

Küçük Örneklerde Bartlett ve Levene Test İstatistiklerinin I. Tip Hata Bakımından İncelenmesi

Sıddık KESKİN¹

Fikret GÜRBÜZ¹

Geliş Tarihi: 05.07.2001

Özet: Bu çalışmada, Bartlett ve Levene test istatistiklerinin I. Tip hata bakımından incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla; normal dağılım $N(0,1)$ gösteren popülasyondan 3 ve 4 gruplu örnekler alınmış ve örnek genişliği her grupta eşit olacak şekilde 2' den başlatılarak 30' a kadar artırılmıştır. Bu örneklerde karşılaştırılan I. Tip hata; $\alpha = 0.50, 0.25, 0.20, 0.15, 0.10, 0.05$ ve 0.01 olduğunda, Bartlett ve Levene test istatistikleri için gerçekleşen I. Tip hatalar ampirik olarak elde edilmiştir. Bunun için her örnek genişliğinde 100000 deneme yapılmıştır. Buna ilaveten $\alpha = 0.05$ ve 0.01 'deki Bartlett ve Levene istatistiklerinin kritik değerleri de belirlenmiştir. Bu değerlerin belirlenmesi için 1000000 deneme yapılmıştır. Sonuçta, Bartlett testinin I. Tip hata bakımından daha iyi olduğu vurgulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bartlett testi, Levene testi, I. Tip hata, varyansların homojenliği

The Investigation of Bartlett and Levene' s Test Statistics in Terms of Type I Error Rates in Small Samples

Abstract : In this study, it was aimed that the investigation of Bartlett and Levene' s test statistics in terms of Type I error rates ($\alpha = 0.50, 0.25, 0.20, 0.15, 0.10, 0.05$ and 0.01) in small samples. For this, samples had 3 and 4 treatment groups were drawn from a normal $N(0.1)$ population and balanced (equal) sample sizes were increased from 2 to 30. In these samples, Type I error rates were obtained empirically. In order to obtain Type I error rates, 100000 replications were done for each sample sizes. In addition, the critical values of Bartlett and Levene' s test statistics at $\alpha = 0.05$ ve 0.01 Type I error levels were obtained from 1000000 replications for each sample sizes. As a result, it was emphasised that Bartlett' s test is better

Key Words : Bartlett' s test, Levene' s test, Type I error, homogeneity of variance

Giriş

Varyans analizi tekniği ilk olarak 1920'li yıllarda Fisher tarafından geliştirilmiş olan ve bir çok alanda, özellikle de Biyolojide yaygın olarak kullanılan bir tekniktir. Varyans analizi esasında, toplam varyasyonu (Kareler Toplamını) üzerinde durulan özellik için etkili olabileceği düşünülen faktör veya faktörlerin yer aldığı modele göre unsurlarına (bileşenlerine) ayıran bir tekniktir. Ancak varyans analizinden elde edilecek sonuçların doğru ve güvenilir olabilmesi için bir takım ön şartların (varsayımların) yerine gelmiş olması gerekmektedir. Bu ön şartlar; gözlemlerin bağımsızlığı, gözlemlerin normal dağılım göstermesi, etkilerin eklenebilirliği ve varyansların homojenliğidir. Bu ön şartların yerine gelmediği durumlarda, varyans analizi tekniği uygulanacak olursa; I. Tip hata, yani gerçekte kabul edilmesi gereken H_0 hipotezinin test sonucunda ret edilmesi olasılığı değişecektir. Bu nedenle istatistikte bir çok çalışma, bu ön şartlar üzerinde yoğunlaşmıştır.

Bu ön şartlardan hangisinin yerine gelmediğinde I. Tip hatanın ne kadar değişeceğini belirlemeye çalışmak kadar, bu ön şartların yerine gelip gelmediğine karar vermek için hangi şartlarda hangi testin kullanılacağını

belirlemek de önemlidir. Varyans analizi tekniğinin ön şartlarından normal dağılım ön şartı, I. Tip hatayı özellikle gruplardaki gözlem sayıları eşit olduğu zaman çok fazla etkilememektedir. Buna karşılık, varyansların homojenliği ön şartı, I. Tip hatayı daha çok etkilemektedir (Bishop ve Dudewicz 1978). Bu nedenle; varyansların homojen olup olmadıklarını belirlemeye yönelik, bir çok test yöntemi geliştirilmiştir. Bu test yöntemlerinden yaygın olarak kullanılanlar arasında; Bartlett testi, Levene testi, Cochran testi, ve Hartley testi sayılabilir. Cochran ve Hartley testlerinin gruplarda eşit sayıda gözlem olduğu durumlarda kullanılması gerektiği dikkate alınırca, en yaygın kullanılan testlerin Bartlett ve Levene testleri olduğu söylenebilir. Bunun yanı sıra; yaygın olarak kullanılan istatistik paket programlarında da çoğunlukla bu testler bulunmaktadır.

Bu çalışmada; özellikle uygulamada daha sık karşılaşılan, gruplarda az sayıda gözlem olduğu durumlarda, diğer bir ifade ile örnek genişliğinin küçük olduğu çalışmalarda; Bartlett ve Levene testlerinin I. Tip hata bakımından incelenmesi yapılmıştır. Ayrıca, bu istatistikler için $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ seviyesinde kritik değerler de belirlenmiştir.

