Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 9 (2021) 1420- 1435

Düzce Üniversitesi
Bilim ve Teknoloji Dergisi

Araştırma Makalesi

$A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ Banach Uzayı Üzerindeki Bazı Yeni Sonuçlar

Nilay DEĞİRMEN [a,*]

[a] *Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, TÜRKİYE*
* *Sorumlu yazarın e-posta adresi: nilay.sager@omu.edu.tr*
DOI: 10.29130/dubited.866704

Öz

G bir ünimodüler yerel kompakt grup ve $p=\min\{p_1,p_2\}$ olmak üzere $w\in B_p$ olsun. Bu çalışmada, $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının indislerin değişmesi durumunda kapsama özellikleri incelenmiştir. Ayrıca w ağırlığının bazı özel şartları sağlaması durumunda $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı için $\Lambda_G^1(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayında bir yaklaşık birim elde edilmiş ve $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının bir Banach sağ $\Lambda_G^1(w)-$ modül olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Ağırlık, Banach Sağ $A-$Modül, Girişim Operatörü, Yaklaşık Birim*

Some New Results on the Banach Space $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$

Abstract

Let G be a unimodular locally compact group and $w\in B_p$ where $p=\min\{p_1,p_2\}$. In this work, in the case of changing indices, the inclusion properties of the space $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ have been examined. Also, if the weight w provides some special conditions, an approximate identity for the space $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ has been obtained in the weighted Lorentz space $\Lambda_G^1(w)$ and it has been proved that the space $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ is a Banach right $\Lambda_G^1(w)-$module.

Keywords: *Weight, Banach Right $A-$Module, Convolution Operator, Approximate Identity*

Geliş: 25/01/2021, Düzeltme: 07/05/2021, Kabul: 14/05/2021

I. GİRİŞ

Lebesgue uzaylarının genellemeleri olarak Lorentz [1,2] tarafından tanımlanan Lorentz uzayları matematiksel analizin harmonik analiz, interpolasyon teorisi gibi pek çok dalında önemli rol oynar. Bu uzaylar çeşitli topolojik, fonksiyonel ve geometrik özellikleri sayesinde birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve farklı alanlardaki çeşitli uygulamaları [3,4,5,6] ile popüler bir araştırma konusu olmuştur.

Avcı ve Gürkanlı [7] 2007 yılında, Lorentz uzaylarını kullanarak G yerel kompakt abel grup, $1 < p_1, p_2 < \infty$ ve $1 \le q_1, q_2 \le \infty$ olmak üzere bir $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayı tanımlamış ve bu uzay üzerinde bir norm elde etmiştir. Ayrıca yine Avcı ve Gürkanlı [7], her $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ için $L^1(G)$ uzayında belirli bazı şartları sağlayan $\{a_\alpha\}$ ve $\{b_\beta\}$ yaklaşım birimlerinin varlığını ispatlamış ve $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayının $L^1(G)$ üzerinde bir Banach modülü olduğunu elde etmiştir.

Li ve Sun [8] ise 2012 yılında, Carro, Raposo ve Soria [9] tarafından 2007 yılında tanımlanan ağırlıklı Lorentz uzaylarını ele alarak G ünimodüler yerel kompakt grup, $C > 0$ iken $W(t) \ge Ct$, $w \in B_{1,\infty}$ ve $1 < p < \infty, 1 \le q < \infty$ olmak üzere her $f \in \Lambda_G^{p,q}(w)$ için $f * a_\alpha \to f$ ve $\|a_\alpha\|_{\Lambda_G^1(w)} = 1$ olacak şekilde $\Lambda_G^1(w)$ da bir $\{a_\alpha\}$ yaklaşık biriminin var olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca yine Li ve Sun [8], $1 < p < \infty, 1 \le q < \infty, w \in B_{1,\infty}$ ya da $p = q = 1$, $w \in B_1$ ve c bir sabit iken $w \ge c > 0$ olmak üzere $\Lambda_G^{p,q}(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayının bir sağ $\Lambda_G^1(w)-$modül olduğunu göstermiştir.

Değirmen ve Değirmen [10] 2021 yılında, Li ve Sun [8] tarafından tanımlanan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının Banach uzay olduğunu elde ederek bu makalenin zeminini oluşturmuştur.

Buradan yola çıkarak, bu çalışmada, Avcı ve Gürkanlı [7] nın kullandığı yöntemlerle G ünimodüler yerel kompakt grup, $p = \min\{p_1, p_2\}$ ve $w \in B_p$ olmak üzere Li ve Sun [8] tarafından tanımlanan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının q_1 ve q_2 sayılarının değişimine göre kapsama özellikleri, $C > 0$ iken $W(t) \ge Ct$ ve $w \in B_{1,\infty}$ olması durumunda yaklaşık birim özelliği ve Banach sağ $\Lambda_G^1(w)-$modül yapısı incelenmiştir.

II. MATERYAL VE METOT

Tanım 2.1. A, F cismi üzerinde bir cebir, M, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Bir $A \times M \to M, (a,m) \to am$ $\left(M \times A \to M, (m,a) \to ma\right)$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa M lineer uzayına bir sol (sağ) $A-$modül, $A \times M \to M, (a,m) \to am$ $\left(M \times A \to M, (m,a) \to ma\right)$ dönüşümüne de modül çarpımı denir.

i) Her bir sabitlenmiş $a \in A$ için $m \to am$ $(m \to ma)$ dönüşümü M üzerinde lineerdir.

ii) Her bir sabitlenmiş $m \in M$ için $a \to am$ $(a \to ma)$ dönüşümü A üzerinde lineerdir.

iii) Her $a_1, a_2 \in A$ ve her $m \in M$ için $a_1(a_2 m) = (a_1 a_2) m$ $\left((m a_1) a_2 = m(a_1 a_2)\right)$ dir.

