

Araştırma Makalesi - Research Article

Farklı Yanlılık Parametreleri İçin Ridge GM Tahmin Edicilerinin Performanslarının Karşılaştırılması*

Comparison of the Performances of Ridge GM Estimators for Different Biased Parameters

Melike Işıl¹, Y. Murat Bulut^{2*}

Geliş / Received: 09/02/2021

Revize / Revised: 27/03/2021

Kabul / Accepted: 30/03/2021

ÖZ

Çoklu lineer regresyon modelinde yaygın olarak karşılaşılan problemler çoklu iç ilişki ve aykırı değer problemleridir. Bu iki problemin eş anlı çözümleri için literatürde sağlam yanlı tahmin ediciler üzerine pek çok çalışma mevcuttur. Bu tahmin edicilerden en yaygın kullanılanları sağlam Ridge tahmin edicileridir. Yanlılık parametresine bağlı olan Ridge tahmin edicisine ilişkin günümüzde de pek çok çalışma yapılmaktadır. Yapılan çalışmalarda yanlılık parametresinin performansı klasik Ridge tahmin edicisinde incelenmektedir. Bu çalışmada her iki değişkende de aykırı değer olması ve çoklu iç ilişki probleminin ortak çözümü için önerilmiş olan Ridge GM tahmin edicisinde literatürde daha önce önerilmiş olan yanlılık parametrelerinin performansları simülasyon çalışması ve gerçek veri örneği üzerinde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler- *Lineer Regresyon Modeli, Çoklu İç İlişki, Aykırı Değer, Ridge Regresyon, Yanlılık Parametresi*

ABSTRACT

In the multiple linear regression model, commonly encountered problems are multicollinearity and outlier problems. There are many studies about robust biased estimators in the literature to solve these problems simultaneously. The most commonly used of these estimators are robust Ridge estimators. Many studies are still carried out on the Ridge estimator, which depends on the biasing parameter. The performances of the previously proposed biased parameters were compared in the classical Ridge estimator. In this study, we have compared the performances of the biasing parameters for the robust Ridge GM estimators based on the simulation and real data studies.

Keywords- *Linear Regression Model, Multicollinearity, Outlier, Ridge Regression, Biasing Parameter*

*Bu çalışma Dr. Öğr. Üyesi Y. Murat Bulut danışmanlığında Melike Işıl tarafından, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim dalı, İstatistik Teorisi Bilim dalında tamamlanan yüksek lisans tezinin bir bölümünden üretilmiştir.

¹İletişim: melikeisilar@gmail.com (<https://orcid.org/0000-0001-6821-1064>)

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 26040, Eskişehir, Türkiye

^{2*}Sorumlu yazar iletişim: ybulut@ogu.edu.tr (<https://orcid.org/0000-0002-0545-7339>)

İstatistik Bölümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, 26040, Eskişehir, Türkiye

I. GİRİŞ

Bağımsız değişkenler ile bağımlı değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek için istatistikte yaygın olarak kullanılan teknik regresyon analizidir. Lineer regresyon analizinde parametreleri tahmin etmek için en küçük kareler (EKK) tahmin edicisi kullanılmaktadır. Regresyon analizinin varsayımlarının sağlanması durumunda EKK tahmin edicisi lineer tahmin ediciler içinde en iyi yansız tahmin edicidir.

Uygulamada elde edilen verilerde genellikle regresyon analizinin varsayımları sağlanamamaktadır. Varsayımların bozulmasına neden olan problemler genellikle veri setinde aykırı değer bulunması ve bağımsız değişkenler arasında lineer bir ilişki olması durumlarıdır.

Veri setinde aykırı değer bulunması durumunda bu problemin çözümü için sıklıkla sağlam tahmin ediciler kullanılmaktadır. Regresyon analizinde aykırı değer probleminin çözümü için yaygın olarak Huber [1] tarafından önerilen M tipi tahmin ediciler kullanılmaktadır. Bağımlı değişkende aykırı değer bulunması durumunda etkin sonuçlar veren M tahmin edicisi (ME), bağımsız değişkende aykırı değer bulunması durumunda etkinliğini kaybetmektedir. Bu nedenle bağımsız değişkende de aykırı değer bulunması durumunda etkin sonuçlar elde etmek amacıyla Mallows [2] ve Handschin vd. [3] tarafından farklı iki çalışma ile Genelleştirilmiş M tahmin edicisi (GME) önerilmiştir.