¹ Ankara Üniv. Ziraat Fak. Zootekni Bölümü-Ankara

Materyal ve Metot

Bu çalışmanın materyalini, IMSL LIBRARY desteği ve FORTRAN programlama dilinde yazılmış simülasyon programı ile üretilen tesadüf sayıları oluşturmaktadır. Bu tesadüf sayıları normal dağılım gösteren populasyondan N (0,1) üretilmiştir. Grup sayısı uygulamalarda daha sık karşılaşılan 3 ve 4 grup ile sınırlı tutulmuştur. Gruplardaki gözlem sayıları, her grupta eşit olmak üzere, 2' den başlatılarak 30' a kadar artırılmıştır. Gözlem sayısının her farklı durumu için 3 ve 4 gruplu denemeler, 100.000 defa tekrarlanmıştır. Bu denemelerde karşılaştırılan I. Tip hatanın; $\alpha = 0.50, 0.25, 0.20, 0.15, 0.10, 0.05$ ve 0.01 olduğu durumlarda; Bartlett ve Levene testleri için I. Tip hatalar ampirik olarak elde edilmiştir. Bunun yanı sıra; bu test istatistikleri için $\alpha = 0.05$ ve 0.01 seviyesindeki kritik değerler de belirlenmiştir. Bu değerlerin belirlenmesinde ise her bir deneme 1.000.000 defa tekrarlanmış ve daha sonra bu istatistikler küçükten büyüğe doğru sıraya dizilerek en büyük 0.05 ve 0.01 ' lik değerlerin başladığı değerler kritik değerler olarak kabul edilmiştir.

Test istatistikleri

Bartlett testi : Bartlett testi için Bartlett M istatistiği, k grup sayısını göstermek üzere;

$$M = \ln S_p^2 \left(\sum_{i=1}^k v_i \right) - \sum_{i=1}^k v_i \ln S_i^2 \quad (1)$$

eşitliği ile hesaplanmıştır. (1) no' lu eşitlikte; S_p^2 toplanmış (pooled) varyansı, S_i^2 i. grubun varyansını, ve v_i ise i. grubun serbestlik derecesini göstermektedir. (1) no' lu eşitlikten hesaplanan M istatistiği için düzeltme faktörü (C);

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\frac{k-1}{\sum_{i=1}^k v_i} - \frac{1}{\sum_{i=1}^k v_i} \right) \quad (2)$$

eşitliği ile hesaplanmıştır. Buradan düzeltilmiş Bartlett test istatistiği; $B_c = M/C$ olarak hesaplanmış ve bu istatistiğin önemli olup olmadığına karar vermede, k-1 serbestlik dereceli χ^2 tablo değerleri kullanılmıştır.

Levene testi : Z_i her hangi bir i. muamele grubundaki j. Gözlem değeri olmak üzere, Levene testi için test istatistiği (L);

$$L = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{z}_i - \bar{z}_{..})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2 / (N-1)} \quad (3)$$

eşitliği ile hesaplanmıştır. (3) no' lu eşitlikte;

$$\bar{z}_i = \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij} / n_i \quad \text{ve} \quad \bar{z}_{..} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij} / N \quad \text{dir.}$$

(3) no' lu eşitlik yardımı ile hesaplanan Levene test istatistiğinin önemli olup olmadığı, k-1 ve N-k (N = toplam gözlem sayısı) serbestlik dereceli F dağılımı tablo değerleri kullanılarak belirlenmiştir.

Bulgular ve Tartışma

Grup sayısının 3 ve 4 olduğu denemelerde; karşılaştırılan I. Tip hataların; $\alpha = 0.50, 0.25, 0.20, 0.15, 0.10, 0.05$ ve 0.01 olduğu durumlarda; Bartlett ve Levene test istatistikleri için ampirik olarak gerçekleşen I. Tip hatalar sırası ile Çizelge 1, 2, 3 ve 4' te verilmiştir. (Gruplarda 2' şer adet gözlem olduğu durumda, Levene test istatistiği hesaplanamadığından, n= 2' de Levene testi için gerçekleşen I. Tip hatalar verilmemiştir). Çizelge 1 incelendiğinde; I. Tip hatanın $\alpha = 0.50$ ' lik beklenen değerinde, farklı örnek genişliklerindeki Bartlett test istatistiğine ait gerçekleşen hataların, genelde teorik olarak beklenen değerlerin altında olduğu görülmektedir. Hatanın $\alpha = 0.50$ olarak beklenen değerinde; gerçekleşen hataların en yüksek değeri, 0.503 ile gruplardaki gözlem sayısının 21 olduğu durumda, en düşük değeri ise 0.494 değeri ile gruplardaki gözlem sayısının 2 olduğu durumda gözlenmiştir. Dolayısıyla, gerçekleşen değerler 0.503 ile 0.494 gibi dar bir aralıkta değişmektedir. Ancak, hatanın $0.25, 0.20, 0.15$ ve 0.10 ' luk beklenen değerleri için gerçekleşen değerlerin değişim aralığı genişlemekte ve sırası ile 0.022, 0.024, 0.024 ve 0.022 olmaktadır.