M lineer uzayı hem sol hem de sağ $A-$ modül ise M ye bir $A-$bimodül denir. Burada modül çarpımı her $a, b \in A$ ve her $m \in M$ için $a(mb) = (am)b$ şeklindedir [11].

Tanım 2.2. A,F cismi üzerinde bir normlu cebir, M,F cismi üzerinde bir normlu lineer uzay olsun. Eğer M bir sol (sağ) $A-$modül ve her $a \in A$ ve her $m \in M$ için $\|am\| \leq K\|a\|\|m\|$ $\left(\|ma\| \leq K\|m\|\|a\|\right)$ olacak şekilde pozitif bir K sabiti varsa M lineer uzayına bir normlu sol (sağ) $A-$modül denir. M lineer uzayı hem normlu sol $A-$ modül hem de normlu sağ $A-$modül ise M ye bir normlu $A-$bimodül denir. Bir normlu sol (sağ) $A-$modül bir normlu lineer uzay olarak tam ise bu modüle bir Banach sol (sağ) $A-$modül denir. M lineer uzayı hem Banach sol $A-$modül hem de Banach sağ $A-$modül ise M ye bir Banach $A-$bimodül denir [11].

Tanım 2.3. $\left(A,\|.\|\right)$ normlu cebirinde bir $\left(e_\alpha\right)_{\alpha\in I}$ ağı verilmiş olsun. Eğer her $x \in A$ için $\lim\limits_{\alpha\in I} e_\alpha x = x$ oluyorsa $\left(e_\alpha\right)_{\alpha\in I}$ ağına A normlu cebiri için sol yaklaşık birim, her $x \in A$ için $\lim\limits_{\alpha\in I} xe_\alpha = x$ oluyorsa $\left(e_\alpha\right)_{\alpha\in I}$ ağına A normlu cebiri için sağ yaklaşık birim denir. Eğer her $x \in A$ için $\lim\limits_{\alpha\in I} e_\alpha x = \lim\limits_{\alpha\in I} xe_\alpha = x$ oluyorsa $\left(e_\alpha\right)_{\alpha\in I}$ ağına A normlu cebiri için yaklaşık birim denir [12].

Tanım 2.4. X,Y ve Z aynı F cismi üzerinde üç normlu lineer uzay olsun. Bir $\phi : X \times Y \to Z$ dönüşümü verilsin. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa ϕ dönüşümüne bilineer dönüşüm denir.

i) Her $y \in Y$ için $x \to \phi\left(x, y\right)$ dönüşümü lineerdir.

ii) Her $x \in X$ için $y \to \phi\left(x, y\right)$ dönüşümü lineerdir.

Eğer her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $\left\|\phi\left(x, y\right)\right\| \leq M\|x\|\|y\|$ olacak şekilde pozitif bir M sayısı varsa ϕ bilineer dönüşümüne sınırlıdır denir. ϕ dönüşümünün normu; $\|\phi\| = \sup\left\{\left\|\phi\left(x, y\right)\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\right\}$ ile tanımlanır [11].

Tanım 2.5. X ve Y, F cismi üzerinde iki normlu uzay, X' ve Y' de sırasıyla X ve Y nin dual uzayları olsun. $X' \times Y'$ uzayından F cismine tanımlı bütün sınırlı, bilineer dönüşümlerin Banach uzayını $BL\left(X', Y'; \mathrm{F}\right)$ ile gösterelim. Herhangi bir $x \in X$ ve $y \in Y$ verilsin. $x \otimes y$, $BL\left(X', Y'; \mathrm{F}\right)$ nin $f \in X'$ ve $g \in Y'$ olmak üzere $x \otimes y\left(f, g\right) = f(x).g(y)$ ile tanımlı elemanı olsun. $\left\{x \otimes y : x \in X, y \in Y\right\}$ kümesinin $BL\left(X', Y'; \mathrm{F}\right)$ uzayında gerdiği uzaya X ve Y nin cebirsel tensör çarpımı denir ve $X \otimes Y$ ile gösterilir [11].

Teorem 2.6. Bir $\phi : X \times Y \to Z$ bilineer dönüşümü verildiğinde her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $\sigma\left(x \otimes y\right) = \phi\left(x, y\right)$ olacak şekilde bir tek $\sigma : X \otimes Y \to Z$ lineer dönüşümü vardır [11].

Tanım 2.7. X ve Y iki normlu uzay olsun. $X \otimes Y$ cebirsel tensör çarpımı üzerinde γ projektif tensör normu; $\gamma(u) = \inf\left\{\sum\limits_i \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum\limits_i x_i \otimes y_i\right\}$ ile tanımlanır. Burada infimum u nun tüm sonlu gösterimleri üzerinden alınır. $X \otimes Y$ uzayının γ normuna göre tamlamasına X ve Y uzaylarının projektif tensör çarpımı denir ve $X \otimes_\gamma Y$ ile gösterilir. Projektif tensör çarpım uzayının her u elemanı $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\|y_i\| < \infty$ olmak üzere $u = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$ şeklindedir [11].

Tanım 2.8. (X,μ), $(\overline{X},\overline{\mu})$ ve (Y,ϑ) üç ölçüm uzayı olsun. Bir T operatörü X ve $\overline{X}$ üzerinde tanımlı basit fonksiyon çiftlerini Y üzerinde tanımlı negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlara dönüştürsün. Eğer f, f_1, f_2 ve g, g_1, g_2 basit fonksiyonları için aşağıdaki koşullar sağlanırsa bu T operatörüne pozitif girişim operatörü denir.

i) $\|T(f,g)\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$

ii) $\|T(f,g)\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$

iii) $\|T(f,g)\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_1$

iv) $T(f_1+f_2,g)=T(f_1,g)+T(f_2,g)$

v) $T(f,g_1+g_2)=T(f,g_1)+T(f,g_2)$ [13].