Çoklu lineer regresyon modelinde bağımsız değişkenler arasında şiddetli bir lineer ilişki bulunması durumu çoklu iç ilişki problemi olarak adlandırılmaktadır. Çoklu iç ilişki probleminde EKK tahmin edicisinin varyansı artmaktadır. Bu problemin çözümü için literatürde genellikle yanlı tahmin ediciler kullanılmaktadır. Yaygın olarak bilinen yanlı tahmin edici Hoerl ve Kennard [4] tarafından önerilen Ridge tahmin edicisidir (RE). RE, k yanlılık parametresine bağlı bir tahmin edicidir. k parametresi RE' nin lineer bir fonksiyonu olarak yazılamamaktadır. Bu nedenle k parametresinin tahmini için literatürde pek çok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan bazıları: Theobald [5], Hoerl vd. [6], Lawless [7], Hocking vd. [8], Kibria [9], Khalaf ve Shukur [10], Alkhamisi vd. [11], Alkhamisi ve Shukur [12], Muniz ve Kibria [13], Al-Hassan [14], Muniz vd. [15], Dorugade [16], Karaibrahimoğlu vd. [17], Asar ve Genç [18] tarafından yapılan çalışmalardır.

Uygulamada aykırı değer ve çoklu iç ilişki problemleri ile tek tek karşılaşılabileceği gibi sıklıkla bu problemler birlikte de görülmektedir. Bu nedenle problemlerin ortak çözümleri için sağlam Ridge tahmin edicileri önerilmiştir. Sağlam Ridge tahmin edicisi olarak Silvapulle [19] tarafından Ridge M tahmin edicisi (RME) önerilmiştir. RME, ME' ye bağlı olduğu için bağımlı değişkende aykırı değer bulunması durumunda etkin sonuçlar verse de bağımsız değişkende aykırı değer bulunması durumunda etkinliğini kaybetmektedir. Bu problemin çözümü için ise Arslan ve Billor [20] tarafından çoklu iç ilişki ve hem bağımlı hem de bağımsız değişkende aykırı değer bulunması problemlerinin ortak çözümleri için Ridge GM tahmin edicisi (RGME) önerilmiştir.

Sağlam Ridge tahmin edicilerinin performansı da k , yanlılık parametresine bağlıdır. Literatürde önerilen k parametresi tahmin edicilerinin performansları RE için karşılaştırılmıştır [21]. Sağlam Ridge tahmin edicileri ile ilgili yapılan çalışmalarda genellikle Hoerl ve Kennard [4] tarafından önerilen k parametresinin tahmin edicisi kullanılmıştır. Işlar [22] tezinde veri setinde hem bağımlı hem de bağımsız değişkende aykırı değer olması ve bağımsız değişkenler arasında yüksek lineer ilişki olması durumunda önerilen farklı k tahmin edicilerine bağlı olarak RGME' nin performanslarını karşılaştırmıştır. Bu çalışmada da veri setinde aykırı değer bulunması durumunda önerilen k parametrelerinin performansları RE, RME ve RGME tahmin edicileri için karşılaştırılmıştır. Bu amaçla ikinci bölümde regresyon analizinde kullanılan EKK, M, GM, RE, RME ve RGME anlatılmıştır. Üçüncü bölümde RE' de k parametresi için önerilen tahmin ediciler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise simülasyon çalışması ve gerçek veri örneğinin sonuçları verilmiştir. Beşinci bölümde ise simülasyon ve gerçek veriden elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

II. LİNEER REGRESYON ANALİZİ VE PARAMETRE TAHMİNİ

Çoklu lineer regresyon modeli,

$$y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \quad (1)$$

şekindedir. Burada y ; $n \times 1$ boyutlu bağımlı değişken vektörü, \mathbf{X} ; $n \times p$ boyutlu bağımsız değişken matrisi, β ; $p \times 1$ boyutlu parametre vektörü, ε ; $n \times 1$ boyutlu hata vektörüdür. Ayrıca hata terimleri $E(\varepsilon) = 0$ ve $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}$ dir.

Regresyon analizinde parametreleri tahmin etmek için sıklıkla Eşitlik (2)' de verilen EKK tahmin edicisi kullanılmaktadır.

