Araştırma Makalesi / Research Article

Magneto-Elektro-Elastik Çubuk Modelinin F Açılım Metodu ile Tam Çözümleri

Nisa ÇELİK*

Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
(ORCID: 0000-0003-1209-991X)

Öz
Bu çalışmada, dördüncü mertebeden lineer olmayan, magneto-elektro-elastik (MEE) çubuktaki yalnız gezen dalgalara karşılık gelen MEE kısmi diferensiyel denklemi ele alındı. Denklemin gezici dalga çözümlerini araştırmak için, F-açılım metodu kullanıldı. Metodun içerdiği farklı durumlar için Jacobi eliptik fonksiyonlar yardımı ile tam çözümler oluşturuldu. $m \to 0$ için trigonometrik, $m \to 1$ için hiperbolik fonksiyonlar ve bunların kombinasyonlarını içeren çözümler elde edildi. Son olarak çözümlerin farklı parametrelerdeki bazı özel değerleri için grafikleri Maple programı ile çizdirilerek incelenmeye sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem, Magneto-Elektro-Elastik çubuk, F açılım Yöntemi, Jacobi eliptik fonksiyon.

Exact Solutions of Magneto-Electro-Elastic Rod Model with F Expansion Method

Abstract
In this study, the MEE partial differential equation corresponding to solitary waves in a fourth order nonlinear magneto-electro-elastic (MEE) rod is examined. F-expansion method was used to investigate the traveling wave solutions of the equation. Complete solutions were created with using the Jacobi elliptic functions for the different situations included in the method. Using trigonometric functions and hyperbolic functions solutions were obtained for $m \to 0$ and $m \to 1$ respectively. Finally, using some special values of the solutions in different parameters, the graphs were plotting with Maple program and presented for examining.

Keywords: Nonlinear partial differential equation, Magneto-Electro-Elastic rod, F expansion method, Jacobi elliptic function.

1. Giriş

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler birçok fiziksel olayın incelenmesi sonucunda ortaya çıkan modellerdir. Bu denklemlerin analitik ve bazı durumlarda sayısal çözümleri somut matematiksel formülasyonları nedeni ile çeşitli bilim dallarında önemli bir yere sahiptir. Bu tür modeller optik, biyofizik, kuantum fiziği, kuantum mekaniği, kimyasal fizik, akışkanlar mekaniği, finans hatta tıp vb. gibi birçok bilim dalında gözlemlenebilir. Bu modellerin her alanda farklı bir biçimde ortaya çıkması lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözüm metodları üzerinde de olumlu etki oluşturmuş, araştırmacılar bu denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için birçok metod geliştirmişlerdir. Bunlardan bazıları Lie simetri yaklaşımı [1-4], ilk integral metodu [5, 6], tanh-fonksiyon metodu [7], (G'/G) açılım metodu [8], Jacobi eliptik metodu [9], exp fonksiyon açılım metodu [10, 11], Kudryashov metodu [12,13], genişletilmiş deneme denklem metodu [14], iyileştirilmiş Bernoulli alt-denklem metodu [15, 16], yeni geliştirilmiş doğrudan cebrik metod [17] vb. metotlardır. Manyeto-elektro-elastik (MEE) kullanımının artmasıyla çeşitli mühendislik alanlarındaki yapılar (sensörler, aktüatörler, vb.) ve MEE ortamındaki dalga yayılımı da birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir.

*Sorumlu yazar: nisa@uludag.edu.tr
Geliş Tarihi: 02.02.2021, Kabul Tarihi: 18.04.2021

Xue ve ark. [18], 2011 yılında yaptıkları çalışmada MEE malzemeleri için temel denklemleri gözden geçirmiş ve aşağıda verilen MEE çubuk daireselindeki uzunlamasına dalga denklemini modellemişlerdir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{c_0^2}{2}u^2 + N\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{1}$$

Burada c_0 uzunlamasına dalga hızı, N dağılım parametresidir. Bu parametreler çubuğun malzeme özelliklerine ve geometrisine bağlıdır. Aynı çalışmada Xue ve ark. [18] denklemin Jacobi eliptik fonksiyon çözümlerini elde etmişlerdir. Denklemin farklı yazarlar tarafından çeşitli yöntemlerle çözümleri yapılmıştır. Bunlardan bazıları, Lie simetri analizi ve korunum kanunları [19], r yi doğrusal uzunlamasına dalga hızı olarak alıp modelde $c_0 = r$ alarak modifiye edilmiş üstel fonksiyon metodu [20], $a = -c_0^2, b = \frac{-c_0^2}{2}, c = -N$ alarak gezen dalga hipotezi ve ${G'}/{G}$ açılım metodu [21], sin–cos fonksiyon metodu ve rasyonel sin–cos fonksiyon metodu [22], genişletilmiş deneme denklem dönüşüm metodu ve genişletilmiş doğrudan cebirsel denklem metodu [23], genişletilmiş deneme denklem metodu [24] biçimindedir.

2. Materyal ve Metot

Bu çalışmada ele alınacak olan F açılım metodu ilk olarak Yubin Zhou ve ark. [25] tarafından 2003 yılında yayınlanan çalışmalarında, değişken katsayılı KdV denkleminin periyodik dalga çözümlerini bulmak için kullanılmıştır. Daha sonra bu metod farklı yazarlar tarafından lineer olmayan Schrödinger denklemine [26], genelleştirilmiş Hirota-Satsuma denklemine [27], Ostrovsky denklemine [28], Kudryashov-Sinelslchikov denklemine [29], Elektro-Elastik denklemine [30] vb. uygulanmıştır.

Bu kısımda F açılım yönteminin teorik incelemesi yapılacaktır.

$$\boldsymbol{P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \cdots) = 0} \tag{1}$$

kısmi diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (1) denkleminde $\zeta = k(x - ct)$ ve $u = U(\zeta)$ değişken değişimi yapılırsa, (1) denklemi

$$Q(U, U', U'', U''', \cdots) = 0 \tag{2}$$

adi diferensiyel denklemine dönüşür. (2) denkleminin çözümlerinin

$$U(\zeta) = \sum_{i=0}^{n} A_i F_i(\zeta) \tag{3}$$

ansatz fonksiyonu biçiminde olduğunu varsayalım. Burada n en yüksek mertebeden lineer terim ile lineer olmayan en yüksek dereceli terim arasında dengeleme prensibi kullanılarak elde edilecek olan pozitif tamsayıdır. $F(\zeta)$ ise P, Q, R sabitler olmak üzere aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar:

$$F' = \sqrt{PF^4 + QF^2 + R} \tag{4}$$

(4) denkleminden aşağıdaki eşitlikler de elde edilebilir.

$$\begin{aligned} F'' &= 2PF^3 + QF \\ F''' &= (6PF^2 + Q)F' \\ F^{\text{IV}} &= 24P^2F^5 + 20PQF^3 + (12PR + Q^2)F \end{aligned} \tag{5}$$

(4) ve (5) kullanılarak (3) fonksiyonu (2) denkleminde yerine yazılır. Elde edilen eşitlik $F^i(F')^j$ terimlerine göre düzenlenir. $F^i(F')^j$ terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi A_i $(i = 0,1,..,n)$, k ve c ye göre Maple programı yardımı ile çözülür. Elde edilen A_i $(i = 0,1,..,n)$ katsayıları (3) de yerine yazılarak $U(\zeta)$ fonksiyonu

oluşturulur. Bu fonksiyondaki P, Q, R, F fonksiyonları aşağıdaki tabloya göre seçilerek (2) denkleminin e Eliptik fonksiyon çözümleri elde edilir.