Hipotez kontrollerinde daha sık kullanılan I. Tip hatalar olan $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ ' lik değerler için ampirik olarak gerçekleşen I. Tip hataların değişim aralığının azaldığı ve genelde beklenen değerlere eşit sonuçlar elde edildiği dikkati çekmektedir. Gruplarda 2' şer adet gözlem bulunduğu durumda; gerçekleşen I. Tip hataların, beklenen değerin altında olduğu, ancak gruplardaki gözlem sayısının artması ile birlikte, bu hataların beklenen değere yaklaştığı veya beklenen değeri aldığı ve bu değeri hemen hemen hiç geçmediği görülmektedir.

Çizelge 2' deki Levene testi sonuçları incelendiğinde; Bartlett testinin aksine, gerçekleşen I. Tip hatalar için değişim aralığının oldukça geniş olması ile birlikte, bu değerlerin teorik olarak beklenen değerlerden daha büyük olduğu görülmektedir. Burada, $\alpha = 0.50$ için gerçekleşen en büyük değer 0.724, en küçük değer ise 0.513 tür. Benzer şekilde $\alpha = 0.25$ te, en büyük değer 0.451 ve en küçük değer 0.261' dir. Dolayısıyla, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ ' için gerçekleşen I. Tip hatalar dikkate alındığında; $\alpha = 0.05$ için gerçekleşen I. Tip hatanın 0.094 ile 0.054 arasında değiştiği ve $\alpha = 0.01$ için ise gerçekleşen I. Tip hatanın 0.01 ile 0.03 arasında değiştiği görülmektedir. Bu aralıkların oldukça geniş aralıklar olduğu söylenebilir.

Grup sayısı 4 olduğunda Bartlett ve Levene test istatistikleri için gerçekleşen I. Tip hataların verilmiş olduğu Çizelge 3 ve Çizelge 4 incelendiğinde; gerek Bartlett testi gerekse de Levene testi için gerçekleşen I. Tip hataların,

Çizelge 1' ve Çizelge 2'deki değerlere benzer olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, grup sayısının 3 veya 4 olmasının, gerçekleşen I. Tip hataları pek fazla değiştirmedeği söylenebilir. Buna karşılık, gruplardaki gözlem sayısının artması, ampirik olarak gerçekleşen I. Tip hataların teorik olarak beklenen I. Tip hatalara yakınlığını veya benzerliğini, etkilemektedir. Bu durum Levene testi sonuçlarında daha belirgindir. Bartlett testine ait gerçekleşen I. Tip hatalar, genelde beklenen değerleri altında olmakta ve gruplardaki gözlem sayısından pek fazla etkilenmemektedir.

Gruplardaki gözlem sayısının 6 ve 10 olduğu durumlarda 3 grup için $\alpha = 0.05$ ' teki Bartlett testi değerleri sırası ile 0.048 ve 0.051 olarak bulunmuşken, Levene testi değerleri sırası ile 0.073 ve 0.063 olarak bulunmuştur. Geng ve ark. (1979) yaptıkları çalışmada, Bartlett testi değerlerini sırası ile 0.051 ve 0.046 olarak bulmuşlardır. Levene testini ise grup ortalamaları yerine grupların medyan (ortanca değer) değerlerini dikkate alarak hesaplamışlar ve sonuçları sırası ile 0.047 ve 0.025 olarak bulmuşlardır. Conover ve ark. (1981) yaptıkları çalışmada; 4 grup olduğunda ve gruplarda eşit sayıda gözlem bulunduğunda, $\alpha = 0.05$ ' teki Bartlett testi gerçekleşen I. Tip hataları 0.033 ve Levene testi gerçekleşen hataları ise 0.083 olarak bulmuşlardır. Çalışmada ise bu değerler sırası ile 0.050 ve 0.089 olarak bulunmuştur. Aynı araştırmacılar, gruplardaki gözlem sayıları 10' ar ve 20' şer adet alındığında; Bartlett testi sonuçlarını 0.051 ve 0.060 olarak, Levene testi sonuçlarını ise 0.064 ve 0.058 olarak bulmuşlardır. Çalışmada, Bartlett testi gerçekleşen I. Tip hataların her iki durum için 0.050, Levene testi gerçekleşen I. Tip hata değerlerinin ise sırası ile 0.066 ve 0.056 olarak bulunduğu dikkate alınrsa, elde edilen sonuçların Conover ve ark. (1981) tarafından bulunan değerlerden daha iyi olduğu söylenebilir. Loh (1995) ise 100000 deneme sonucunda gruplardaki gözlem sayılarının 5, 10 ve 20 olduğu durumlarda; Bartlett testi değerlerini sırası ile 0.047, 0.049, ve 0.046 olarak, medyanı dikkate alarak hesaplamış olduğu Levene testi değerlerini ise sırası ile 0.000, 0.029 ve 0.03 olarak bulmuştur. Çalışmada, 4 grup olduğunda ve her grupta 4' er ve 12' şer adet gözlem bulunduğunda; Levene testi değerleri sırası ile 0.104 ve 0.063 olarak bulunmuştur. Bu değerler Loh (1987) tarafından grup medyanları dikkate alınarak hesaplanmış olan Levene testi değerlerinden (0.080 ve 0.025) bir miktar farklıdır.