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (2)$$

EKK tahmin edicisine ait matris hata kareler ortalaması (MMSE) ve hata kareler ortalaması (MSE) denklemleri sırasıyla Eşitlik (3) ve Eşitlik (4)' te verildiği gibidir.

$$MMSE(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \quad (3)$$

$$MSE(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_j} \quad (4)$$

Burada λ_j , $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin öz değerleridir.

Aykırı değer probleminin çözümü için Huber [1] tarafından önerilen ME' nin amaç fonksiyonu,

$$\arg \min_{\beta} \rho\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \quad (5)$$

şeklinde. ME' de kullanılacak olan ρ , amaç fonksiyonunun sağlaması gereken özellikler aşağıdaki gibidir:

- $\rho(\varepsilon) \geq 0$
- $\rho(0) = 0$
- $\rho(\varepsilon) = \rho(-\varepsilon)$
- $0 < \varepsilon_i < \varepsilon_j$ için $\rho(\varepsilon_i) < \rho(\varepsilon_j)$.

Bağımsız değişkende de aykırı değer bulunması durumunda etkin sonuçlar elde etmek amacıyla önerilen GM tahmin edicisinin genel olarak amaç fonksiyonu,

$$\arg \min_{\beta} \sigma^2 \rho\left(\frac{\varepsilon}{\sigma u^\alpha}\right) u^{\alpha+1} \quad (6)$$

şeklinde [23]. Burada u , bağımsız değişkenlere bağlı olarak hesaplanan gözlemlere verilen ağırlık vektörüdür. Mallows [3] GM tahmin edicisinin genel amaç fonksiyonunda $\alpha = 0$ olması durumunda Mallows tipi GM tahmin edicisini, Handschin vd. [4] ise $\alpha = 1$ olması durumunda Schweppe tipi GM tahmin edicisini önermişlerdir.

Çoklu iç ilişki problemi Farrar ve Glauber [24] tarafından \mathbf{X} matrisinin ortogonal olmaması olarak tanımlanmıştır. Bu tanımdan yola çıkarak Silvey [25] \mathbf{X} matrisini ortogonalliğe yaklaştırmak amacıyla genel regresyon modelini Eşitlik (7)' de verilen kanonik formda tanımlamıştır.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon = \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\beta + \varepsilon = \mathbf{T}\alpha + \varepsilon \quad (7)$$

Yapılan çalışmalarda genellikle \mathbf{Z} matrisi $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin özvektörlerinden oluşan matris olarak seçilse de herhangi bir ortogonal matris olarak önerilmiştir.

Çoklu iç ilişki probleminin çözümü için Hoerl ve Kennard [4] tarafından önerilen RE' nin EKK tahmin edicisine göre lineer dönüşümü ile çözümü Eşitlik (8)' de verilmiştir:

$$\hat{\alpha}(k) = \mathbf{Q}_k^{-1}\mathbf{Q}\hat{\alpha} \quad (8)$$

Burada $k > 0$, yanlılık parametresi olmak üzere $\mathbf{Q} = \mathbf{T}'\mathbf{T}$ ve $\mathbf{Q}_k = \mathbf{T}'\mathbf{T} + k\mathbf{I}'$ dir. RE' nin MMSE ve MSE denklemleri sırasıyla Eşitlik (9) ve (10)' da verildiği gibidir:

$$MMSE(\hat{\alpha}(k)) = \sigma^2 \mathbf{Q}_k^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{Q}_k^{-1} + k^2 \mathbf{Q}_k^{-1}\alpha'\alpha\mathbf{Q}_k^{-1} \quad (9)$$

$$MSE(\hat{\alpha}(k)) = \sigma^2 \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j}{(\lambda_j+k)^2} + k^2 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j+k)^2} \quad (10)$$

Çoklu iç ilişki ve aykırı değer problemlerinin eşanlı çözümleri için Silvapulle [19] tarafından önerilen RME Eşitlik (11)' de verilmiştir:

$$\hat{\alpha}(k_M) = \mathbf{Q}_{k_M}^{-1}\mathbf{Q}\hat{\alpha}_M \quad (11)$$

Burada $k_M > 0$, $\hat{\alpha}_M$ ile tahmin edilen yanlılık parametresidir. RME' nin MMSE ve MSE denklemleri sırasıyla Eşitlik (12) ve (13)' de verildiği gibi tanımlanmıştır:

$$MMSE(\hat{\alpha}(k_M)) = \mathbf{Q}_{k_M}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{Q}_{k_M}^{-1} + k^2 \mathbf{Q}_{k_M}^{-1}\alpha'\alpha\mathbf{Q}_{k_M}^{-1} \quad (12)$$

$$MSE(\hat{\alpha}(k_M)) = \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j^2 \Omega_{jj}}{(\lambda_j + k)^2} + k^2 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^2} \quad (13)$$

Burada Ω , ME' nin kovaryans matrisidir.