Tablo 1. (3) çözümünü oluşturmak için seçilecek P, Q, R, F değerleri

Durum	P	Q	R	$F(\zeta)$
1	m^2	$-(1+m^2)$	1	$sn\,\zeta$
2	$-m^2$	$2m^2-1$	$1-m^2$	$cn\,\zeta$
3	1	$-(1+m^2)$	m^2	$ns\,\zeta$
4	1	$2-m^2$	$1-m^2$	$cs\,\zeta$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$ns\,\zeta+cs\,\zeta$
6	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$ns\,\zeta-cs\,\zeta$
7	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{sn\,\zeta}{1+cn\,\zeta}$
8	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{sn\,\zeta}{1-cn\,\zeta}$
9	$-(m^2+2m+1)B^2$	$2m^2+2$	$\frac{-m^2+2m-1}{B^2}$	$\frac{m\,sn^2\,\zeta-1}{B(m\,sn^2\,\zeta+1)}$
10	1	$-(1+m^2)$	m^2	$dc\,\zeta$
11	1-m^2	$2-m^2$	1	$sc\,\zeta$
12	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$nc\,\zeta+sc\,\zeta$
13	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$nc\,\zeta-sc\,\zeta$
14	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{cn\,\zeta}{1+sn\,\zeta}$
15	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{cn\,\zeta}{1-sn\,\zeta}$
16	1	$2m^2-1$	$-m^2(1-m^2)$	$ds\,\zeta$

Jacobi eliptik fonksiyonlar $sn\zeta, cn\zeta, dn\zeta$ olup sırasıyla Jacobian eliptik sinüs fonksiyonu, Jacobian eliptik kosinüs fonksiyonu ve Jacobian eliptik delta fonksiyonu olarak isimlendirilirler. Diğer Jacobian fonksiyonları bu üç tür fonksiyon yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$ns\zeta = \frac{1}{sn\zeta}, \quad nc\zeta = \frac{1}{cn\zeta}, \quad nd\zeta = \frac{1}{dn\zeta}$$
$$sc\zeta = \frac{cn\zeta}{sn\zeta}, \quad cs\zeta = \frac{sn\zeta}{cn\zeta}, \quad ds\zeta = \frac{dn\zeta}{sn\zeta}, \quad sd\zeta = \frac{sn\zeta}{dn\zeta}$$

Ayrıca, bu fonksiyonlar aşağıdaki formülleri sağlar.

$$sn^2\zeta + cn^2\zeta = 1, \quad dn^2\zeta + m^2\,sn^2\zeta = 1, \quad ns^2\zeta = 1 + cn^2\zeta$$

$ns^2\zeta = m^2 + m^2 ds^2\zeta$, $sc^2\zeta + 1 = nc^2\zeta$, $m^2 sd^2\zeta + 1 = nd^2\zeta$

Jacobian-eliptik fonksiyonlar, $m \to 1$ için limit alındığında aşağıdaki gibi hiperbolik fonksiyonlara dönüşür.

$$sn\zeta \to \tanh\zeta \quad , \{cn\zeta, dn\zeta\} \to \operatorname{sech}\zeta \quad ,\{sc\zeta, sd\zeta\} \to \sinh\zeta$$
$$\{ds\zeta, cs\zeta\} \to \operatorname{csch}\zeta ,\{nc\zeta, nd\zeta\} \to \cosh\zeta \ , ns\zeta \to \coth\zeta\ , \quad \{cd\zeta, sd\zeta\} \to 1 \tag{6}$$

Jacobian-eliptik fonksiyonlar, $m \to 0$ için limit alındığında aşağıdaki gibi trigonometrik fonksiyonlara dönüşür.

$$\{sn\zeta, sd\zeta\} \to \sin\zeta\ , \quad \{cn\zeta, cd\zeta\} \to \cos\zeta\ , \quad sc\zeta \to \tan\zeta$$
$$\{ds\zeta, ns\zeta\} \to \csc\zeta\ , \ \{nc\zeta, dc\zeta\} \to \sec\zeta\ , \ cs\zeta \to \cot\zeta\ , \ \{dn\zeta, nd\zeta\} \to 1 \tag{7}$$

Tablo 1'de verilen her durum için ayrı ayrı (3) ile oluşturulan Jacobi eliptik fonksiyonlar $m \to 1$ için limit alınarak (6) yardımı ile hiperbolik, $m \to 0$ için limit alınarak (7) yardımı ile trigonometrik fonksiyonlara dönüşür. Böylece (2) adi diferensiyel denkleminin ve bu denklemde $\zeta = k(x - ct)$ yazılarak da (1) kısmi diferensiyel denkleminin çözümlerine ulaşılır.

3. Bulgular ve Tartışma

Bu kısımda (1) denklemine Kısım 2 de teorisi verilen F açılım metodu uygulanacaktır. (1) denklemini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{c_0^2}{2}u^2 + N\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0$$

göz önüne alalım. Denklemde $\zeta = k(x - ct)$ ve $u = U(\zeta)$ değişken değişimi yapılırsa denklem

$$k^2 U^{IV} - \frac{(c^2 - c_0^2)}{Nc^2}U'' + \frac{c_0^2}{Nc^2}U'^2 + \frac{c_0^2}{Nc^2}UU'' = 0 \tag{8}$$

adi diferensiyel denklemine dönüşür. Buradan iki kez integral alınarak

$$k^2 U'' - \frac{(c^2 - c_0^2)}{Nc^2}U + \frac{c_0^2}{Nc^2}U'^2 + \frac{c_0^2}{2Nc^2}U^2 = 0 \tag{9}$$

denklemi elde edilir. (9) denkleminin çözümlerinin (3) ile verilen ansatz fonksiyon biçiminde olduğunu varsayalım. (9) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasında dengeleme prensibi kullanılırsa $n + 2 = 2n$ eşitliğinden $n = 2$ elde edilir. Böylece (3) den

$$U(\zeta) = \sum_{i=0}^{2} A_i F_i(\zeta) = A_0 + A_1 F + A_2 F^2 \tag{10}$$

yazılabilir. Burada F, (4) denklemini sağlar. (10) ifadesi (9) da yerine yazılır ve (4)-(5) eşitlikleri kullanılırsa F^i (i=0,1,2,3,4) terimlerini bulunduran bir ifade elde edilir. Bu ifade F nin kuvvetlerine göre düzenlenip her bir katsayı sıfıra eşitlenirse aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$4k^2 A_2 N c^2 R - 2c^2 A_0 + c_0^2 A_0^2 + 2c_0^2 A_0 = 0$$

$$2c_0^2 A_1 - 2A_1 c^2 + 2k^2 A_1 N c^2 Q + 2c_0^2 A_0 A_1 = 0$$

$$12k^2 A_2 N c^2 P + c_0^2 A_0^2 = 0 \tag{11}$$

$$c_0^2 A_1^2 + 2c_0^2 A_2 + 2c_0^2 A_0 A_2 - 2a_2 c^2 + 8k^2 A_2 N c^2 Q = 0$$
$$4k^2 A_1 N c^2 P + 2c_0^2 A_1 A_2 = 0$$