Tanım 2.9. (X,μ) bir ölçüm uzayı ve $\mathcal{M}(X,\mu)$, X üzerinde hemen hemen her yerde sonlu olan ölçülebilir fonksiyonların sınıfı olsun. $f\in\mathcal{M}(X,\mu), 0<\lambda<\infty$ için

$$\mu_f(\lambda)=\mu\left(x\in X: |f(x)|>\lambda\right)$$

f fonksiyonunun dağılım (veya distribüsyon) fonksiyonu olmak üzere $0<t<\infty$ için

$$f^*(t)=\inf\left\{\lambda:\mu_f(\lambda)\le t\right\}=\sup\left\{\lambda:\mu_f(\lambda)>t\right\}$$

eşitliği ile tanımlı f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun rearrangementi, $0<t<\infty$ için

$$f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds$$

ile tanımlı f^{**} fonksiyonuna da f fonksiyonunun ortalama (averaj) fonksiyonu denir. μ_f, f^* ve f^{**} fonksiyonları pozitif tanımlı, artmayan, sağdan sürekli fonksiyonlardır.

$0<p,q<\infty$ olduğunu kabul edelim. $L^{p,q}(X)$ Lorentz uzayı,

$$\|f\|_{L^{p,q}(X)}=\left(\int_0^\infty\left(t^{1/p}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty$$

olacak şekildeki tüm $f\in\mathcal{M}(X,\mu)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır. $0<p\le\infty$ için $L^{p,\infty}(X)$ uzayı,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X)}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t)<\infty$$

olacak şekildeki tüm $f\in\mathcal{M}(X,\mu)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır.

$L^{p,q}(X)$ Lorentz uzayı üzerinde

$$\| f\|^*_{L^{p,q}(X)} = \begin{cases} \left(\dfrac{q}{p} \displaystyle\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^{**}(t) \right)^q \dfrac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & 0 < p \le \infty, q = \infty \end{cases}$$

ile tanımlı $\|.\|^*_{L^{p,q}(X)}$ fonksiyonu bir normdur. Ayrıca $L^{1,1}(X)$ ve $1 < p \le \infty,\ 1 \le q \le \infty$ için $L^{p,q}(X)$ uzayı $\|.\|^*_{L^{p,q}(X)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır [14]. Üstelik $1 < p < \infty,\ 0 < q \le \infty$ için $C(p,q),\ p$ ve q ya bağlı bir sabit olmak üzere $\| f\|_{L^{p,q}(X)} \le \| f\|^*_{L^{p,q}(X)} \le C(p,q)\| f\|_{L^{p,q}(X)}$ eşitsizliği gerçeklenir [13].

Tanım 2.10. $\mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı negatif olmayan yerel integrallenebilir fonksiyona, yani hemen hemen her yerde $(0,\infty)$ da değerler alan fonksiyona $\mathbb{R}^+$ da bir ağırlık fonksiyonu denir ve w ile gösterilir [9].

$(X,\mu) = (\mathbb{R}^+, w(t)dt)$ alırsak; $0 \le \lambda < \infty$ için

$$\mu_f(\lambda) = \mu\left(x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| > \lambda\right) = w\left(x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| > \lambda\right) = \int_{\{x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| > \lambda\}} w(x)\, d\mu(x)$$

ve $0 < t < \infty$ için $f^*(t) = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) \le t\}$ olur. Böylece $L^{p,q}(X,\mu) = L^{p,q}(\mathbb{R}^+, w(t)dt)$ uzayı elde edilir ve bu uzay $L^{p,q}(w)$ ile gösterilir. $0 < p,q < \infty$ veya $0 < p \le \infty, q = \infty$ için $\Lambda^{p,q}_X(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayı Carro, Raposo ve Soria [9] tarafından

$$\Lambda^{p,q}_X(w) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) : \| f\|_{\Lambda^{p,q}_X(w)} = \| f^*\|_{L^{p,q}(w)} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. $p = q$ olması durumunda

$$\Lambda^{p,p}_X(w) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) : \| f\|_{\Lambda^{p,p}_X(w)} = \| f^*\|_{L^{p,p}(w)} = \| f^*\|_{L^{p}(w)} < \infty \right\}$$

uzayı elde edilir. Burada

$$\| f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^+,w)} = \left[\int_{\mathbb{R}^+} |f^*(t)|^p (w(t))^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \ne \left[\int_X |f(x)|^p (w(x))^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \| f\|_{L^p(X,w)}$$

olduğundan $\Lambda^{p,p}_X(w) \ne L^p(X,w)$ dır. $\Lambda^{p,p}_X(w)$ uzayı $\Lambda^p_X(w)$ ile gösterilir. $w = 1$ olması durumunda

$$\Lambda^{p,q}_X(1) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) : \| f\|_{\Lambda^{p,q}_X(1)} = \| f^*\|_{L^{p,q}(1)} < \infty \right\}$$

ve $\mu_{f^*} = \mu_f$ eşitliği kullanıldığında

$$\|f^*\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^+,1)} = \|f^*\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^+,\mu)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\left(f^*\right)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \|f\|_{L^{p,q}(X)}$$

olduğundan $\Lambda_X^{p,q}(1) = L^{p,q}(X)$ dir [9].

$\Lambda_X^{p,q}(w)$ uzayının dualini ifade etmek için Lorentz uzaylarının başka bir çeşidi olan Γ tanımlanmıştır.

Tanım 2.11. A operatörü; $f \in \mathcal{M}^+(0,\infty)$ ve $t > 0$ olmak üzere $Af(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds$ ile tanımlı Hardy operatörü olsun. $0 < p < \infty$ için

$$\Gamma_X^p(w) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) : \|f\|_{\Gamma_X^p(w)} = \left(\int_0^\infty \left(f^{**}(t)\right)^p w(t)dt\right)^{1/p} < \infty \right\}$$

ve $0 < p,q < \infty$ için $W(t) = \int_0^t w(s)ds$ olmak üzere

$$\Gamma_X^{p,q}(w) = \Gamma_X^q\left(W^{\frac{q}{p}-1} w\right)$$

tanımlanır. Burada $\|f\|_{\Gamma_X^{p,q}(w)} = \|f\|_{\Gamma_X^q\left(W^{\frac{q}{p}-1}w\right)} = \left(\int_0^\infty \left(f^{**}(t)\right)^q W^{\frac{q}{p}-1}(t)w(t)dt\right)^{1/q}$ dur [9].

