağırlığı ise Rosenbloom-Tsfasman ağırlığına denktir.

Tanım 1.12: Bir $P=([n],\leq)$ posetinde herhangi i,j,k elemanları için $i\leq j$ ve $k\leq j$ iken $i\leq k$ ya da $k\leq i$ sağlanıyorsa bu posete *ayrık zincirli poset (discrete chain poset)* denir.

Not 1.5: Çalışmanın buradan sonraki bölümü ayrık zincirli posetler üzerinde yapılmıştır. Aşağıda Örnek 3.1 de ayrık zincirli bir poset örneği verilmektedir.

2. Poset Metriğine Göre Kodlarda Ağırlık Sayaçları ve MacWilliams Özdeşliği

MacWilliams Özdeşliğini ispatlamadan önce ispat sürecinde önemli bir rol oynayacak olan aşağıdaki önerme sunulacaktır:

Önerme 2.1: C, $[n,k,d]$ parametrelerine sahip, n uzunluklu s tane seviyeden oluşan bir ayrık zincirli P poseti üzerinde ikili bir poset-kod olsun. C nin kodsözleri $u^{(i)}$ ile gösterilsin.

$u_i^{(i)}$: $u^{(i)}$ kodsözünün i. seviyedeki parçasını,

v_i: $v\in\mathbf{Z}_2^{\,n}$ nin i. seviyedeki parçasını,

$n_{u_i^{(i)}}$: $u^{(i)}$ kodsözünün i. seviyedeki parçasının uzunluğunu

göstermek üzere;

$$\sum_{v\in \mathbf{Z}_2^n} (-1)^{\langle u,v\rangle}\cdot z_i^{w_H(v_i)} = \begin{cases} (1+z_i)^{n_{u_i^{(i)}}}\cdot(1-z_i)^0, & w_H\left(u_i^{(i)}\right)=0 \\ (1+z_i)^{n_{u_i^{(i)}}-1}\cdot(1-z_i)^1, & w_H\left(u_i^{(i)}\right)=1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ (1+z_i)^0\cdot(1-z_i)^{n_{u_i^{(i)}}}, & w_H\left(u_i^{(i)}\right)=n_{u_i^{(i)}} \end{cases}$$

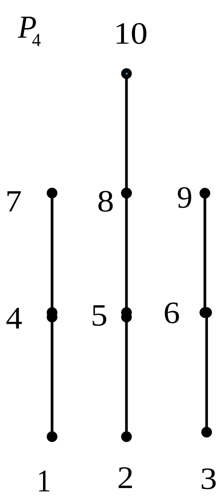
dir.

Önerme 2.2 $[5]$**:** $u\in C\subseteq \mathbf{Z}_2^n$ ve $\chi_u(v)=(-1)^{\langle u,v\rangle}$ olmak üzere $v\notin C^{\perp}$ ise $\sum_{u\in C}\chi_u(v)=0$ ve $v\in C^{\perp}$ ise $\sum_{u\in C}\chi_u(v)=|C|$ dir.

Önerme 2.3 $[2]$**:** C, $\mathbf{Z}_2$ üzerinde tanımı bir kod ve $f:\mathbf{Z}_2^n\to \mathbb{C}[z_1,z_2,...,z_s]$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\tilde{f}(u)=\sum_{v\in\mathbf{Z}_2^n}(-1)^{\langle u,v\rangle}\cdot f(v),\ u\in\mathbf{Z}_2^n$ olmak üzere $\sum_{v\in C^{\perp}} f(v)=\frac{1}{|C|}\cdot\sum_{u\in C}\tilde{f}(u)$ dir.

Tanım 2.1: C, $\mathbf{Z}_2^n$ üzerinde, n uzunluklu s tane seviyeden oluşan ayrık zincirli P poseti ile bir lineer poset-kod olsun. C $P-$kodunun $P-$tam ağırlık sayacı $W_C(z_1,z_2,...,z_s)=\sum_{u\in C}\prod_{i=1}^{s} z_i^{w_P(u_i)}=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s} z_i^{w_P\left(u_j^{(i)}\right)}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1:



Yandaki 10 uzunluklu 4 seviye ve 3 ayrık zincirden oluşan ayrık zincirli P_4 posetine göre; $C=\{0000000000, 1010101010, 0101010101, 1111111111\}$ lineer $P-$kodun $P-$tam ağırlık sayacı, $W_C(z_1,z_2,z_3,z_4)=1+z_1^2z_2z_3^2+z_1z_2^2z_3z_4+z_1^3z_2^3z_3^3z_4$ dir.