RME' nin bağımsız değişkende aykırı değer bulunması durumunda etkinliğini kaybetmesinden dolayı Arslan ve Billor [20] tarafından Eşitlik (14)' te verilen RGME tahmin edicisi önerilmiştir:

$$\hat{\alpha}(k_{GM}) = \mathbf{Q}_{k_{GM}}^{-1} \mathbf{Q} \hat{\alpha}_{GM} \quad (14)$$

RGME' ne ait MMSE ve MSE denklemleri ise Eşitlik (15) ve (16)' da verildiği gibidir.

$$MMSE(\hat{\alpha}(k_{GM})) = \mathbf{Q}_{k_{GM}}^{-1} \mathbf{Q} \Omega^* \mathbf{Q}_{k_{GM}}^{-1} + k^2 \mathbf{Q}_{k_{GM}}^{-1} \alpha' \alpha \mathbf{Q}_{k_{GM}}^{-1} \quad (15)$$

$$MSE(\hat{\alpha}(k_{GM})) = \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j \Omega_{jj}^*}{(\lambda_j + k)^2} + k^2 \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^2} \quad (16)$$

Burada Ω^* , GM tahmin edicisinin kovaryans matrisidir.

III. YANLILIK PARAMETRESİ İÇİN TAHMİN EDİCİLER

Bu bölümde RE' de k parametresi için literatürde önerilmiş olan bazı tahmin ediciler verilmiştir.

Bu tahmin edicilerden k_1 ve k_2 tahmin edicileri Hoerl ve Kennard [4], k_3 tahmin edicisi Theobald [5] ve k_4 tahmin edici ise Hoerl vd. [6] tarafından önerilmiştir:

$$\hat{k}_1 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}' \hat{\alpha}}, \quad \hat{k}_2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_{max}^2}, \quad \hat{k}_3 = \frac{2\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}' \hat{\alpha}}, \quad \hat{k}_4 = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}' \hat{\alpha}}$$

Daha sonra k_5 tahmin edicisi Lawless [7] ve k_6 tahmin edicisi ise Hocking vd. [8] tarafından önerilmiştir:

$$\hat{k}_5 = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{\alpha}_j^2}, \quad \hat{k}_6 = \hat{\sigma}^2 \frac{\sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{\alpha}_j^2}{(\sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{\alpha}_j^2)^2}$$

$k_7 - k_9$ tahmin edicileri ise $m_j = \hat{\sigma}^2 / \hat{\alpha}_j^2$ olmak üzere Kibria [9] tarafından önerilmiştir:

$$\hat{k}_7 = \text{mean}(m_j), \quad \hat{k}_8 = \text{median}(m_j), \quad \hat{k}_9 = \frac{\hat{\sigma}^2}{(\prod_{j=1}^p \hat{\alpha}_j^2)^{1/p}}$$

k_{10} tahmin edicisi Khalaf ve Shukur [10] tarafından tanımlanmıştır:

$$\hat{k}_{10} = \frac{\lambda_{max} \hat{\sigma}^2}{(n - p - 1) \hat{\sigma}^2 + \lambda_{max} \hat{\alpha}_{max}^2}$$

Daha sonra Alkhamisi vd. [11] çalışmasında $t_j = \frac{\lambda_j \hat{\sigma}^2}{(n-p-1)\hat{\sigma}^2 + \lambda_j \hat{\alpha}_j^2}$ olmak üzere $k_{11} - k_{13}$ tahmin edicilerini önermişlerdir:

$$\hat{k}_{11} = \max(t_j), \quad \hat{k}_{12} = \text{mean}(t_j), \quad \hat{k}_{13} = \text{median}(t_j)$$