Tanım 2.12. $0 < p < \infty$, L_{dec}^p; L^p de negatif olmayan artmayan fonksiyonların sınıfı, $L_{dec}^{p,\infty}$; $L^{p,\infty}$ da negatif olmayan artmayan fonksiyonların sınıfı olmak üzere $A : L_{dec}^p(w) \to L^p(w)$ Hardy operatörü sınırlı ise $w \in B_p$, $A : L_{dec}^{p,\infty}(w) \to L^{p,\infty}(w)$ Hardy operatörü sınırlı ise $w \in B_{p,\infty}$ ile gösterilir [9].

$1 < p < \infty$ için $B_p = B_{p,\infty}$ eşitliği vardır [15,16].

Arino ve Muckenhoupt, 1990 yılında $1 \le p < \infty$ olmak üzere $w \in B_p$ olması için gerekli ve yeterli şartın $\int_t^\infty \frac{w(x)}{x^p}dx \le \frac{c}{t^p}\int_0^t w(x)dx$ eşitsizliğinin sağlanması olduğunu göstermiştir [17].

Carro, Garcia ve Soria, 1996 yılında $w \in B_{1,\infty}$ olması için gerekli ve yeterli şartın $s \le t$ iken $\frac{1}{t}\int_0^t w(x)dx \le C.\frac{1}{s}\int_0^s w(x)dx$ eşitsizliğinin sağlanması olduğunu elde etmiştir [15].

Örnek 2.13. $0 < a < 1, 0 < b < \infty$ olmak üzere $w(x) = x^{-a} + b$ ile tanımlı w ağırlık fonksiyonu $B_{1,\infty}$ sınıfına aittir, ancak B_1 sınıfına ait değildir.

Çözüm:

$$\frac{1}{t}\int_0^t w(x)dx=\frac{1}{t}\int_0^t\left(x^{-a}+b\right)dx=\frac{1}{t}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^t\left(x^{-a}+b\right)dx$$

$$=\frac{1}{t}\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{x^{1-a}}{1-a}+bx\right)\Bigg|_\varepsilon^t$$

$$=\frac{1}{t}\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\left(\frac{t^{1-a}}{1-a}+bt\right)-\left(\frac{\varepsilon^{1-a}}{1-a}+b\varepsilon\right)\right]$$

$$=\frac{t^{-a}}{1-a}+b$$

ve benzer şekilde $\frac{1}{s}\int_0^s w(x)dx=\frac{s^{-a}}{1-a}+b$ dir. $s\le t$ iken $t^{-a}\le s^{-a}$ olacağından $\frac{1}{s}\int_0^s w(x)dx\le\frac{1}{t}\int_0^t w(x)dx$ elde edilir. Böylece istenen eşitsizlik sağlanmış olur. Yani $w\in B_{1,\infty}$ dur. Ancak

$$\int_t^\infty\frac{w(x)}{x}dx=\int_t^\infty\frac{x^{-a}+b}{x}dx$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_t^R x^{-a-1}+b\frac{1}{x}dx$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(\frac{x^{-a}}{-a}+b\ln x\right)\Bigg|_t^R$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left[\left(\frac{R^{-a}}{-a}+b\ln R\right)-\left(\frac{t^{-a}}{-a}+b\ln t\right)\right]=\infty$$

ve $\frac{1}{t}\int_0^t w(x)dx=\frac{t^{-a}}{1-a}+b$ olduğundan $\int_t^\infty\frac{w(x)}{x}dx\le\frac{c}{t}\int_0^t w(x)dx$ olacak şekilde $c>0$ yoktur. Bu yüzden $w\notin B_1$ dir.

Tanım 2.14. G bir yerel kompakt grup olmak üzere G üzerinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif, regüler μ Borel ölçümüne sol (sağ) Haar ölçümü denir.

i) Her $E\subset G$ kompakt kümesi için $\mu(E)<\infty$ dir.

ii) Her $E\subset G$ Borel kümesi ve her $x\in G$ için $\mu(xE)=\mu(E)$ $\left(\mu(Ex)=\mu(E)\right)$ dir [18].

Her yerel kompakt grup bir sol Haar ölçümüne sahiptir [18].

Tanım 2.15. G bir yerel kompakt grup ve μ, G üzerinde tanımlı sol Haar ölçümü olsun. Eğer μ sol Haar ölçümü aynı zamanda sağ Haar ölçümü ise G grubuna ünimodüler grup denir [18].

G değişmeli, diskret veya kompakt bir grup ise ünimodülerdir [18].

Tanım 2.16. (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı ve $A\in\Sigma$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa A kümesine bir atom denir.

i) $\mu(A)>0$ dır.

ii) $B\subset A$ olan herhangi bir $B\in\Sigma$ için $\mu(B)=0$ veya $\mu(A)=\mu(B)$ dır.

Eğer pozitif ölçümlü her ölçülebilir küme bir atom içerirse μ ölçümüne atomik ölçüm, μ için Σ de hiçbir atom bulunamıyorsa μ ölçümüne atomik olmayan ölçüm denir. μ atomik bir ölçüm ise (X,Σ,μ) ölçüm uzayına atomik ölçüm uzayı, μ atomik olmayan bir ölçüm ise (X,Σ,μ) ölçüm uzayına atomik olmayan ölçüm uzayı denir [19].

Tanım 2.17. (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $\mu(E_n)<\infty$ ve $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ olacak şekilde bir $(E_n)\subset\Sigma$ küme dizisi varsa (X,Σ,μ) uzayına $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı denir [19].