(11) cebirsel denklem sistemi $A_0,\ A_1,\ A_2, k, c$ ye göre çözülürse

$$A_0=-\frac{c_0^2-c^2+4\sqrt{-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{48N^2PR-16N^2Q^2}}NQ}{c_0^2} \tag{12}$$

$$A_1=0 \tag{13}$$

$$A_2=-\frac{12\sqrt{-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{48N^2PR-16N^2Q^2}}NP}{c_0^2} \tag{14}$$

c=c

$$k=\frac{\left(-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{48N^2PR-16N^2Q^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{c_0^2} \tag{15}$$

elde edilir. Böylece (10) ifadesinden (12)-(14) kullanılarak

$$U(\zeta)=-\frac{c_0^2-c^2+4\sqrt{-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{48N^2PR-16N^2Q^2}}NQ}{c_0^2}-\frac{12\sqrt{-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{48N^2PR-16N^2Q^2}}NP}{c_0^2}F^2$$

yazılabilir. Tablo 1'den

1. Durum: $\mathrm{P}=m^2, \mathrm{Q}=-(1+m^2), \mathrm{R}=1, \mathrm{F}=sn\ \zeta$ olarak alınırsa

$$U_{1,m}(\zeta)=-\frac{c_0^2-c^2+\sqrt{-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{48N^2m^2-16N^2(-1-m^2)^2}}\left(4N(-1-m^2)-12Nm^2sn^2\ \zeta\right)}{c_0^2} \tag{16}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (16) nın $m\to 1$ için limiti alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_1(\zeta)=-\frac{c_0^2-c^2-\sqrt{\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{N^2}}N(2-3tanh^2\ \zeta)}{c_0^2} \tag{17}$$

çözümü ve (17) de $\zeta=k(z-ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_1(z,t)=-\frac{c_0^2-c^2-\sqrt{\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{N^2}}N(2-3tanh^2\ (k(z-ct))}{c_0^2} \tag{18}$$

çözümü elde edilir. Burada $k=\frac{\left(\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{2c}$, (15) ifadesinin $m\to 1$ için limitidir.

2. Durum: $\mathrm{P}=-m^2, \mathrm{Q}=2m^2-1, \mathrm{R}=1-m^2, \mathrm{F}=cn\ \zeta$ olarak alınırsa

$$U_{2,m}(\zeta)=-\frac{c_0^2-c^2+\sqrt{-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{-48N^2m^2(1-m^2)-16N^2(2m^2-1)^2}}\left(4N(2m^2-1)+12Nm^2cn^2\ \zeta\right)}{c_0^2} \tag{19}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (18) in $m \to 1$ için limiti alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_2(\zeta) = \frac{c^2 - c_0^2 - \sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}} N(1 - 3sech^2\,\zeta)}{c_0^2} \tag{20}$$

çözümü ve (20) de $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_2(z,t) = \frac{c_0^2 - c^2 - \sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}} N(1 - 3sech^2\,(k(z-ct))}{c_0^2} \tag{21}$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{2c}$, (15) ifadesinin $m \to 1$ için limitidir.

3. Durum: $\mathrm{P} = 1,\ \mathrm{Q} = -1 - m^2, \mathrm{R} = m^2, \mathrm{F} = ns\,\zeta$ olarak alınırsa

$$U_{3,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{48N^2m^2 - 16N^2(-1-m^2)^2}}\left(4N(-1-m^2) - 12Nns^2\,\zeta\right)}{c_0^2} \tag{22}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (22) nin $m \to 1$ için limiti alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_3(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 - \sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}} N(2 - 3coth^2\,\zeta)}{c_0^2} \tag{23}$$

çözümü ve $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_3(z,t) = -\frac{c_0^2 - c^2 - \sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}} N(2 - 3coth^2(k(z-ct))}{c_0^2} \tag{24}$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{2c}$, (15) ifadesinin $m \to 1$ için limitidir.

4. Durum: $\mathrm{P} = 1, \mathrm{Q} = 2 - m^2, \mathrm{R} = 1 - m^2, \mathrm{F} = cs\,\zeta$ olarak alınırsa

$$U_{4,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{48N^2(1-m^2) - 16N^2(2-m^2)^2}}\left(4N(2-m^2) + 12Ncs^2\,\zeta\right)}{c_0^2} \tag{25}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (25) in $m \to 1$ için limiti alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_4(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}} N(1 + 3csch^2\,\zeta)}{c_0^2} \tag{26}$$

çözümü ve (26) da $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_4(z,t) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}} N(1 + 3csch^2\,(k(z-ct)))}{c_0^2} \tag{27}$$

çözümü elde edilir. Burada $k=\frac{\left(\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{2c}$, (15) ifadesinin $m\to 1$ için limitidir.

5. Durum: $\mathrm{P}=\frac{1}{4},\ \mathrm{Q}=\frac{1-2m^2}{2}, \mathrm{R}=\frac{1}{4}, \mathrm{F}=ns\,\zeta+cs\zeta$ olarak alınırsa

$$U_{5,m}(\zeta)=-\frac{c_0^2-c^2+\sqrt{-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{3N^2-16N^2\left(\frac{1}{2}-m^2\right)^2}}\left(4N\left(\frac{1}{2}-m^2\right)+3N(ns\zeta+cs\zeta\right)}{c_0^2} \tag{28}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (28) in $m\to 1$ için limiti alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_5(\zeta)=-\frac{c_0^2-c^2+\sqrt{\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{N^2}}N(-2+3(\coth\zeta+csch\zeta)^2)}{c_0^2} \tag{29}$$

çözümü ve (29) da $\zeta=k(z-ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_5(z,t)=-\frac{c_0^2-c^2+\sqrt{\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{N^2}}N(-2+3(\coth(k(z-ct))+\operatorname{csch}(k(z-ct)))^2)}{c_0^2} \tag{30}$$

çözümü elde edilir. Burada $k=\frac{\left(\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{c}$, (15) ifadesinin $m\to 1$ için limitidir.

6. Durum: $\mathrm{P}=\frac{1}{4},\ \mathrm{Q}=\frac{1-2m^2}{2}, \mathrm{R}=\frac{1}{4}, \mathrm{F}=ns\,\zeta-cs\zeta$ olarak alınırsa

$$U_{6,m}(\zeta)=-\frac{c_0^2-c^2+\sqrt{-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{3N^2-16N^2\left(\frac{1}{2}-m^2\right)^2}}\left(4N\left(\frac{1}{2}-m^2\right)+3N(ns\zeta-cs\zeta)^2\right)}{c_0^2} \tag{31}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (31) in $m\to 1$ için limit alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_6(\zeta)=-\frac{c_0^2-c^2+\sqrt{\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{N^2}}N(-2+3(\coth\zeta-csch\zeta)^2)}{c_0^2} \tag{32}$$

çözümü ve (32) de $\zeta=k(z-ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_6(z,t)=-\frac{c_0^2-c^2+\sqrt{\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{N^2}}N(-2+3(\coth\left(k(z-ct)\right)-\operatorname{csch}(k(z-ct)))^2)}{c_0^2} \tag{33}$$

çözümü elde edilir. Burada $k=\frac{\left(\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{c}$, (15) ifadesinin $m\to 1$ için limitidir.

7. Durum: $\mathrm{P}=\frac{1}{4},\ \mathrm{Q}=\frac{1-2m^2}{2}, \mathrm{R}=\frac{1}{4}, \mathrm{F}=\frac{sn\zeta}{1+cn\zeta}$olarak alınırsa

$$U_{7,m}(\zeta)=-\frac{c_0^2-c^2+\sqrt{-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{3N^2-16N^2\left(\frac{1}{2}-m^2\right)^2}}4N\left(\frac{1}{2}-m^2\right)}{c_0^2}-\frac{3\sqrt{-\frac{c_0^4-2c^2c_0^2+c^4}{3N^2-16N^2\left(\frac{1}{2}-m^2\right)^2}}N\left(\frac{1}{2}-m^2\right)}{c_0^2}\left(\frac{sn\zeta}{1+cn\zeta}\right)^2 \tag{34}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. Buradan $m \to 1$ için limit alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_7(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 - 2\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2} - \frac{3\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}Ntanh^2(\zeta)}{c_0^2(1+\mathrm{sech}(\zeta)^2} \tag{35}$$

çözümü ve (35) de $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_7(z,t) = -\frac{c_0^2 - c^2 - 2\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2} - \frac{3\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}Ntanh^2(k(z-ct))}{c_0^2(1+\mathrm{sech}(k(z-ct))^2} \tag{36}$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{c}$, (15) ifadesinin $m \to 1$ için limitidir.