Kuşkusuz, istatistik çalışmalarda, başlangıçta (deneme başında) karşılaştırılmış olan I. Tip hatanın deneme sonunda da aynı düzeyde kalması istenir. Gerçekleşen I. Tip hatanın başlangıçta karşılaştırılan düzeyin altında olması, her ne kadar ilk bakışta avantaj gibi görülürse de, aslında bu bir avantaj değildir. Zira, I. Tip hatanın küçülmesi II. Tip hatanın büyümesine yol açacaktır. Dolayısıyla, istatistik testlerde I. Tip hatanın aynı düzeyde deneme sonunda da korunması istenir. Bu bağlamda düşünüldüğünde, Bartlett testinin gerçekleşen I. Tip hatasının, teorik olarak beklenen değerden daha küçük olduğu görülür. Yani Bartlett testi I. Tip hatayı daha küçük bulmaktadır. Buna karşılık, Levene testi I. Tip hatayı başlangıçta karşılaştırılan değerden daha büyük

bulmaktadır. Bu durumda, Bartlett testi için teorik χ^2 tablo değerlerini ve Levene testi için de teorik F tablo değerlerini kullanmak, başlangıçta karşılaştırılan I. Tip hatayı değiştirecektir. Bu durumda yeni bir yaklaşım olarak; uygun serbestlik dereceli teorik χ^2 ve F tablo değerlerini kullanmak yerine, hesaplanan Bartlett ve Levene istatistiklerinin dağılımında $\alpha = 0.05$ ve 0.01 için kritik değerlerin belirlenmesi düşünülmüştür. Bu amaçla 3 ve 4 gruplu denemelerde her bir grupta 2, 3, ..., 30 adet gözlem olduğu durumda, bir milyon simülasyon denemesi yapılmış ve hesaplanan Bartlett ve Levene istatistikleri küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Sonra bu dağılımların sağ tarafındaki % 5' lik ve % 1' lik alanların başladığı kritik değerler belirlenmiştir. Bu kritik değerler sırası ile Çizelge 5 ve Çizelge 6' da verilmiştir. Gerek Çizelge 5' teki gerekse de Çizelge 6' daki $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ için Bartlett istatistiklerinin kritik değerleri dikkate alındığında; gerçekleşen kritik değerlerin genelde teorik olarak beklenen χ^2 tablo değerlerinden daha küçük olduğu görülür. Bu durumda; Bartlett testine göre ret edilmesi gereken test hipotezlerinin bazıları, χ^2 tablo değeri dikkate alınarak değerlendirildiğinde kabul edilecektir. Başka bir ifade ile Bartlett testine göre yapılacak karar vermede, I. Tip hata; χ^2 tablo değerine göre yapılacak karar vermeye göre daha büyük olacaktır. Sonuç olarak, Bartlett testi ile test hipotezinin kabulüne veya reddine karar vermede χ^2 tablo değerinin kullanılması I. Tip hatayı küçültmektedir.

Çizelge 5 ve Çizelge 6' daki Levene test istatistiklerinin değerleri incelendiğinde; $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ 'deki, gerçekleşen kritik değerlerin F tablo değerlerinden daha büyük olduğu görülür. Bu durumda; F tablo değerleri kullanılarak reddine karar verilmiş olan test hipotezlerinin bazıları, gerçekleşen Levene kritik değerine göre kabul edilecektir. Bu demektir ki, Levene testi sonuçları için F tablo değerleri kullanılarak verilecek kararlarda, I. Tip hata büyük olacaktır.

Grup sayısının 3 olduğu denemelerde; $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ 'deki Bartlett ve Levene test istatistiklerinin gerçekleşen hatalarının, gruplardaki gözlem sayısının değişimine göre seyrini daha kolay görebilmek amacıyla çizilmiş olan grafikler, Şekil 1 ve Şekil 2' de verilmiştir. Grup sayısının 4 olduğu denemelerden elde edilen sonuçlar, 3 gruplu denemelerden elde edilen sonuçlara benzer olduğundan, 4 grup için grafikler çizilmemiştir. Şekil 1 ve Şekil 2, Bartlett testi sonuçları bakımından incelendiğinde; gruplardaki gözlem sayısının artması ile birlikte hataların $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ değerlerine yaklaştığı görülür. Buna göre normal dağılım gösteren populasyondan alınmış örneklerde; örnek genişliğinin 4 ve daha fazla olduğu durumlarda, varyansların homojen olup olmadığını kontrol için Bartlett testinin kullanılabilirliği söylenebilir.

Ancak şekiller Levene testi gerçekleşen hatalar bakımından incelendiğinde; elde edilen sonuçların, Bartlett testi sonuçlarından oldukça farklı olduğu görülür.

Levene testi değerlerinin gruplardaki gözlem sayısı 30 olduğunda bile, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ çizgisinin üzerinde seyrettiği, diğer bir ifade ile hataların teorik olarak