Lemma 2.18, Lemma 2.19, Teorem 2.20 ve Teorem 2.21 de G bir yerel kompakt grup, λ, G nin bir sol Haar ölçümü ve (G,λ), $\sigma-$sonlu atomik olmayan ölçüm uzayı olarak alınacaktır.

Lemma 2.18. G bir ünimodüler yerel kompakt grup, T bir girişim operatörü, $0<p_1,p_2,q_1,q_2<\infty$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1$, c bir sabit olmak üzere $w\geq c>0$, $p=\min\{p_1,p_2\}$ olmak üzere $w\in B_p$ ve $f\in\Lambda^{p_1,q_1}(w), g\in\Lambda^{p_2,q_2}(w)$ için $k=T(f,g)=f*g$ olsun. O halde $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1+\frac{1}{r}$, $s\geq 1$ ve $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\geq\frac{1}{s}$ olmak üzere $k\in\Lambda^{r,s}(w)$ ve $\|k\|_{\Lambda^{r,s}(w)}\leq C.\|f\|_{\Lambda^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda^{p_2,q_2}(w)}$ dır [8].

Lemma 2.19. $C>0$ olmak üzere $W(t)\geq Ct$, $w\in B_{1,\infty}$ ve $1<p<\infty, 1\leq q<\infty$ olsun. O halde her $f\in\Lambda_G^{p,q}(w)$ için $f*a_\alpha\to f$ ve $\|a_\alpha\|_{\Lambda_G^1(w)}=1$ olacak şekilde $\Lambda_G^1(w)$ da bir $\{a_\alpha\}$ yaklaşık birimi vardır [8].

Teorem 2.20. G bir ünimodüler yerel kompakt grup, $1<p<\infty, 1\leq q<\infty$, $w\in B_{1,\infty}$ ya da $p=q=1$, $w\in B_1$ ve c bir sabit olmak üzere $w\geq c>0$ olsun. O halde $\Lambda_G^{p,q}(w)$ ağırlıklı Lorentz uzayı $f\in\Lambda_G^{p,q}(w),\varphi\in\Lambda_G^1(w)$ için $(f,\varphi)\to\tilde{\varphi}*f$ dönüşümü ile birlikte bir sağ $\Lambda_G^1(w)-$ modüldür [8].

Teorem 2.21. $0<p<\infty$ ve $0<q_1\leq q_2<\infty$ ise $\Lambda_G^{p,q_1}(w)\subset\Lambda_G^{p,q_2}(w)$ dir [9].

Bu kesimin devamında ve bulgular bölümünde G bir ünimodüler yerel kompakt grup, λ, G nin bir sol Haar ölçümü ve (G,λ), $\sigma-$sonlu atomik olmayan ölçüm uzayı,

$$1<p_1,p_2<\infty,\ 1\leq q_1,q_2<\infty,$$

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1,\ \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1+\frac{1}{r},\ r>0,\ \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\geq\frac{1}{s},\ s\geq 1,$$

$c>0$ olmak üzere $w\geq c>0$,

$p=\min\{p_1,p_2\}$ olmak üzere $w\in B_p$ olsun. $\tilde{f}(x)=f(-x)$ olmak üzere her $\lambda\geq 0$ için $\mu_f(\lambda)=\mu_{\tilde{f}}(\lambda)$ olduğundan $\|f^*\|_{L^{p,q}(w)}=\left\|\left(\tilde{f}\right)^*\right\|_{L^{p,q}(w)}$ ve dolayısıyla $\|f\|_{\Lambda_G^{p,q}(w)}=\|\tilde{f}\|_{\Lambda_G^{p,q}(w)}$ dır. Yani $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ iken $\tilde{f}\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ olur. Böylece Lemma 2.18 gereği her $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ için

$$\left\|T\left(\tilde{f},g\right)\right\|_{\Lambda_G^{r,s}(w)}\leq C.\|\tilde{f}\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}=C.\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$$

eşitsizliği yazılır. O halde $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\times\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ uzayından $\Lambda_G^{r,s}(w)$ uzayına bir k bilineer dönüşümünü $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere $k(f,g)=\tilde{f}*g$ şeklinde tanımlayabiliriz. Bu k dönüşümü iyi tanımlıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|k\| &= \sup\left\{\frac{\|k(f,g)\|_{\Lambda_G^{r,s}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}} : \|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\leq 1, \|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{\|\tilde{f}*g\|_{\Lambda_G^{r,s}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}} : \|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\leq 1, \|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\leq 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\frac{C.\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}}{\|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}} : \|f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\leq 1, \|g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\leq 1\right\}=C
\end{aligned}$$

olduğundan k dönüşümü sınırlıdır. O halde Teorem 2.6 gereği bu sınırlı k bilineer dönüşümüne her $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ için $K(f\otimes g)=\tilde{f}*g$ olacak şekilde $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\otimes_\gamma\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ uzayından $\Lambda_G^{r,s}(w)$ uzayına tanımlı bir tek K lineer dönüşümü karşılık gelir. Yine $\|K\|\leq C$ olup K dönüşümü de sınırlıdır [8].

Tanım 2.22. K lineer dönüşümü altında $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\otimes_\gamma\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ uzayının görüntüsünü $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ ile gösterelim. Böylece

$$A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)=\left\{\begin{array}{l} h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i*g_i : f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w), K\left(\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i\otimes g_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i*g_i, \\ \sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}<\infty \end{array}\right\}$$

olur. Her $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için $f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere

$$|||h|||=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} : h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i*g_i,\ f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)\right\}$$

ile tanımlanan $|||.|||$ fonksiyonu bir normdur. Böylece $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı bir normlu uzay olur [8].

Teorem 2.23. $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı $|||.|||$ normuna göre bir Banach uzayıdır [10].

III. BULGULAR

Önerme 3.1. $1<q_1\le n_1<\infty,\ 1<q_2\le n_2<\infty$ ise $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)\subset A_{p_1,n_1}^{p_2,n_2}(G,w)$ kapsaması vardır.