8. Durum: $\mathrm{P} = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Q} = \frac{1-2m^2}{2}$, $\mathrm{R} = \frac{1}{4}$, $\mathrm{F} = \frac{sn\zeta}{1-cn\zeta}$ olarak alınırsa

$$U_{8,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{3N^2 - 16N^2\left(\frac{1}{2}-m^2\right)^2}4N\left(\frac{1}{2}-m^2\right)}}{c_0^2} - \frac{3\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{3N^2 - 16N^2\left(\frac{1}{2}-m^2\right)^2}N\left(\frac{1}{2}-m^2\right)}}{c_0^2}\left(\frac{sn\zeta}{1-cn\zeta}\right)^2 \tag{37}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (37) nin $m \to 1$ için limiti alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_8(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 - 2\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2} - \frac{3\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}Ntanh^2(\zeta)}{c_0^2(1-\mathrm{sech}(\zeta)^2} \tag{38}$$

çözümü ve (38) de $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_8(z,t) = -\frac{c_0^2 - c^2 - 2\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2} - \frac{3\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}Ntanh^2\big(k(z-ct)\big)}{c_0^2(1-\mathrm{sech}\big(k(z-ct)\big))^2} \tag{39}$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{c}$, (15) ifadesinin $m \to 1$ için limitidir.

9. Durum: $\mathrm{P} = -(m^2 + 2m + 1)B^2$, $\mathrm{Q} = 2m^2 + 2$, $\mathrm{R} = \frac{2\mathrm{m} - m^2 - 1}{B^2}$, $\mathrm{F} = \frac{msn^2\zeta - 1}{B(msn^2\zeta + 1)}$ olarak alınırsa

$$U_{9,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + 4\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{48N^2(m+1)^2(m-1)^2 - 16N^2(2m^2+2)^2}N(2m^2+2)}}{c_0^2}$$

$$+\frac{12\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{48N^2(m+1)^2(m-1)^2 - 16N^2(2m^2+2)^2}N(m+1)^2}}{c_0^2}\left(\frac{msn^2\zeta - 1}{msn^2\zeta + 1}\right)^2 \tag{40}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (40) ın $m \to 1$ için limit alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_9(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \frac{\sqrt{256}\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{16}}{c_0^2} + \frac{3}{16}\frac{\sqrt{256}\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2}\left(\frac{tanh^2\zeta - 1}{tanh^2\zeta + 1}\right)^2 \quad (41)$$

çözümü ve (41) de $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_9(z,t) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \frac{\sqrt{256}\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{16}}{c_0^2} + \frac{3}{16}\frac{\sqrt{256}\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2}\left(\frac{tanh^2(k(z-ct)) - 1}{tanh^2(k(z-ct)) + 1}\right)^2 \quad (42)$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{4c}$, (15) ifadesinin $m \to 1$ için limitidir.

10. Durum: $\mathrm{P} = 1,\ \mathrm{Q} = -1 - m^2, \mathrm{R} = m^2, \mathrm{F} = dc\,\zeta$ olarak alınırsa

$$U_{10,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + 4\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{48N^2m^2 - 16N^2(-1-m^2)^2}}N(-1-m^2)}{c_0^2} - \frac{12\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{48N^2m^2 - 16N^2(-1-m^2)^2}}N}{c_0^2}dc^2\zeta \quad (43)$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (43) ün $m \to 1$ için limit alınırsa sabit çözüm bulunur. O halde bu durumu $m \to 0$ için limit alarak inceleyelim. (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_{10}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 - \frac{\sqrt{16}\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{4}}{c_0^2} - \frac{3}{4}\frac{\sqrt{16}\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2}sec^2\zeta \quad (44)$$

çözümü ve (44) de $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_{10}(z,t) = -\frac{c_0^2 - c^2 - \frac{\sqrt{16}\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{4}}{c_0^2} - \frac{3}{4}\frac{\sqrt{16}\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2}sec^2(k(z - ct)) \quad (45)$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{2c}$, (15) ifadesinin $m \to 0$ için limitidir.

11. Durum: $\mathrm{P} = 1 - m^2,\ \mathrm{Q} = 2 - m^2, \mathrm{R} = 1, \mathrm{F} = sc\,\zeta$ olarak alınırsa

$$U_{11,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + 4\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{48N^2(1-m^2) - 16N^2(2-m^2)^2}}N(2-m^2)}{c_0^2} - \frac{12\sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{48N^2(1-m^2) - 16N^2(2-m^2)^2}}N(1-m^2)}{c_0^2}(sc)^2 \quad (46)$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (46) nın $m \to 1$ için limit alınırsa sabit çözüm bulunur. Bu durumu $m \to 0$ için limit alarak inceleyelim. (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_{11}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \frac{\sqrt{16}\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{2}}{c_0^2} - \frac{3}{4}\frac{\sqrt{16}\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2}tan^2(\zeta) \quad (47)$$

çözümü ve (47) de $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_{11}(z,t) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \frac{\sqrt{16}\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{2}}{c_0^2} - \frac{3}{4}\frac{\sqrt{16}\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2} tan^2(k(z - ct)) \tag{48}$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{2c}$, (15) ifadesinin $m \to 0$ için limitidir.

12. Durum: $\mathrm{P} = \frac{1-m^2}{4}$, $\mathrm{Q} = \frac{1+m^2}{2}$, $\mathrm{R} = \frac{1-m^2}{4}$, $\mathrm{F} = nc\,\zeta + sc\zeta$ olarak alınırsa

$$U_{12,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{\left(48N^2\left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{4}\right)^2 - 16N^2\left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2}\right)^2\right)^2}}\left(4N\left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2}\right) + 12N\left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{4}\right)(nc\zeta + sc\zeta)^2\right)}{c_0^2} \tag{49}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (49) da $m \to 1$ için limit alınırsa sabit çözüm bulunur. Bu durumu $m \to 0$ için limit alarak inceleyelim. (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_{12}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}}N(2 + 3(\sec\zeta + tan\zeta)^2)}{c_0^2} \tag{50}$$

çözümü ve (50) de $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_{12}(z,t) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}}N(2 + 3(\sec(k(z-ct)) + tan(k(z-ct)))^2)}{c_0^2} \tag{51}$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{c}$, (15) ifadesinin $m \to 0$ için limitidir.

13. Durum: $\mathrm{P} = \frac{1-m^2}{4}$, $\mathrm{Q} = \frac{1+m^2}{2}$, $\mathrm{R} = \frac{1-m^2}{4}$, $\mathrm{F} = nc\,\zeta - sc\zeta$ olarak alınırsa

$$U_{13,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{\left(48N^2\left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{4}\right)^2 - 16N^2\left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2}\right)^2\right)^2}}\left(4N\left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2}\right) + 12N\left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{4}\right)(nc\zeta - sc\zeta)^2\right)}{c_0^2} \tag{52}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (52) de $m \to 1$ için limit alınırsa sabit çözüm bulunur. Bu durumu $m \to 0$ için limit alarak inceleyelim. (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_{13}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}}N(2 + 3(\sec\zeta - tan\zeta)^2)}{c_0^2} \tag{53}$$

çözümü ve (53) de $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$U_{12}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}}N(2 + 3(\sec(k(z-ct)) - \tan(k(z-ct)))^2)}{c_0^2} \tag{54}$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{c}$, (15) ifadesinin $m \to 0$ için limitidir.