Alkhamisi ve Shukur [12] çalışmasında ise $k_{14} - k_{18}$ tahmin edicilerini geliştirmişlerdir:

$$\hat{k}_{14} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}' \hat{\alpha}} + \frac{1}{\lambda_{max}}, \quad \hat{k}_{15} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{\alpha}_j^2} + \frac{1}{\lambda_{max}}, \quad \hat{k}_{16} = \max\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_j^2} + \frac{1}{\lambda_j}\right)$$

$$\hat{k}_{17} = \text{mean}\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_j^2} + \frac{1}{\lambda_j}\right), \quad \hat{k}_{18} = \text{median}\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_j^2} + \frac{1}{\lambda_j}\right)$$

Ayrıca $k_{19} - k_{25}$ tahmin edicileri ise $\hat{\sigma}_j^2, j$. bağımsız değişkenin varyansı ve $f_j = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\alpha}_j^2}}$ olmak üzere Muniz ve Kibria [13] tarafından önerilmiştir:

$$\hat{k}_{19} = \max(f_j), \hat{k}_{20} = \max\left(\frac{1}{f_j}\right), \hat{k}_{21} = \text{median}(f_j), \hat{k}_{22} = \text{median}\left(\frac{1}{f_j}\right)$$

$$\hat{k}_{23} = \text{geomean}(f_j), \hat{k}_{24} = \text{geomean}\left(\frac{1}{f_j}\right), \hat{k}_{25} = \left(\prod_{j=1}^p \frac{\lambda_j \hat{\sigma}_j^2}{(n-p-1)\hat{\sigma}_j^2 + \lambda_j \hat{\alpha}_j^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Al-Hassan [14] çalışmasında ise k_{26} tahmin edicisini önermiştir:

$$\hat{k}_{26} = \hat{\sigma}^2 \frac{\sum_{j=1}^p (\lambda_j \hat{\alpha}_j)^2}{\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j \hat{\alpha}_j^2\right)^2} + \frac{1}{\lambda_j}$$

$v_j = \frac{\lambda_{\max} \hat{\sigma}^2}{(n-p-1)\hat{\sigma}^2 + \lambda_{\max} \hat{\alpha}_j^2}$ olmak üzere Muniz vd. [15] $k_{27} - k_{38}$ tahmin edicilerini tanımlamışlardır:

$$\hat{k}_{27} = \text{geomean}(t_j), \hat{k}_{28} = \max\left(\frac{1}{\sqrt{m_j}}\right), \hat{k}_{29} = \max(\sqrt{m_j}), \hat{k}_{30} = \text{geomean}\left(\frac{1}{\sqrt{m_j}}\right)$$

$$\hat{k}_{31} = \text{geomean}(\sqrt{m_j}), \hat{k}_{32} = \text{median}\left(\frac{1}{\sqrt{m_j}}\right), \hat{k}_{33} = \text{median}(\sqrt{m_j}), \hat{k}_{34} = \max\left(\frac{1}{\sqrt{v_j}}\right)$$

$$\hat{k}_{35} = \max(\sqrt{v_j}), \hat{k}_{36} = \text{median}\left(\frac{1}{\sqrt{v_j}}\right), \hat{k}_{37} = \text{geomean}\left(\frac{1}{\sqrt{v_j}}\right), \hat{k}_{38} = \text{geomean}(\sqrt{v_j})$$

Dorugade [16] çalışmasında ise $k_{39} - k_{42}$ tahmin edicilerini geliştirmiştir:

$$\hat{k}_{39} = \text{mean}\left(\frac{2\hat{\sigma}^2}{\lambda_{\max} \hat{\alpha}_j^2}\right), \hat{k}_{40} = \text{median}\left(\frac{2\hat{\sigma}^2}{\lambda_{\max} \hat{\alpha}_j^2}\right), \hat{k}_{41} = \frac{2\hat{\sigma}^2}{\lambda_{\max}} \left(\prod_{j=1}^p \hat{\alpha}_j^2\right)^{\frac{1}{p}}, \hat{k}_{42} = \frac{2p\hat{\sigma}^2}{\lambda_{\max}} \sum_{j=1}^p \frac{1}{\hat{\alpha}_j^2}$$