İspat. Herhangi bir $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ alalım. Bu durumda $f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w),\ g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere $h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i*g_i,\ \sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}<\infty$ yazılır. $q_1\le n_1, q_2\le n_2$ olduğundan Teorem 2.21 gereği $\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)\subset\Lambda_G^{p_1,n_1}(w)$ ve $\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)\subset\Lambda_G^{p_2,n_2}(w)$ dır. Buradan $f_i\in\Lambda_G^{p_1,n_1}(w)$ ve $g_i\in\Lambda_G^{p_2,n_2}(w)$ elde edilir. Yine Teorem 2.21 den dolayı $\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,n_1}(w)}\le\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}$ ve $\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,n_2}(w)}\le\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$ dır. Buradan

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,n_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,n_2}(w)}\le\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}<\infty$$

olup $h\in A_{p_1,n_1}^{p_2,n_2}(G,w)$ bulunur. Bu durumda $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)\subset A_{p_1,n_1}^{p_2,n_2}(G,w)$ kapsaması gerçeklenir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.2. $1<q_1\le n_1<\infty,\ 1<q_2\le n_2<\infty$ olmak üzere $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)=A_{p_1,n_1}^{p_2,n_2}(G,w)$ olması için gerek ve yeter şart $q_1=n_1$ ve $q_2=n_2$ olmasıdır.

İspat. $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)=A_{p_1,n_1}^{p_2,n_2}(G,w)$ olsun. Bu durumda Önerme 3.1 gereği $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)\subset A_{p_1,n_1}^{p_2,n_2}(G,w)$ kapsamasından $q_1\le n_1,\ q_2\le n_2$ ve $A_{p_1,n_1}^{p_2,n_2}(G,w)\subset A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ kapsamasından $n_1\le q_1,\ n_2\le q_2$ yazılır. Böylece $q_1=n_1,\ q_2=n_2$ dir.

Tersine, $q_1=n_1,\ q_2=n_2$ olsun. Bu durumda $n_1\le q_1,\ n_2\le q_2$ ve $q_1\le n_1,\ q_2\le n_2$ yazılabilir. O halde Önerme 3.1 gereği $A_{p_1,n_1}^{p_2,n_2}(G,w)\subset A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ ve $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)\subset A_{p_1,n_1}^{p_2,n_2}(G,w)$ dır. Buradan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)=A_{p_1,n_1}^{p_2,n_2}(G,w)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.3. $C>0$ olmak üzere $W(t)\ge Ct$ ve $w\in B_{1,\infty}$ olsun. Her $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için $|||h-(\tilde{a}_\alpha*b_\beta)*h|||\to 0$ ve $(\tilde{a}_\alpha*b_\beta)$, $\Lambda_G^1(w)$ uzayında sınırlı olacak şekilde $\Lambda_G^1(w)$ uzayının $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ ve $(b_\beta)_{\beta\in I}$ yaklaşık birimleri vardır.

İspat. Lemma 2.19 gereği her $f\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ için $\|f-a_\alpha*f\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\to 0$ ve her $\alpha\in I$ için $\|a_\alpha\|_{\Lambda_G^1(w)}=1$ olacak şekilde $\Lambda_G^1(w)$ uzayında bir $\{a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ yaklaşık birimi vardır. Yine her $g\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ için $\|g-b_\beta*g\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\to 0$ ve her $\beta\in J$ için $\|b_\beta\|_{\Lambda_G^1(w)}=1$ olacak şekilde $\Lambda_G^1(w)$ uzayında bir $\{b_\beta\}_{\beta\in J}$ yaklaşık birimi vardır. Her $\alpha\in I$ için $a_\alpha\in\Lambda_G^1(w)$ olduğundan $\tilde{a}_\alpha\in\Lambda_G^1(w)$

dır. Buradan her $\alpha \in I, \beta \in J$ için $\tilde{a}_\alpha * b_\beta \in \Lambda_G^1(w)$ olur. $\|a_\alpha\|_{\Lambda_G^1(w)} = \|\tilde{a}_\alpha\|_{\Lambda_G^1(w)} = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\|\tilde{a}_\alpha * b_\beta\|_{\Lambda_G^1(w)} \leq C.\|a_\alpha\|_{\Lambda_G^1(w)} \|b_\beta\|_{\Lambda_G^1(w)} = C$$

bulunur. Yani $(\tilde{a}_\alpha * b_\beta)$, $\Lambda_G^1(w)$ uzayında sınırlıdır.

Herhangi bir $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ alalım. O halde $f_i \in \Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g_i \in \Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere $h = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i * g_i, \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} < \infty$ yazılır.

$\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ ve $\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ Banach uzaylarının $\Lambda_G^1(w)$ Banach cebiri üzerinde

$$\Lambda_G^{p_1,q_1}(w) \times \Lambda_G^1(w) \to \Lambda_G^{p_1,q_1}(w), (f,\varphi) \to \tilde{\varphi} * f$$

ve

$$\Lambda_G^{p_2,q_2}(w) \times \Lambda_G^1(w) \to \Lambda_G^{p_2,q_2}(w), (f,\varphi) \to \tilde{\varphi} * f$$

dönüşümleri ile bir Banach sağ $\Lambda_G^1(w)-$modülü olduğu biliniyor [8]. Bu durumda her $\alpha \in I, \beta \in J$ için

$$\|a_\alpha * f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \leq c_1 \|a_\alpha\|_{\Lambda_G^1(w)} \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} = c_1 \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}$$
$$\|b_\beta * g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \leq c_2 \|b_\beta\|_{\Lambda_G^1(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} = c_2 \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$$

eşitsizlikleri gereği $a_\alpha * f_i \in \Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $b_\beta * g_i \in \Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olur. Yine

$$(\tilde{a}_\alpha * b_\beta) * h = (\tilde{a}_\alpha * b_\beta) * \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i * g_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{a}_\alpha * \tilde{f}_i) * (b_\beta * g_i)$$