14. Durum: $\mathrm{P} = \frac{1-m^2}{4}$, $\mathrm{Q} = \frac{1+m^2}{2}$, $\mathrm{R} = \frac{1-m^2}{4}$, $\mathrm{F} = \frac{cn\zeta}{1+sn\zeta}$ olarak alınırsa

$$U_{14,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{48N^2\left(\frac{1}{4}-\frac{m^2}{4}\right)^2 - 16N^2\left(\frac{1}{2}+\frac{m^2}{2}\right)^2}\left(4N\left(\frac{1}{2}+\frac{m^2}{2}\right)+12N\left(\frac{1}{4}-\frac{m^2}{4}\right)\right)}}{c_0^2}\left(\frac{csn\zeta}{1+sn\zeta}\right)^2 \tag{55}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (55) in $m \to 1$ için limiti alınırsa sabit çözüm bulunur. O halde bu durumu $m \to 0$ için limit alarak inceleyelim. (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_{14}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + 2\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2} - \frac{3\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2}\left(\frac{cos\zeta}{1+sin\zeta}\right)^2 \tag{56}$$

çözümü ve (56) da $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_{14}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + 2\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2} - \frac{3\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2}\left(\frac{\cos(k(z-ct))}{1+\sin(k(z-ct))}\right)^2 \tag{57}$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{c}$, (15) ifadesinin $m \to 0$ için limitidir.

15. Durum: $\mathrm{P} = \frac{1-m^2}{4}$, $\mathrm{Q} = \frac{1+m^2}{2}$, $\mathrm{R} = \frac{1-m^2}{4}$, $\mathrm{F} = \frac{cn\zeta}{1-sn\zeta}$olarak alınırsa

$$U_{15,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{48N^2\left(\frac{1}{4}-\frac{m^2}{4}\right)^2 - 16N^2\left(\frac{1}{2}+\frac{m^2}{2}\right)^2}\left(4N\left(\frac{1}{2}+\frac{m^2}{2}\right)+12N\left(\frac{1}{4}-\frac{m^2}{4}\right)\right)}}{c_0^2}\left(\frac{csn\zeta}{1-sn\zeta}\right)^2 \tag{58}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (58) in $m \to 1$ için limiti alınırsa sabit çözüm bulunur. O halde bu durumu $m \to 0$ için limit alarak inceleyelim. (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_{15}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + 2\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2} - \frac{3\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2}\left(\frac{cos\zeta}{1-sin\zeta}\right)^2 \tag{59}$$

çözümü ve (59) da $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_{14}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + 2\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2} - \frac{3\sqrt{\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}}N}{c_0^2}\left(\frac{\cos(k(z-ct))}{1-\sin(k(z-ct))}\right)^2 \tag{60}$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{c}$, (15) ifadesinin $m \to 0$ için limitidir.

16. Durum: $\mathrm{P} = 1$, $\mathrm{Q} = 2m^2 - 1$, $\mathrm{R} = -m^2(1 - m^2)$, $\mathrm{F} = ds\,\zeta$ olarak alınırsa

$$U_{16,m}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2c_0^2 + c^4}{-48N^2m^2(1-m^2) - 16N^2(2m^2-1)^2}4N(2m^2 - 1 + 3ds^2\zeta)}}{c_0^2} \tag{61}$$

Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilir. (61) in $m \to 1$ için limiti alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_{16}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}} N\left(1 + 3csch^2\zeta\right)}{c_0^2} \tag{62}$$

çözümü ve (62) de $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_{16}(z,t) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}} N\left(1 + 3csch^2(k(z-ct))\right)}{c_0^2} \tag{63}$$

çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{2c}$, (15) ifadesinin $m \to 1$ için limitidir.

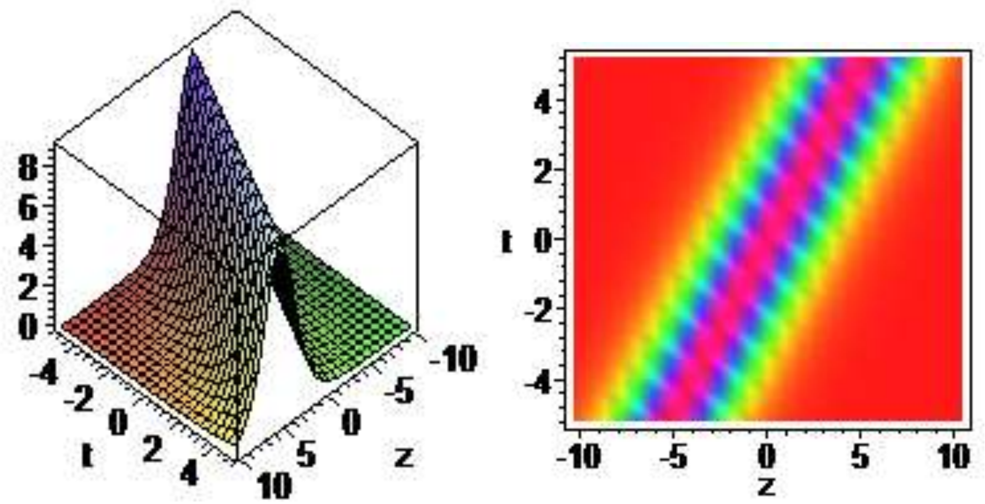
(61) eşitliği ile verilen Jacobi eliptik fonksiyonun $m \to 0$ için limiti alınırsa (6) bağıntıları yardımıyla (8) adi diferensiyel denkleminin

$$U_{16.o}(\zeta) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}} N\left(-1 + 3csc^2\zeta\right)}{c_0^2} \tag{64}$$

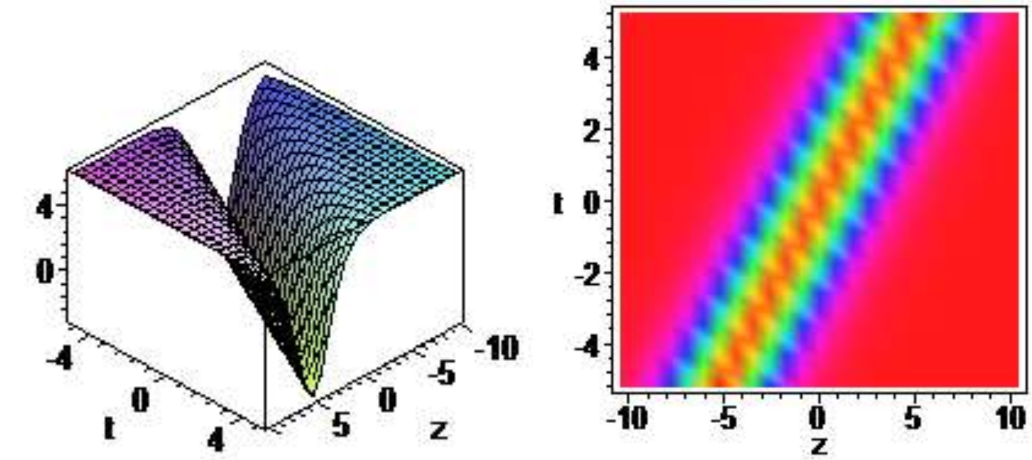
çözümü ve (64) de $\zeta = k(z - ct)$ yazılırsa (1) kısmi diferensiyel denkleminin

$$u_{16.o}(z,t) = -\frac{c_0^2 - c^2 + \sqrt{-\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}} N\left(-1 + 3csc^2 k(z-ct)\right)}{c_0^2} \tag{65}$$