Çizelge 1. Bartlett testi için gerçekleşen I. Tip hatalar (grup sayısı = 3)

n _i	Teorik olarak beklenen α değerleri						
	$\alpha = 0.50$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
2	0.494	0.230	0.178	0.127	0.079	0.040	0.004
3	0.501	0.246	0.195	0.145	0.095	0.046	0.008
4	0.499	0.249	0.198	0.150	0.099	0.048	0.009
5	0.499	0.249	0.199	0.148	0.099	0.049	0.010
6	0.496	0.248	0.198	0.149	0.098	0.048	0.009
7	0.500	0.251	0.202	0.151	0.101	0.051	0.010
8	0.502	0.250	0.199	0.149	0.099	0.051	0.010
9	0.498	0.250	0.199	0.149	0.098	0.049	0.010
10	0.500	0.248	0.198	0.148	0.099	0.051	0.010
11	0.501	0.251	0.201	0.151	0.100	0.050	0.009
12	0.502	0.251	0.202	0.151	0.100	0.050	0.050
13	0.498	0.249	0.199	0.149	0.100	0.049	0.010
14	0.498	0.248	0.199	0.149	0.100	0.050	0.010
15	0.501	0.250	0.200	0.149	0.100	0.051	0.010
16	0.500	0.251	0.200	0.149	0.100	0.051	0.010
17	0.501	0.251	0.202	0.151	0.101	0.050	0.010
18	0.500	0.250	0.200	0.150	0.100	0.050	0.010
19	0.498	0.251	0.201	0.151	0.101	0.050	0.010
20	0.497	0.249	0.198	0.149	0.099	0.049	0.009
21	0.503	0.252	0.201	0.150	0.100	0.050	0.011
22	0.501	0.250	0.200	0.150	0.100	0.050	0.010
23	0.500	0.249	0.198	0.149	0.099	0.050	0.010
24	0.499	0.251	0.201	0.150	0.099	0.050	0.010
25	0.497	0.250	0.200	0.150	0.100	0.050	0.010
26	0.497	0.249	0.199	0.150	0.099	0.050	0.010
27	0.501	0.250	0.200	0.149	0.099	0.050	0.010
28	0.500	0.251	0.200	0.150	0.100	0.050	0.010
29	0.501	0.251	0.201	0.151	0.100	0.050	0.010
30	0.501	0.252	0.202	0.152	0.101	0.050	0.011

Çizelge 2. Levene testi için gerçekleşen I. Tip hatalar (grup sayısı = 3)

n _i	Teorik olarak beklenen α değerleri						
	$\alpha = 0.50$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
2	0.724	0.451	0.372	0.282	0.179	0.068	0.001
3	0.628	0.361	0.298	0.233	0.164	0.094	0.032
4	0.594	0.334	0.276	0.214	0.150	0.081	0.020
5	0.571	0.313	0.258	0.200	0.138	0.073	0.017
6	0.560	0.305	0.251	0.195	0.135	0.070	0.016
7	0.552	0.297	0.243	0.186	0.128	0.068	0.015
8	0.544	0.290	0.236	0.181	0.124	0.065	0.015
9	0.540	0.285	0.232	0.177	0.121	0.063	0.014
10	0.537	0.283	0.229	0.175	0.119	0.062	0.013
11	0.536	0.281	0.228	0.173	0.118	0.061	0.013
12	0.529	0.276	0.225	0.171	0.115	0.059	0.013
13	0.527	0.274	0.221	0.169	0.116	0.060	0.013
14	0.525	0.273	0.221	0.167	0.113	0.058	0.013
15	0.524	0.270	0.219	0.166	0.113	0.057	0.013
16	0.523	0.272	0.220	0.167	0.114	0.058	0.012
17	0.520	0.269	0.217	0.165	0.112	0.058	0.012
18	0.518	0.269	0.219	0.165	0.112	0.056	0.012
19	0.514	0.263	0.213	0.162	0.109	0.056	0.011
20	0.520	0.267	0.215	0.163	0.110	0.056	0.012
21	0.516	0.266	0.215	0.162	0.109	0.056	0.011
22	0.514	0.263	0.213	0.160	0.108	0.055	0.011
23	0.516	0.265	0.213	0.161	0.108	0.055	0.011
24	0.514	0.261	0.212	0.159	0.109	0.055	0.011
25	0.513	0.262	0.210	0.159	0.107	0.054	0.011
26	0.514	0.263	0.212	0.160	0.106	0.055	0.012
27	0.515	0.263	0.212	0.161	0.107	0.056	0.011
28	0.513	0.262	0.212	0.160	0.108	0.054	0.011
29	0.513	0.261	0.210	0.158	0.107	0.054	0.012
30	0.513	0.261	0.210	0.158	0.107	0.054	0.012

Çizelge 3. Bartlett testi için gerçekleşen I. Tip hatalar (grup sayısı = 4)

n_i	Teorik olarak beklenen α değerleri						
	$\alpha = 0.50$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
2	0.487	0.224	0.173	0.124	0.076	0.033	0.004
3	0.500	0.245	0.195	0.145	0.094	0.044	0.004
4	0.499	0.248	0.197	0.148	0.097	0.048	0.009
5	0.501	0.248	0.197	0.147	0.099	0.050	0.010
6	0.501	0.251	0.201	0.151	0.102	0.050	0.010
7	0.500	0.249	0.198	0.149	0.099	0.049	0.010
8	0.502	0.251	0.200	0.148	0.098	0.049	0.010
9	0.501	0.252	0.201	0.152	0.101	0.050	0.009
10	0.499	0.250	0.201	0.151	0.101	0.050	0.009
11	0.498	0.249	0.200	0.150	0.099	0.050	0.010
12	0.501	0.250	0.200	0.150	0.100	0.050	0.010
13	0.498	0.249	0.198	0.148	0.099	0.050	0.010
14	0.497	0.248	0.197	0.148	0.099	0.049	0.010
15	0.503	0.251	0.200	0.015	0.100	0.050	0.010
16	0.500	0.251	0.201	0.151	0.100	0.050	0.010
17	0.499	0.248	0.198	0.150	0.100	0.050	0.010
18	0.503	0.251	0.200	0.150	0.100	0.049	0.010
19	0.500	0.249	0.199	0.149	0.098	0.050	0.010
20	0.502	0.249	0.200	0.150	0.100	0.050	0.010
21	0.500	0.252	0.200	0.151	0.101	0.500	0.010
22	0.499	0.250	0.200	0.150	0.100	0.050	0.010
23	0.498	0.249	0.200	0.150	0.100	0.049	0.010
24	0.499	0.248	0.199	0.149	0.099	0.050	0.010
25	0.500	0.251	0.201	0.151	0.100	0.050	0.010
26	0.503	0.252	0.202	0.152	0.101	0.051	0.010
27	0.502	0.251	0.200	0.149	0.100	0.049	0.010
28	0.503	0.251	0.200	0.149	0.990	0.050	0.010
29	0.502	0.250	0.200	0.151	0.101	0.050	0.010
30	0.499	0.248	0.199	0.149	0.100	0.050	0.010