dır. Ayrıca her $x \in G$ için

$$\begin{aligned}
(f_i * a_\alpha)^{\sim}(x) = (f_i * a_\alpha)(-x) &= \int_G f_i(y) a_\alpha(-x-y)\, d\mu(y) \\
&\overset{\substack{x+y=u \\ dy=du}}{=} \int_G f_i(u-x) a_\alpha(-u)\, d\mu(u) \\
&= \int_G \tilde{a}_\alpha(u) \tilde{f}_i(x-u)\, d\mu(u) \\
&= \tilde{a}_\alpha * \tilde{f}_i(x)
\end{aligned}$$

olduğundan $(f_i * a_\alpha)^{\sim} = \tilde{a}_\alpha * \tilde{f}_i$ yazılır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(\tilde{a}_\alpha * b_\beta\right) * h\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_i * a_\alpha\right)^{\sim} * \left(b_\beta * g_i\right)\right\| \\
&\le c\sum_{i=1}^{\infty}\left\|a_\alpha * f_i\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|b_\beta * g_i\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \\
&\le c\sum_{i=1}^{\infty} c_1\left\|f_i\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} c_2\left\|g_i\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \\
&= cc_1c_2\sum_{i=1}^{\infty}\left\|f_i\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} < \infty
\end{aligned}
$$

ve dolayısıyla $\left(\tilde{a}_\alpha * b_\beta\right) * h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ olur. Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
h-\left(\tilde{a}_\alpha * b_\beta\right) * h &= \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i - \left(\tilde{a}_\alpha * b_\beta\right) * \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_\alpha * \tilde{f}_i\right) * \left(b_\beta * g_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_\alpha * \tilde{f}_i\right) * g_i + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_\alpha * \tilde{f}_i\right) * g_i - \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i + \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i \\
&\quad - \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * \left(b_\beta * g_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * \left(b_\beta * g_i\right) - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_\alpha * \tilde{f}_i\right) * \left(b_\beta * g_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_i - \left(\tilde{a}_\alpha * \tilde{f}_i\right)\right) * g_i + \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * \left(g_i - \left(b_\beta * g_i\right)\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\tilde{f}_i - \left(\tilde{a}_\alpha * \tilde{f}_i\right)\right) * \left(g_i - \left(b_\beta * g_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(f_i - \left(f_i * a_\alpha\right)\right)^{\sim} * g_i + \sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * \left(g_i - \left(b_\beta * g_i\right)\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{\infty}\left(f_i - \left(f_i * a_\alpha\right)\right)^{\sim} * \left(g_i - \left(b_\beta * g_i\right)\right)
\end{aligned}
$$

dır. Bu eşitlikte norma geçilirse

$$
\begin{aligned}
\left\|h-\left(\tilde{a}_\alpha * b_\beta\right) * h\right\| &\le c_3\sum_{i=1}^{\infty}\left\|f_i - \left(f_i * a_\alpha\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} + c_4\sum_{i=1}^{\infty}\left\|f_i\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i - \left(b_\beta * g_i\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \\
&\quad + c_5\sum_{i=1}^{\infty}\left\|f_i - \left(f_i * a_\alpha\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i - \left(b_\beta * g_i\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\| f_i-\left(f_i*a_\alpha\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}+\| f_i*a_\alpha\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\right)\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}+c_1\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\right)\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$$

$$=\left(1+c_1\right)\sum_{i=1}^{\infty}\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}<\infty,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i-\left(b_\beta*g_i\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} \le \sum_{i=1}^{\infty}\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left(\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}+\|b_\beta*g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty}\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left(\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}+c_2\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\right)$$

$$=\left(1+c_2\right)\sum_{i=1}^{\infty}\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}<\infty,$$

ve

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\| f_i-\left(f_i*a_\alpha\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i-\left(b_\beta*g_i\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}+\| f_i*a_\alpha\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\right)\left(\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}+\|b_\beta*g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}+c_1\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\right)\left(\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}+c_2\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\right)$$

$$=\left(1+c_1\right)\left(1+c_2\right)\sum_{i=1}^{\infty}\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}<\infty$$

dır. Böylece

$$c_3\sum_{i=1}^{\infty}\left\| f_i-\left(f_i*a_\alpha\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}+c_4\sum_{i=1}^{\infty}\| f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i-\left(b_\beta*g_i\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$$

$$+c_5\sum_{i=1}^{\infty}\left\| f_i-\left(f_i*a_\alpha\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\left\|g_i-\left(b_\beta*g_i\right)\right\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}$$

toplamı sınırlı olur.

Diğer yandan $f_i\in\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$, $g_i\in\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olduğundan $\| f_i-a_\alpha*f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}\to 0$ ve $\|g_i-b_\beta*g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}\to 0$ dır. Bu durumda $\lim\limits_{\alpha,\beta\in I\times J}\left\|h-\left(\tilde{a}_\alpha*b_\beta\right)*h\right\|=0$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.4. $w\in B_{1,\infty}$ ve c bir sabit olmak üzere $w\ge c>0$ olsun. O halde $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı bir Banach sağ $\Lambda_G^1(w)-$modüldür.

İspat. Herhangi bir $f\in\Lambda_G^1(w)$ ve $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ alalım. $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)\times\Lambda_G^1(w)\to A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w),(h,f)\to f*h$ dönüşümü ile $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının bir sağ

$\Lambda_G^1(w)-$ modül olduğunu gösterelim. $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ için $f_i \in \Lambda_G^{p_1,q_1}(w), g_i \in \Lambda_G^{p_2,q_2}(w)$ olmak üzere $h = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i * g_i, \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} < \infty$ yazılır. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\left\|\left| f * h \right|\right\| &= \left\|\left| f * \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i * g_i \right|\right\| = \left\|\left| \sum_{i=1}^{\infty} \left(f * \tilde{f}_i \right) * g_i \right|\right\| \\
&= \left\|\left| \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_i * \tilde{f} \right)^{\sim} * g_i \right|\right\| \le c_1 \sum_{i=1}^{\infty} \left\| f_i * \tilde{f} \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)}
\end{aligned}
$$

dir.