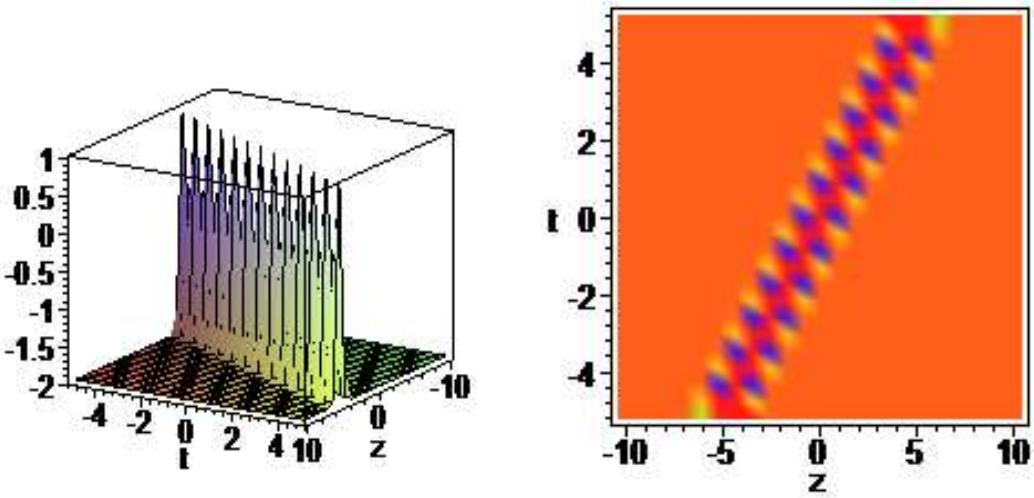
çözümü elde edilir. Burada $k = \frac{\left(\frac{c_0^4 - 2c^2 c_0^2 + c^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}}{2c}$, (15) ifadesinin $m \to 0$ için limitidir.



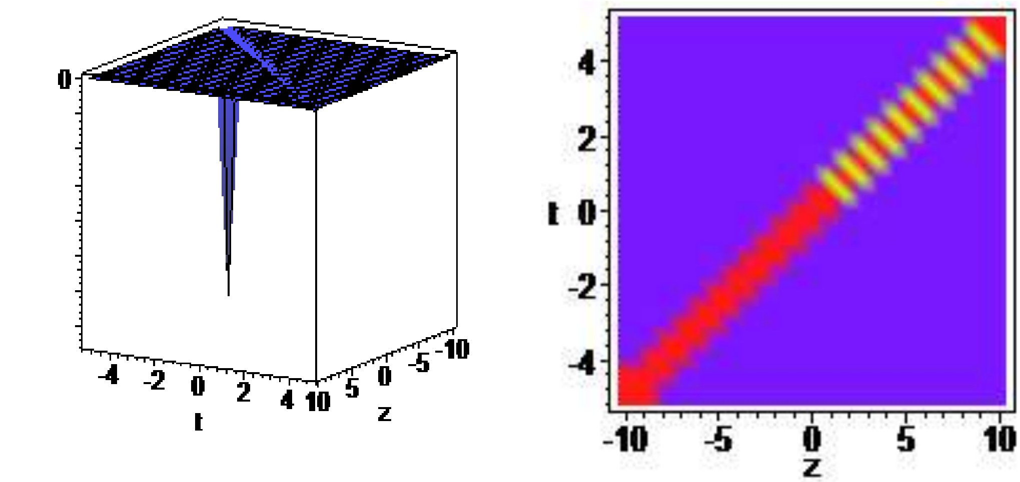
Şekil 1. (18)'de $N = 1, c = 1, c_0 = 1/2$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon



Şekil 2. (18)'de $N = -1, c = 1, c_0 = 1/2$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon

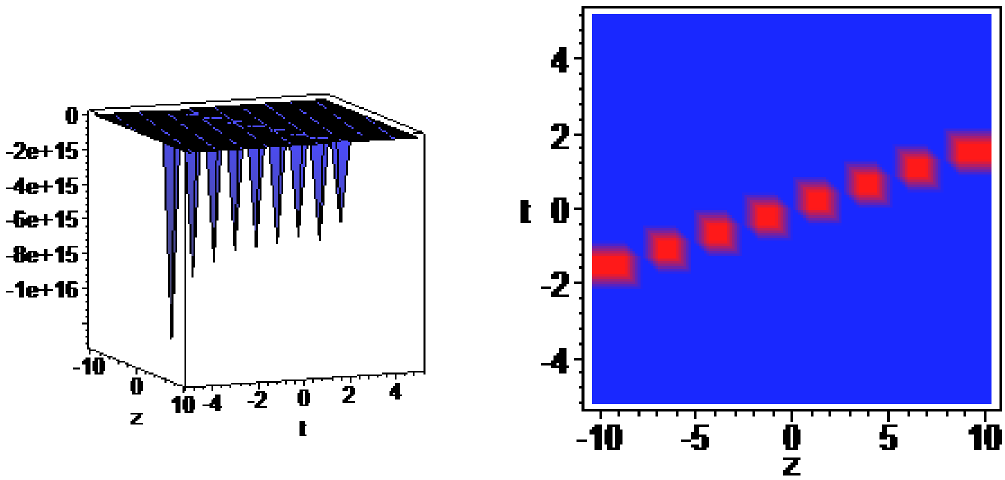


Şekil 3. (21)'de $N = 1, c = 1, c_0 = 6$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon

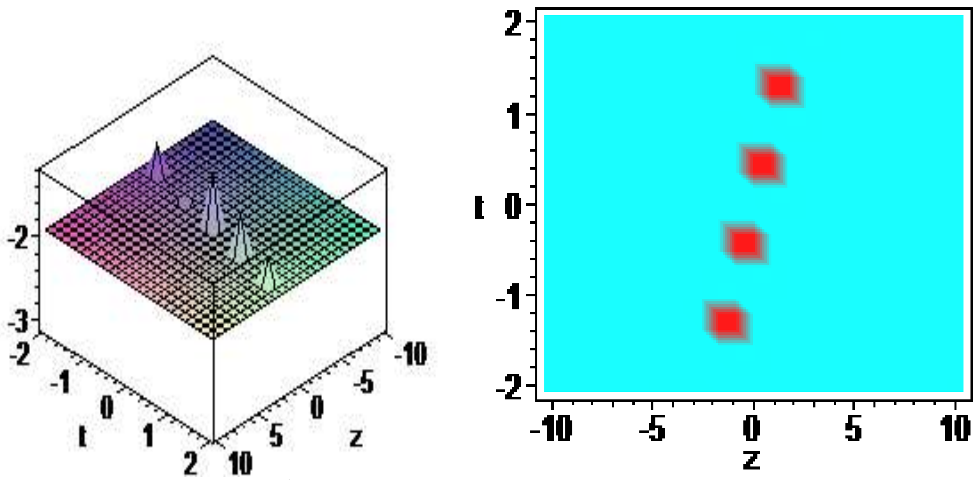


Şekil 4. (21)'de $N = \frac{1}{2}, c = 2, c_0 = 8$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon

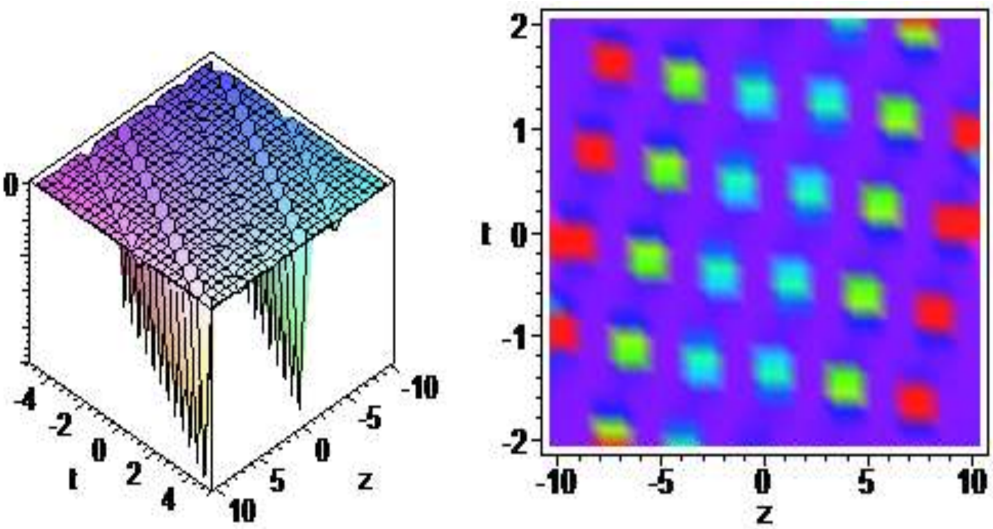
Dalga boyunu değiştirdiğimizde Şekil 4'deki değişmeler aşağıda Şekil 5'de verilmiştir.