Çizelge 4. Levene testi için gerçekleşen I. Tip hatalar (grup sayısı = 4)

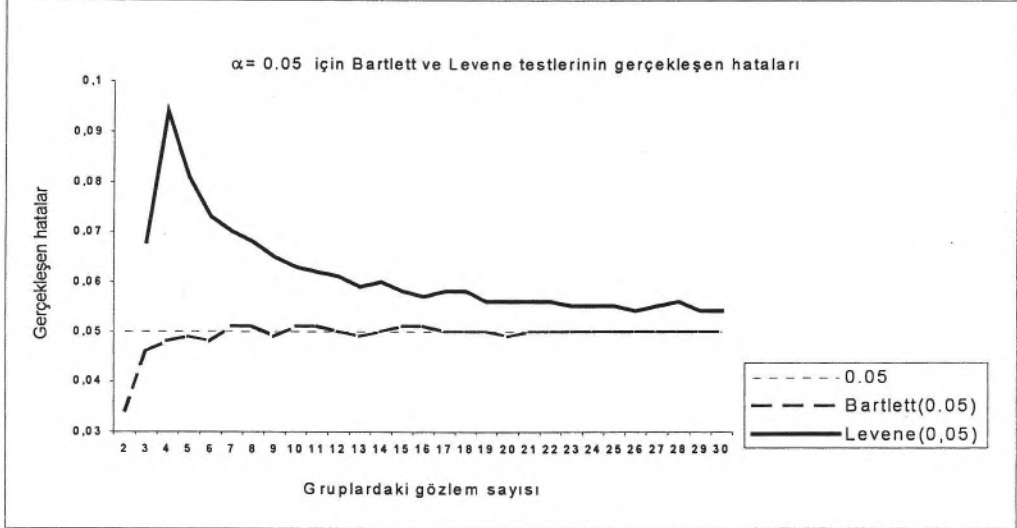
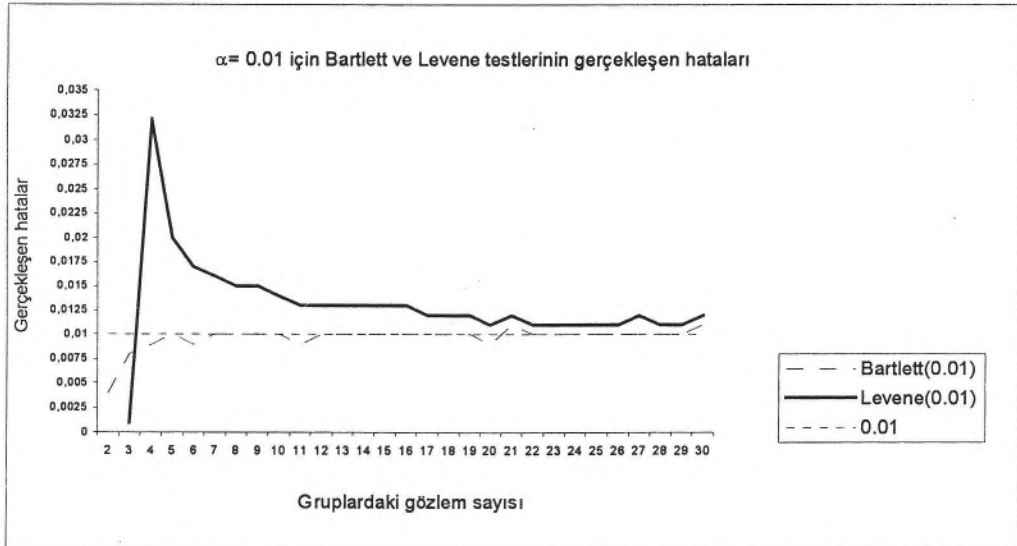
n_i	Teorik olarak beklenen α değerleri						
	$\alpha = 0.50$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
2	0.775	0.502	0.420	0.325	0.214	0.095	0.006
3	0.659	0.386	0.321	0.252	0.179	0.104	0.035
4	0.612	0.350	0.292	0.229	0.162	0.089	0.023
5	0.590	0.331	0.275	0.214	0.150	0.081	0.020
6	0.574	0.315	0.259	0.199	0.138	0.074	0.018
7	0.567	0.309	0.253	0.196	0.135	0.072	0.016
8	0.556	0.303	0.247	0.190	0.131	0.069	0.015
9	0.548	0.291	0.237	0.182	0.126	0.066	0.014
10	0.540	0.289	0.235	0.179	0.122	0.064	0.014
11	0.539	0.286	0.233	0.177	0.121	0.063	0.014
12	0.537	0.281	0.228	0.175	0.119	0.063	0.014
13	0.531	0.277	0.224	0.171	0.116	0.060	0.013
14	0.532	0.279	0.227	0.172	0.116	0.060	0.013
15	0.528	0.276	0.223	0.170	0.115	0.059	0.013
16	0.524	0.273	0.222	0.170	0.114	0.059	0.013
17	0.526	0.272	0.220	0.167	0.113	0.058	0.012
18	0.523	0.270	0.218	0.166	0.112	0.057	0.012
19	0.522	0.269	0.218	0.164	0.111	0.056	0.012
20	0.520	0.270	0.218	0.164	0.111	0.057	0.012
21	0.520	0.268	0.216	0.164	0.110	0.055	0.012
22	0.518	0.268	0.217	0.165	0.111	0.057	0.012
23	0.517	0.266	0.214	0.163	0.111	0.057	0.011
24	0.518	0.267	0.215	0.163	0.110	0.056	0.012
25	0.520	0.265	0.214	0.162	0.110	0.056	0.012
26	0.515	0.263	0.212	0.159	0.108	0.055	0.011
27	0.520	0.265	0.212	0.160	0.108	0.055	0.012
28	0.515	0.263	0.211	0.160	0.107	0.055	0.011
29	0.515	0.262	0.212	0.160	0.108	0.055	0.011
30	0.515	0.262	0.212	0.160	0.108	0.055	0.011