$k_{43} - k_{46}$ tahmin edicileri ise Karaibrahimoğlu vd. [17] tarafından önerilmiştir:

$$\hat{k}_{43} = \frac{p}{\sqrt{\lambda_{\max}}} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j^2}, \hat{k}_{44} = \frac{\sqrt{5}p}{\lambda_{\max}} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j^2}, \hat{k}_{45} = \frac{2p}{\sum_{j=1}^p \lambda_j^{1/4}} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j^2}, \hat{k}_{46} = \frac{2p}{\sqrt{\sum_{j=1}^p \lambda_j}} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j^2}$$

Daha sonra Asar ve Genç [18] çalışmasında $h_j = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_j \hat{\alpha}_j^2}}$ olmak üzere $k_{47} - k_{54}$ tahmin edicilerini önermişlerdir:

$$\hat{k}_{47} = \text{mean}(h_j), \hat{k}_{48} = \text{geomean}(h_j), \hat{k}_{49} = \text{median}(h_j), \hat{k}_{50} = \max(h_j)$$

$$\hat{k}_{51} = \text{median}\left(\frac{1}{h_j}\right), \hat{k}_{52} = \text{mean}\left(\frac{1}{h_j}\right), \hat{k}_{53} = \text{harmmean}\left(\frac{1}{h_j}\right), \hat{k}_{54} = \text{harmmean}(h_j)$$

Bu tahmin edicilerde *mean*, *geomean*, *median* ve *harmmean* sırasıyla ortalama, geometrik ortalama, medyan ve harmonik ortalamayı ifade etmektedir.

IV. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI VE GERÇEK VERİ UYGULAMASI

A. Simülasyon Çalışması

Simülasyon çalışmasında hem bağımlı hem de bağımsız değişkende aykırı değer ve çoklu iç ilişki bulunan veri setleri üretilmiştir. Bu amaçla McDonald ve Galarneau' nun [26] Eşitlik (17)' de verilen formülü kullanılarak ilişkili bağımsız değişkenler üretilmiştir.

$$x_{ij} = (1 - \rho^2)^{1/2} z_{ij} + \rho z_{i(p+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, p \quad (17)$$

Burada p, bağımsız değişken sayısı, n, örneklem hacmi olmak üzere ρ^2 bağımsız değişkenler arasındaki korelasyon katsayısı, z_{ij} ise $N(0,1)$ dağılımından olan rassal sayılardır.

β parameter vektörü, $X'X$ matrisinin en büyük öz değerine karşılık gelen öz vektörü seçilerek $\beta'\beta = 1$ olacak şekilde seçilmiştir [27]. Aralarında yüksek lineer ilişki olan bağımsız değişkenler üretildikten sonra Eşitlik (1)' de verilen formül ile bağımlı değişken vektörü oluşturulmuştur. Bu çalışmada bağımsız değişkende de aykırı değer bulunması durumunda RME tahmin edicisinin etkinliğini kaybetmesinden dolayı RGME tahmin edicisi üzerinde durulmuştur. Bu nedenle simülasyon çalışmasında bağımlı değişken vektöründe %5 aykırı değer bulunurken bağımsız değişkenlerde %5 ve %10 aykırı değer bulunması durumları ele alınmıştır. Hem bağımlı hem de bağımsız değişkende aykırı değer bulunması durumu ele alındığı için üretilen veri setlerinde a tane aykırı değer, bağımlı değişkende birinci gözlemden a. gözleme kadar, bağımsız değişkenlere ise (n-a+1). gözlemden n. gözleme kadar olan gözlemler için oluşturulmuştur. Bağımlı değişken vektöründeki %5 gözlem $N(10,1)$ dağılımından rassal üretilen sayılar ile değiştirilmiştir. Bağımsız değişken matrisindeki örneklem hacminin %5 ve %10'u kadar olan sondaki satırlar ise yine benzer şekilde $N(10,1)$ dağılımından rassal olarak üretilen sayılar ile değiştirilmiştir.