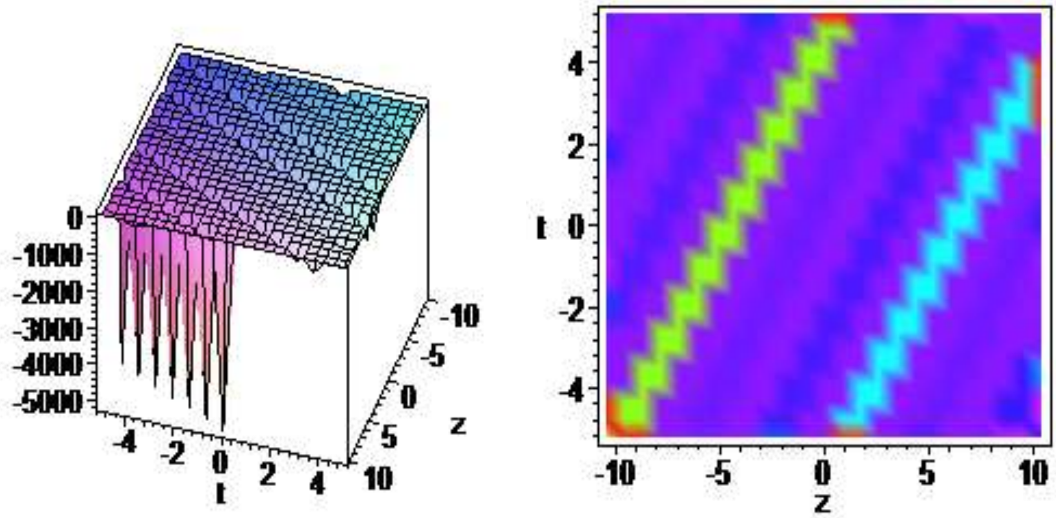
Şekil 5. (21)'de $N = \frac{1}{2}, c = 6, c_0 = 8$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon



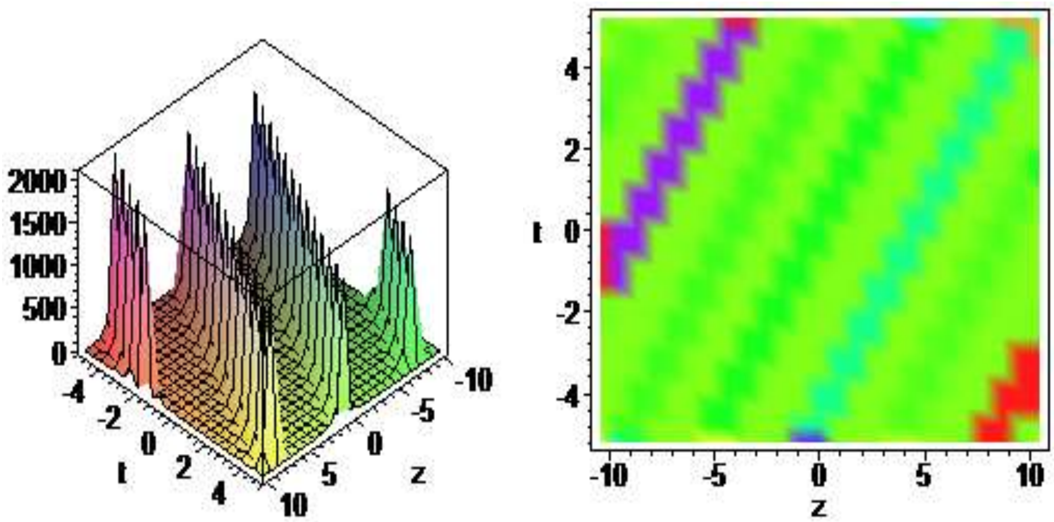
Şekil 6. (39)'da $N = \frac{1}{2}, c = 6, c_0 = 8$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon



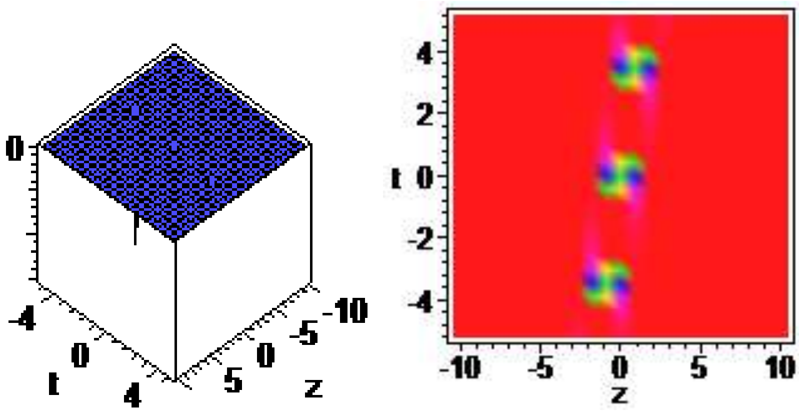
Şekil 7. (45)'de $N = 1, c = 1, c_0 = 2$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon



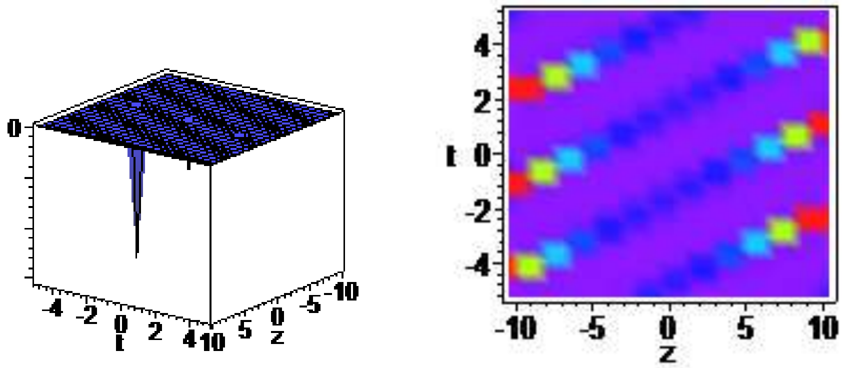
Şekil 8. (54)'de $N = 1, c = 1, c_0 = 2$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon



Şekil 9. (54)'de $N = 1, c = 1, c_0 = 8$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon



Şekil 10. (63)'de $N = 1, c = 1/4,\ c_0 = 1$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon



Şekil 11. (65)'de $N=1, c=\frac{1}{4}, c_0=1$ seçilerek elde edilen nümerik simülasyon