Teorem 2.1: (Poset Metriğine Göre MacWilliams Özdeşliği)

C, $\mathbf{Z}_2^{\,n}$ üzerinde, n uzunluklu s tane seviyeden oluşan ayrık zincirli P poseti ile bir lineer poset-kod olsun. $W_C(z_1, z_2, ..., z_s)$ ile C kodun $P-$ tam ağırlık sayacını; $W_{C^\perp}(z_1, z_2, ..., z_s)$ ile $C^\perp$ nin $P-$tam ağırlık sayacını gösterelim. Bu durumda $W_{C^\perp}(z_1, z_2, ..., z_s) = \frac{1}{|C|} \cdot \prod_{i=1}^{s} (1+z_i)^{n_i} \cdot W_C\left(\frac{1-z_1}{1+z_1}, \frac{1-z_2}{1+z_2}, ..., \frac{1-z_s}{1+z_s}\right)$ dir.

İspat:

Önerme 2.3 ü uygulamak amacıyla

$f(v) = z_1^{w_H(v_1)} \cdot z_2^{w_H(v_2)} \cdot ... \cdot z_s^{w_H(v_s)} = \prod_{i=1}^{s} z_i^{w_H(v_i)}$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda Önerme 2.1 ve Önerme 2.2 den,

$$\tilde{f}(u) = \sum_{v \in \mathbf{Z}_2^{\,n}} (-1)^{\langle u,v \rangle} \cdot f(v)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(u) = \sum_{v \in \mathbf{Z}_2^{\,n}} (-1)^{\langle u,v \rangle} \cdot \prod_{i=1}^{s} z_i^{w_H(v_i)}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(u) = \sum_{v_1 \in \mathbf{Z}_2^{\,n_1}} \cdots \sum_{v_s \in \mathbf{Z}_2^{\,n_s}} \cdot (-1)^{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(u_{ij}v_{ij})} \cdot \prod_{i=1}^{s} z_i^{w_H(v_i)}$$

$$= \sum_{v_1 \in \mathbf{Z}_2^{\,n_1}} \cdots \sum_{v_s \in \mathbf{Z}_2^{\,n_s}} \prod_{i=1}^{s} (-1)^{\sum_{j=1}^{n_i}(u_{ij}v_{ij})} \cdot z_i^{w_H(v_i)}$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{v_i \in \mathbf{Z}_2^{\,n_i}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n_i}(u_{ij}v_{ij})} \cdot z_i^{w_H(v_i)} \right) = \prod_{i=1}^{s} (1+z_i)^{n} \cdot \left(\frac{1-z_i}{1+z_i} \right)^{w_H(u_i)}$$ elde edilir.

Tekrar, Önerme 2.3 ten

$$\sum_{u \in C^\perp} f(u) = \frac{1}{|C|} \cdot \sum_{u \in C} \tilde{f}(u) = \frac{1}{|C|} \cdot \sum_{u \in C} \prod_{i=1}^{s} (1+z_i)^{n} \cdot \left(\frac{1-z_i}{1+z_i} \right)^{w_H(u_i)}$$

$$\Rightarrow W_{C^\perp}(z_i) = \frac{1}{|C|} \cdot \prod_{i=1}^{s} (1+z_i)^{n_i} \cdot W_C\left(\frac{1-z_i}{1+z_i} \right)$$

bulunur. ■

Aşağıdaki örnekte ana teoremin uygulaması verilmektedir:

Örnek 2.2: Örnek 2.1' deki C kodun aynı örnekteki ayrık zincirli P_4 posetine göre dualinin ağırlık dağılımını MacWilliams özdeşliğini kullanarak bulalım. İlk olarak, kodun $P-$tam ağırlık sayacı $W_C\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)=1+z_1^2z_2z_3^2+z_1z_2^2z_3z_4+z_1^3z_2^3z_3^3z_4$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $C^{\perp}$ dual kodun ağırlık sayacı, teorem uygulandığında;

$$W_{C^{\perp}}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(1+z_1\right)^3\cdot\left(1+z_2\right)^3\cdot\left(1+z_3\right)^3\cdot\left(1+z_4\right)\cdot W_C\left(\frac{1-z_1}{1+z_1},\frac{1-z_2}{1+z_2},\frac{1-z_3}{1+z_3},\frac{1-z_4}{1+z_4}\right)$$