Çizelge 5. k = 3 gruplu denemelerde $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ 'deki Bartlett ve Levene istatistikleri için gerçekleşen kritik değerler

n_i	Bartlett testi				Levene testi			
	$\chi^2_{B(0.05)}$	$\chi^2_{(0.05)}$	$\chi^2_{B(0.01)}$	$\chi^2_{(0.01)}$	$L_{(0.05)}$	$F_{(0.05)}$	$L_{(0.01)}$	$F_{(0.01)}$
2	5.350	5.991	7.896	9.210				
3	5.809	5.991	8.765	9.210	5.723	5.143	8.315	10.925
4	5.909	5.991	9.029	9.210	6.210	4.257	8.469	8.022
5	5.952	5.991	9.090	9.210	4.875	3.885	8.687	6.927
6	5.982	5.991	9.122	9.210	4.358	3.682	7.615	6.359
7	5.986	5.991	9.178	9.210	4.077	3.555	6.959	6.013
8	5.993	5.991	9.191	9.210	3.903	3.469	6.508	5.780
9	5.998	5.991	9.211	9.210	3.763	3.403	6.208	5.614
10	5.993	5.991	9.187	9.210	3.688	3.357	5.984	5.488
11	5.983	5.991	9.170	9.210	3.591	3.316	5.798	5.390
12	5.994	5.991	9.166	9.210	3.527	3.285	5.680	5.312
13	5.989	5.991	9.193	9.210	3.481	3.260	5.593	5.248
14	5.995	5.991	9.188	9.210	3.440	3.238	5.505	5.194
15	5.997	5.991	9.206	9.210	3.407	3.220	5.416	5.149
16	5.998	5.991	9.212	9.210	3.382	3.204	5.388	5.110
17	5.984	5.991	9.218	9.210	3.347	3.191	5.303	5.077
18	5.993	5.991	9.191	9.210	3.326	3.179	5.248	5.047
19	5.976	5.991	9.203	9.210	3.301	3.168	5.235	5.021
20	5.995	5.991	9.184	9.210	3.298	3.159	5.186	4.998
21	5.989	5.991	9.198	9.210	3.275	3.150	5.161	4.977
22	5.992	5.991	9.221	9.210	3.264	3.143	5.131	4.959
23	5.999	5.991	9.230	9.210	3.253	3.136	5.139	4.942
24	5.982	5.991	9.171	9.210	3.237	3.130	5.070	4.927
25	6.000	5.991	9.229	9.210	3.238	3.124	5.070	4.913
26	5.996	5.991	9.205	9.210	3.217	3.119	5.041	4.900
27	5.984	5.991	9.194	9.210	3.208	3.117	5.032	4.888
28	6.004	5.991	9.246	9.210	3.207	3.109	5.005	4.877
29	6.002	5.991	9.249	9.210	3.203	3.105	5.004	4.867
30	5.969	5.991	9.195	9.210	3.185	3.101	4.983	4.858