$\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)$ uzayının bir sağ $\Lambda_G^1(w)-$ modül olduğunu Teorem 2.20 den biliyoruz. O halde

$$
\left\| f_i * \tilde{f} \right\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \le c_2 \left\| \tilde{f} \right\|_{\Lambda_G^1(w)} \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} = c_2 \|f\|_{\Lambda_G^1(w)} \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)}
$$

olur. Böylece

$$
\left\|\left| f * h \right|\right\| \le c_1 \sum_{i=1}^{\infty} c_2 \|f\|_{\Lambda_G^1(w)} \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} = c_1 c_2 \|f\|_{\Lambda_G^1(w)} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\Lambda_G^{p_1,q_1}(w)} \|g_i\|_{\Lambda_G^{p_2,q_2}(w)} < \infty
$$

elde edilir. Bu ise $f * h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ demektir. Bu durumda $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w) \times \Lambda_G^1(w) \to A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w), (h,f) \to f * h$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. Son eşitsizlikte toplam üzerinden infimum alınırsa $\left\|\left| f * h \right|\right\| \le c \|f\|_{\Lambda_G^1(w)} \left\|\left| h \right|\right\|$ yazılır. $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının $\left\|\left| . \right|\right\|$ normuna göre bir Banach uzayı olduğunu Teorem 2.23 den biliyoruz. O halde $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayı bir Banach sağ $\Lambda_G^1(w)-$ modüldür. Böylece ispat tamamlanır.

IV. SONUÇ

Bu çalışmada, Avcı ve Gürkanlı [7] nın ele aldığı yöntemlerle Li ve Sun [8] tarafından tanımlanan $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının bazı özellikleri araştırılmıştır. Öncelikle bu uzaydaki q ve n sayılarının durumuna göre kapsama özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bazı özel w ağırlıkları için herhangi bir $h \in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ verildiğinde $\left\|\left| h - \left(\tilde{a}_\alpha * b_\beta \right) * h \right|\right\| \to 0$ ve $\left(\tilde{a}_\alpha * b_\beta \right)$, $\Lambda_G^1(w)$ uzayında sınırlı olacak şekilde $\Lambda_G^1(w)$ uzayının $\left(a_\alpha \right)_{\alpha \in I}$ ve $\left(b_\beta \right)_{\beta \in I}$ yaklaşık birimlerinin var olduğu ve $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayının bir Banach sağ $\Lambda_G^1(w)-$modül olduğu elde edilmiştir. Bu çalışmadan sonra, $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G,w)$ uzayındaki fonksiyonlara trigonometrik polinomlarla düz ve ters yaklaşım problemlerinin irdelenmesi planlanmaktadır.

V. KAYNAKLAR

[1] G. G. Lorentz, “Some new functional spaces,” *Annals of Mathematics*, vol. 51, no. 1, pp. 37-55, 1950.

[2] G. G. Lorentz, “On the theory of spaces Λ,” *Pacific Journal of Mathematics,* vol. 1, no. 3, pp. 411-429, 1951.

[3] P. L. Butzer, H. Berens, *Semi-groups of Operators and Approximation*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1967.

[4] J. Bergh, J. Liifstrtim, *Interpolation Spaces, An Introduction*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1976.

[5] J. Creekmore, *Geometry of Lorentz spaces*, Ph.D. Dissertation, Kent State University, 1979.

[6] S. Reisner, “A factorization theorem in Banach lattices and its application to Lorentz spaces,” *Annales de l'institut Fourier*, vol. 31, no. 1, pp. 239-255, 1981.

[7] H. Avcı, A. T. Gürkanlı, “Multipliers and tensor products of $L(p,q)$ Lorentz spaces,” *Acta Mathematica Scientia*, vol. 27(B), no. 1, pp. 107-116, 2007.

[8] H. Li, Q. Sun, “Multipliers and Tensor Products of the Weighted Lorentz Spaces $\Lambda_G^{p,q}(w)$,” *Georgian Mathematical Journal*, vol. 19, pp. 721-740, 2012.

[9] M. J. Carro, J. A. Raposo, J. Soria, *Recent Developments in the Theory of Lorentz Spaces and Weighted Inequalities*, American Mathematical Society, 2007.

[10] N. Değirmen, İ. Değirmen, “A_{p1,q1}^{p2,q2}(G,w) Uzayı ve Bazı Topolojik Özellikleri Üzerine,” *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, c. 11, s. 2, ss. 1468-1480, 2021.

[11] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer Verlag, Berlin, 1973.

[12] R. S. Doran, J. Wichmann, *Approximate Identities and Factorization in Banach Modules*, Lecture Notes in Mathematics,768, Springer Verlag, 1979.

[13] L. Y. H. Yap, “Some Remarks on Convolution Operators and $L(p,q)$ Spaces,” *Duke Mathematical Journal*, vol. 36, pp. 647-658, 1969.

[14] R. Hunt, “On $L(p,q)$ Spaces,” *L'Enseignement Mathématique*, vol. 12, pp. 249-276, 1966.

[15] M. J. Carro, A. Garcia del Amo, J. Soria, “Weak-Type Weights and Normable Lorentz Spaces,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 124, no. 3, pp. 849-857, 1996.

[16] C. J. Neugebauer, “Weighted Norm Inequalities for Averaging Operators of Monotone Functions,” *Publicacions Matematiques*, vol. 35, pp. 429-447, 1991.

[17] M. A. Arino, B. Muckenhoupt, “Maximal Functions Classical Lorentz Spaces and Hardy's Inequality with Weights for Nonincreasing Functions,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 320, no. 2, pp. 727-735, 1990.

[18] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRS Press, Boca Raton, Florida, 1995.

[19] P. R. Halmos, *Measure Theory,* 2. baskı, Springer Verlag, New York, 1974.