$$\begin{aligned}
&=1+z_1^2+4z_1z_2+2z_1^3z_2+z_2^2+5z_1^2z_2^2+2z_1z_2^3+5z_1z_3+z_1^3z_3+4z_2z_3+14z_1^2z_2z_3\\
&+13z_1z_2^2z_3+5z_1^3z_2^2z_3+2z_2^3z_3+4z_1^2z_2^3z_3+z_3^2+5z_1^2z_3^2+14z_1z_2z_3^2+4z_1^3z_2z_3^2\\
&+5z_2^2z_3^2+13z_1^2z_2^2z_3^2+4z_1z_2^3z_3^2+2z_1^3z_2^3z_3^2+z_1z_3^3+z_1^3z_3^3+2z_2z_3^3+4z_1^2z_2z_3^3\\
&+5z_1z_2^2z_3^3+z_1^3z_2^2z_3^3+2z_1^2z_2^3z_3^3+z_1z_4+z_1^3z_4+2z_4z_2+4z_1^2z_2z_4+5z_1z_2^2z_4+z_1^3z_2^2z_4\\
&+2z_1^2z_2^3z_4+z_3z_4+5z_1^2z_3z_4+14z_1z_2z_3z_4+4z_1^3z_2z_3z_4+5z_2^2z_3z_4+13z_1^2z_2^2z_3z_4+4z_1z_2^3z_3z_4\\
&+2z_1^3z_2^3z_3z_4+5z_1z_3^2z_4+z_1^3z_3^2z_4+4z_2z_3^2z_4+14z_1^2z_2z_3^2z_4+13z_1z_2^2z_3^2z_4+5z_1^3z_2^2z_3^2z_4\\
&+2z_2^3z_3^2z_4+4z_1^2z_2^3z_3^2z_4+z_3^3z_4+z_1^2z_3^3z_4+4z_1z_2z_3^3z_4+2z_1^3z_2z_3^3z_4+z_2^2z_3^3z_4+5z_1^2z_2^2z_3^3z_4\\
&+2z_1z_2^3z_3^3z_4
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç

$[1]$ ve $[3]$ te n uzunluklu bir poset üzerinde ideal " I, P nin bir ideali ise $\forall a\in I$ için $b\leq a$ ise $b\in I$ " olarak ve $C\subseteq \mathrm{F}_q^{\,n}$ lineer $P-$kodu için $\operatorname{supp}(u)=\{i\mid u_i\neq 0\}$ olmak üzere $w_P(u)=\left|\langle\operatorname{supp}(u)\rangle\right|$ öyle ki; $\langle\operatorname{supp}(u)\rangle$ $u\in C$ nin support kümesini içeren en küçük ideali ve $P-$ağırlık sayacı $W_{C,P}(x)=\sum_{u\in C}x^{w_P(u)}=\sum_{i=0}^{n}A_{i,P}\cdot x^i$ $A_{i,P}=\left|\{u\in C\mid w_P(u)=i\}\right|$ olarak tanımlanmıştı. $[3]$ te verilen aşağıdaki örnekle ağırlık dağılımları aynı olan iki farklı kodun, duallerinin ağırlık dağılımlarının farklı olabileceğinden bahsedilmiş; bu durumda $\overline{P}-$dual poset tanımına ihtiyaç duyulmuş ve posetlere MacWilliams özdeşliğinin uygulanabilirliği tartışılmıştır.

$[3]$ te sözü edilen örneği burada inceleyelim: $P=\{1,2,3\}, 1<2<3$ bağıntısı ile bir poset olsun. Bu durumda $\overline{P}=\{1,2,3\}, 1>2>3$ bağıntısı ile P posetinin dual poseti olur. $C_1=\{000,001\}, C_2=\{000,111\}$ kodlarını inceleyelim. $W_{C_1,P}(x)=1+x^3=W_{C_2,P}(x)$ dir.

Sırasıyla bu kodların dual kodları; $C_1^{\perp}=\{000,100,010,110\}, C_2^{\perp}=\{000,110,101,011\}$ dir. $C_1^{\perp}$ ve $C_2^{\perp}$ kodların $P-$ağırlık sayaçları $W_{C_1^{\perp},P}(x)=1+x+2x^2$ ve $W_{C_2^{\perp},P}(x)=1+x^2+2x^3$ iken $\overline{P}-$ağırlık sayaçları $W_{C_1^{\perp},\overline{P}}(x)=1+x^2+2x^3=W_{C_2^{\perp},\overline{P}}(x)$ dir.

$[3]$ e göre bir posetin MacWilliams özdeşliği uygulanabilir olması için posetin *hiyerarşik poset* olması gerekiyor.