Çizelge 6. k = 4 gruplu denemelerde $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ 'deki Bartlett ve Levene istatistikleri için gerçekleşen kritik değerler

n_i	Bartlett testi				Levene testi			
	$\chi^2_{B(0.05)}$	$\chi^2_{(0.05)}$	$\chi^2_{B(0.01)}$	$\chi^2_{(0.01)}$	$L_{(0.05)}$	$F_{(0.05)}$	$L_{(0.01)}$	$F_{(0.01)}$
2	7.048	7.815	9.800	11.341				
3	7.613	7.815	10.907	11.341	4.945	4.757	7.005	9.780
4	7.732	7.815	11.144	11.341	5.043	3.863	7.194	6.992
5	7.784	7.815	11.238	11.341	4.094	3.411	6.788	5.739
6	7.789	7.815	11.298	11.341	3.685	3.287	5.967	5.417
7	7.799	7.815	11.324	11.341	3.469	3.160	5.502	5.092
8	7.818	7.815	11.335	11.341	3.333	2.911	5.159	4.484
9	7.815	7.815	11.357	11.341	3.223	2.883	4.979	4.416
10	7.812	7.815	11.352	11.341	3.139	2.859	4.815	4.360
11	7.801	7.815	11.297	11.341	3.081	2.922	4.688	4.510
12	7.819	7.815	11.316	11.341	3.029	2.892	4.606	4.437
13	7.794	7.815	11.327	11.341	2.994	2.866	4.509	4.377
14	7.829	7.815	11.362	11.341	2.971	2.845	4.457	4.327
15	7.842	7.815	11.384	11.341	2.944	2.822	4.417	4.273
16	7.818	7.815	11.336	11.341	2.911	2.812	4.354	4.249
17	7.809	7.815	11.319	11.341	2.889	2.798	4.309	4.218
18	7.811	7.815	11.319	11.341	2.872	2.786	4.277	4.191
19	7.806	7.815	11.332	11.341	2.850	2.776	4.246	4.167
20	7.806	7.815	11.357	11.341	2.846	2.767	4.215	4.145
21	7.817	7.815	11.333	11.341	2.831	2.758	4.206	4.126
22	7.828	7.815	11.339	11.341	2.820	2.751	4.176	4.109
23	7.810	7.815	11.361	11.341	2.808	2.744	4.158	4.093
24	7.811	7.815	11.330	11.341	2.798	2.738	4.147	4.079
25	7.797	7.815	11.312	11.341	2.790	2.730	4.101	4.062
26	7.812	7.815	11.364	11.341	2.781	2.727	4.108	4.054
27	7.812	7.815	11.356	11.341	2.778	2.722	4.101	4.043
28	7.820	7.815	11.337	11.341	2.772	2.717	4.091	4.033
29	7.815	7.815	11.358	11.341	2.762	2.713	4.080	4.024
30	7.816	7.815	11.356	11.341	2.760	2.709	4.063	4.015

Şekil 1. Farklı örnek genişliklerindeki Bartlett ve Levene istatistiklerinin dağılımı ($\alpha = 0.05$ ve grup sayısı = 3)Şekil 2. Farklı örnek genişliklerindeki Bartlett ve Levene istatistiklerinin dağılımı ($\alpha = 0.01$ ve grup sayısı = 3)

beklenen değerlerden büyük olduğu görülür. Dolayısıyla, normal dağılım gösteren populasyonlardan alınmış olan örneklerde (grup sayısı 3 ve 4 olduğunda), varyansların homojenliğini kontrol için Levene testinin uygun olmadığı düşünülebilir.

Sonuç

Grup ortalamalarını birbirleri ile karşılaştırmada (varyans analizinde) gerekli olan ön şartlardan birisi olan varyansların homojenliği ön şartının yerine gelip gelmediğini belirlemede kullanılan yöntemlerden olan Bartlett ve Levene testlerine ilişkin sonuçları, aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür. Bartlett testi normal dağılım gösteren populasyondan alınmış olan örneklerde, her ne kadar I tip hatayı beklenenden daha az bulmakta ise de, gruplardaki gözlem sayısının artması ile birlikte, I. Tip hatayı teorik olarak beklenen değere yakın bulmakta ve bunu korumaktadır. Buna karşılık Levene testi, I. Tip hatayı teorik olarak beklenen değerden daha fazla bulmaktadır. Bu durumda; başlangıçta karşılaştırılan I. Tip hatanın deneme sonunda da aynı kalmasını sağlayabilmek amacı ile Bartlett istatistiği için teorik χ^2 ve Levene istatistiği için de teorik F tablosunu kullanmak yerine, bu istatistiklerin kendi kritik değerlerinin elde edilmesinin ve bu kritik değerlerin kullanılmasının uygun bir yaklaşım olacağı söylenilebilir.

Kaynaklar

- Bishop, T. A. ve E. J. Dudewicz, 1978. Exact analysis of variance with unequal variances: Test procedures and tables, *Technometrics*, 20 (4) 419-424.
- Conover, W. J., M. E. Johnson, M. M. Johnson, 1981. A comparative study of test for homogeneity of variances with applications to the outer continental shelf bidding data, *Technometrics*, 23 (4) 351-361.
- Gartside, P. S. 1972. A study of methods for comparing several variances, *JASA* 67(338) 342-346.
- Geng, S., W. J. Wang, C. Miller, 1979. Small sample size comparisons of tests for homogeneity of variances with monte-carlo, *Sim. Comp.* B8 (4) 379-389.
- Keselman, H. J., P. A. Games, J. J. Clinch, 1979. Test for homogeneity of variance, *Sim. Comp.* B8 (2) 113-129.
- Lim, T. S., W. Y. Loh, 1996. A comparison of tests of equality of variances, *Comput. Statis. and Data Analysis*, 22, 287-301
- Lix, L. M. 1996. Consequences of assumption violations revised: A quantitative review of alternatives to the one-way analysis of variances F test, *Review of Edu. Research* 66 (4) 579-619.
- Loh, W. Y. 1987. Some modifications of Levene's test of variance homogeneity. *J. Statist. Comput. Simul.*, 28, 213-226