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, magneto-elektro-elastik çubukta yalnız gezen dalgaların analizi yapıldı. MEE denkleminin hareketli dalga çözümlerini araştırmak için F-açılım metodu kullanıldı. Xue ve ark. nın 2011 yılında yaptığı çalışmada [15] kullanılan Jacobi eliptik cosinüs açılım metoduna nazaran çok daha fazla sayıda farklı çözüm elde edildi. F açılım metodunun içerdiği farklı durumlar için Jacobi eliptik fonksiyonlar yardımı ile tam çözümler oluşturuldu. $m\to 0$ için trigonometrik, $m\to 1$ için hiperbolik fonksiyonlar ve bunların kombinasyonlarını içeren çözümler elde edildi. Fiziksel problemlerin yorumlanmasında büyük öneme sahip olan bu çözümler Maple programı ile orijinal denklemde yerine yazılarak doğrulanmıştır. Bazı durumlarda $m\to 1$ limitine karşılık gelen çözümler sabit çözüm çıktığından bu çözümlere çalışmada yer verilmemiş bunun yerine bazı durumlarda $m\to 0$ limitine karşılık gelen çözümler alınmıştır. F açılım metodu ile incelenen durumlar mümkün tüm durumların tamamı değildir. İncelenen durumlar dışında birçok durum mevcuttur. Çalışmanın devamı olarak diğer durumlar ele alınarak yeni bir çalışma yapılabilir. Çalışmada son olarak, çözüm fonksiyonlarının farklı parametrelerdeki bazı özel değerleri kullanılarak grafikleri Maple programı ile çizdirilmiş ve aynı çözüm fonksiyonunun farklı özel değerlerdeki grafikleri, karşılaştırabilmek maksadıyla, alt alta çizdirilmiştir. Bu çalışmada sayfa sayısı kısıtı nedeni ile genel bir değerlendirme yapılmıştır. Daha ayrıntılı inceleme ve değerlendirme bütün çözümlerin nümerik simülasyonu yapılarak elde edilebilir. Bu konularda çalışmaya başlayanlara temel bir rehber olacağı kanaatindeyim.

Yazarların Katkısı

Bu makaledeki tüm katkı yazara aittir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

[1] Yaşar E. 2016. Lie group analysis, exact solutions and conservation laws of (3+1) dimensional a B-type KP equation. NTMSCI 4, 4: 163-174.
[2] Yaşar E., Giresunlu İ.B. 2015. Lie symmetry reductions, exact solutions and conservation laws of the third order variant Boussinesq system. Acta Physica Polonica A, 128: 3.
[3] Yaşar E., Yıldırım Y. 2018. On the Lie symmetry analysis and travelling wave of time fractional fifth-order modified Sawada-Kotera equation. Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi. 8 (2): 411-416.

[4] Liu H., Li J., Zhang Q. 2009. Lie symmetry analysis and exact explicit solutions for general Burger's equation. Journal of Computational and Applied Mathematics, 228: 1-9.

[5] Giresunlu İ.B., Yaşar E. 2015. First integrals and exact solutions for path equation describing minimum drag work. Int. J. Adv. Appl. Math. And Mechi., 2 (4): 41-52.

[6] Akram G., Mahak N. 2018. Analytical solution of the Korteweg-de Vries equation and microtubule equation using the first integral method. Opt. Quantum Electorn, 50 (3): 145

[7] Wazwaz A.M. 2004. The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, 154 (3): 713-723.

[8] Bekir A. 2008. Application of the (G'/G)-expansion method for nonlinear evolution equations. Physics Letter A, 372: 3400-3406.

[9] Liu S., Fu Z., Liu S., Zhao Q. 2001. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equation. Physics Letter A, 289: 69-74.

[10] Mohyud-Din S.T., Ali A. 2017. $Exp(-\varphi(\varepsilon))$-expansion Method and Shifted Chebyshev Wavelets for Generalized Sawada-Kotera of Fractional Order. Fundamental Informaticae, 151 (1-4): 173-190.

[11] He J.H., Wu X.H. 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations. Chaos, Solitons &Fractals, 30 (3): 700-708.

[12] Zayed E.M.E., Alurrfi K.A.E. 2015. The modified Kudryashov method for solving someseventh order nonlinear PDEs in mathematical physics. World Journal of Modelling and Simulation, 11 (4): 308-319.

[13] Yıldırım Y., Çelik N., Yaşar E. 2017. Nonlinear Schrödinger equations with spatio-temporal dispersion in Kerr, parabolic, power and dual power law media: A novel extended Kudryashov's algorithm and soliton solutions. Results in Physics, 7: 3116-3123.

[14] Ekici M., Sonmezoğlu A. 2019. Optical solitons with Biswas-Arshed equation by extended trial function method. Optik- International Journal for Light and Electron Optics, 177: 13-20.

[15] Dusunceli F., Celik E., Askin M., Bulut H. 2021. New exact solutions for the doubly dispersiveequation using the improved Bernoulli sub-equation function method. Indian J Phys., 95 (2): 309-314.

[16] Bulut H., Yel G., Başkonuş H. 2016. An application of Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method to the Nonlinear Time Fractional Burgers Equation. Turk. J. Math. Comput. Sci., 5: 1-7.

[17] Mirhosseini-Alizamini S.M., Rezazadeh H., Srınıvasa K., Bekir A. 2020. New closed form solutions of the new coupled Konno-Oono equation using the new extendecd direct algebric method. Pramana-J. Phys., 94: 52.

[18] Xue C.X., Pan E., Zhang S.Y. 2011. Solitary waves in a magneto-elektro-elastic circular rod. Smart Mater. Struct., 20: 105010.

[19] Zhang T.T. 2019. On Lie symmetry analysis, conservation laws and solitary waves to a longitudinal wave motionequation. Applied Mathematics Letters, 98: 199-205.

[20] Baskonuş H.M., Bulut H., Atangana A. 2016. On the complex and hyperbolic structures of the longitudinal wave equation in a magneto-elektro-elastic rod. Smart Metar. Struct., 25: 035022.

[21] Zhou Q. 2016. Analytical study of solutions in magneto-elektro-elastic circular rod. Nonlinear Dyn, 83: 1403-1408.

[22] Darvishi M.T., Najafi M., Wazwaz A.M., 2020. Construction of exact solutions in a magnetoelectro-elastic circular rod. Waves in Random and Complex Media, 30 (2): 340-353.

[23] Iqbal M., Seadawy A.R., Lu D. 2019. Applications of nonlinear longitudinal wave equation in a magneto-electro-elastic circular rod and new solitary wave solutions. Modern Physics Letters B, 33 (18): 1950210.

[24] Seadawy A.R., Manafian J. 2018. New soliton solution to the longitudinal wave equation in a magneto-electro-elastic circular rod. Results in Physics, 8: 1158-1167.

[25] Zhou Y., Wang M., Wang Y. 2003. Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficient. Physics Letters A, 308: 31-36.

[26] Zhang J.F., Dai C.Q., Yang Q., Zhu J.M. 2005. Variable-coefficient F-expansion method and its application to nonlinear Schrödinger equation. Optics Communications, 252: 408-442.

[27] Zhang J.L., Wang M.L., Wang Y.M., Fang Z.D. 2006. The Improved F expansion method and its applications. Physics Letter A, 350: 103-109.

[28] Ebaid A., Aly E.H. 2012. Exact solutions for the transformed reduced Ostrovsky equation via the F-expansion method in terms of Weierstrass-elliptic and Jacobian-elliptic functions. Wave Motion, 49: 296-308.
[29] Zhao Y.M. 2013. F-Expansion Method and Its Application for Finding New Exact Solutions to the Kudryashov-Sinelshchikov Equation. Journal of Applied Mathematics, Volume 2013, Article ID 895760, 7 pages, doi: 10.1155/2013/895760
[30] Çelik N., Seadawy A.R., Sağlam Y., Yaşar E. 2021. A model of solitary waves in a nonlinear elastic circular rod: Abundant different type exact solutions and conservation laws. Choas, Solitons and Fractals, 143: 1-19.