Örnek 2.1 deki P_1 poseti hiyerarşik olmayan bir posettir. Bu nedenle MacWilliams özdeşliği uygulanabilir bir poset değildir. Gerçekten; aynı örnekteki C_1 ve C_2 lineer $P-$kodların P_1 poseti üzerindeki $P-$ağırlık sayaçları $W_{C_1,P_1}(x)=1+x^5+2x^6=W_{C_2,P_1}(x)$ dir. Öte yandan

$$C_1^{\perp}=\begin{Bmatrix}000000,010000,100100,001010,110100,011010,111001,101001,\\101110,001101,100011,111110,110011,000111,010111,011011\end{Bmatrix}$$

ve

$$C_2^{\perp}=\begin{Bmatrix}000000,001000,010100,010010,100001,011100,011010,101001,\\000110,110101,110011,001110,111011,111101,100111,101111\end{Bmatrix}$$

dir. Buna göre $C_1^{\perp}$ ve $C_2^{\perp}$ kodların $P-$ağırlık sayaçları $W_{C_1^{\perp},P_1}(x)=1+x+2x^2+7x^3+5x^4+x^5$ ve $W_{C_2^{\perp},P_1}(x)=1+x+4x^2+4x^3+3x^4+3x^5$ dir. Diğer bir ifadeyle birbirinden farklı, ağırlık dağılımları aynı olan iki kodun duallerinin ağırlık dağılımları farklı olduğundan P_1 poseti MacWilliams özdeşliği uygulanabilir bir poset değildir.

Bu çalışmada posetlerin bir özel ailesi olan ayrık zincirli posetler ve bunlara bağlı seviye kavramı ön plana çıkarılmış ve her bir seviyeye $(z_1, z_2, ..., z_s)$ şeklinde değişkenler atanarak $[3]$ de karşılaşılan sorun ortadan kaldırılmıştır.

Öte yandan bu çalışmada tanımlanan ağırlık sayacı sayesinde ayrık zincirli posetlerin geometrisini elde edebiliyoruz. Ancak seviyelerle işaretli elemanın yerleşimi göz ardı ediliyor. Dolayısıyla poset şema geometrisinin rol oynadığı uygulamalarda bu ağırlık sayacı çözüm sunmaktadır.

Örnek 1.2 de verilen kodların, P_1 poseti üzerinde ağırlık dağılımları $W_{C_1}^{(P_1)}(z_1,z_2,z_3)=1+2z_1z_2z_3+z_1^2z_2^2$ ve $W_{C_2}^{(P_1)}(z_1,z_2,z_3)=1+z_1z_3+z_1z_2^2+z_1^2z_2^2z_3$ dir. Buna göre; seviyelerle tanımlanan MacWilliams özdeşliği uygulanarak duallerinin ağırlık dağılımları;

$$W_{C_1^{\perp}}^{(P_1)}(z_1,z_2,z_3)=\frac{1}{4}\cdot(1+z_1)^3(1+z_2)^2(1+z_3)\cdot W_{C_1}^{(P_1)}\left(\frac{1-z_1}{1+z_1},\frac{1-z_2}{1+z_2},\frac{1-z_3}{1+z_3}\right)$$

$$=1+2z_1z_2z_3+z_1z_2^2z_3+2z_1^2z_2z_3+2z_1z_2+z_1^3z_2^2+z_1^2z_2^2+z_2^2z_3+z_1^3z_3+z_1^2z_3+2z_1^2z_2+z_1$$

ve

$$W_{C_2^{\perp}}^{(P_1)}(z_1,z_2,z_3)=\frac{1}{4}\cdot(1+z_1)^3(1+z_2)^2(1+z_3)\cdot W_{C_2}^{(P_1)}\left(\frac{1-z_1}{1+z_1},\frac{1-z_2}{1+z_2},\frac{1-z_3}{1+z_3}\right)$$

$$=1+z_1+z_1z_2^2+2z_1^2z_2+z_1^2z_3+z_2^2+2z_1z_2+z_1z_3+z_1z_2^2z_3+2z_1^2z_2z_3+2z_1^3z_2z_3+z_1^2z_2^2z_3$$

olarak hesaplanır.

Bu yeni yaklaşıma paralel olarak posetler üzerinde yapılan çalışmaların tekrar incelenmesi şu anda yazarların üzerinde durduğu çalışmalardandır.

Kaynaklar

[1] R. A. Brualdi, J. Graves, K. M. Lawrence, *Codes with a poset metric*, *Disc. Math.*, Dec. 1995, **147**, 57.

[2] F. J. MacWilliams, N. J. Sloane, *The Theory of Error- Correcting Codes*, Amsterdam, The Netherlands: North- Holland, 1977.

[3] H.K. Kim, D.Y. Oh, *A Classification of Posets Admitting the MacWilliams Identity*, *IEEE*, 2005, **51**, 1424.

[4] S. Ling, C. Xing, *Coding Theory A First Course.* National University of Singapore, Cambridge University Pres, 2004.

[5] W.C. Huffman, V. Pless, *Fundamentals of Error-Correcting Codes*, Cambridge University Press, 2003.

[6] M. Firer, L. Panek, L. Rifo, *Coding in the Presence of Semantic Value of Information: Unequal Error Protection Using Poset Decoders*, arXiv: 1102.3832v1, 17 Aug 2011.