Simülasyon çalışmaları için örnek hacmi 30, 50 ve 70, bağımsız değişken sayısı 4 ve 6, korelasyon değeri 0,90, 0,95 ve 0,99, bağımsız değişkendeki aykırı değer oranları ise %5 ve %10 olarak seçilmiştir. Lineer regresyon modeli ise sabit terimsiz olarak kurulmuştur. Simülasyonlar 5000 tekrar ile çalıştırılmıştır. Gerçek veri uygulaması ve simülasyon çalışmaları R programı kullanılarak yapılmıştır [28]. Tahmin edicilerin Eşitlik (18)' de verilen denklem kullanılarak MSE değerleri hesaplanmıştır:

$$MSE(\hat{\alpha}^*) = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} (\hat{\alpha}_i^* - \alpha)' (\hat{\alpha}_i^* - \alpha) \quad (18)$$

Burada $\hat{\alpha}^*$, α ' nın herhangi bir tahmin edicisini göstermektedir. Simülasyon çalışması sonucunda tahmin edicilerin MSE değerlerine ait sonuçlar ise Tablo 1 – 4' te verilmiştir.

Tablo 1. p=4 ve %5 aykırı değer bulunması durumunda MSE değerleri

n	30			50			70		
	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99
α	7,1194	13,2705	62,8334	3,6846	7,0236	42,3089	3,0381	5,0692	27,5966
α_M	4,5433	8,7354	48,2042	2,9147	3,4999	31,7434	2,1452	3,2538	20,9420
α_{GM}	2,1347	3,5539	13,7652	11,3489	1,7861	6,8050	1,1595	1,5816	4,9936
k_1	1,8597	3,0101	11,3489	1,2290	1,5902	5,6711	1,0990	1,4533	4,3900
k_2	1,5015	2,2596	7,9760	1,0956	1,3468	4,0918	1,0100	1,2769	3,4600
k_3	1,6794	2,6484	9,8598	1,1654	1,4494	4,9455	1,0573	1,3616	3,9793
k_4	1,4418	2,1794	7,9773	1,0722	1,2580	4,0220	0,9923	1,2268	3,4051
k_5	2,1159	3,5290	13,3525	1,3098	1,7818	6,7259	1,1490	1,5693	4,9472
k_6	1,4401	1,8398	3,2181	1,1606	1,3463	2,6176	1,0555	1,3167	2,5249
k_7	0,9628	1,2785	3,2913	0,8437	0,8933	2,1377	0,8077	0,8847	2,0652
k_8	1,2115	1,7236	4,9825	0,9545	1,0968	2,9057	0,8965	1,0783	2,7444
k_9	1,5453	2,3063	8,0129	1,1363	1,3873	4,1453	1,0416	1,3155	3,4934
k_{10}	1,4415	1,8414	3,0573	1,1654	1,3564	2,6200	1,0587	1,3227	2,5382
k_{11}	1,7740	2,6421	6,2143	1,2468	1,5996	4,5075	1,1099	1,4722	3,9358
k_{12}	1,9684	3,2418	11,7828	1,2778	1,7212	6,3204	1,1320	1,5360	4,7248
k_{13}	1,3523	1,6050	2,4929	1,1022	1,2977	2,2648	1,0293	1,2352	2,1595
k_{14}	1,0651	1,5089	5,3466	0,8281	0,9832	3,2038	0,7900	0,9187	2,2577
k_{15}	1,1280	1,6465	6,8974	0,9839	1,2355	4,0300	0,8836	1,0097	3,0914
k_{16}	0,8251	0,9860	1,4678	0,7972	0,8068	1,3204	0,7886	0,7881	1,4749
k_{17}	0,9532	1,2255	2,1444	0,8822	0,8953	1,8456	0,8572	0,8714	1,7284
k_{18}	1,1946	1,6297	2,6952	0,9508	1,0797	2,4464	0,8952	1,0721	2,2267
k_{19}	0,8529	0,9968	1,5373	0,8484	0,8804	1,4199	0,8248	0,8575	1,3709
k_{20}	1,8469	2,5592	3,6582	1,2504	2,5545	2,8324	1,1230	1,4774	2,2768
k_{21}	1,1333	1,4222	2,8407	0,9705	1,1447	2,1050	0,9272	1,0511	2,0548
k_{22}	1,9622	2,9477	5,8537	1,2752	1,6382	3,9256	1,1354	1,5138	3,8855
k_{23}	1,0943	1,3728	2,8212	0,9539	1,1042	2,0064	0,9271	1,0204	1,9969
k_{24}	1,9869	3,0123	6,2080	1,2822	1,6661	4,1083	1,1382	1,5247	3,9748
k_{25}	1,8430	2,9476	9,9846	1,2524	1,6583	5,8287	1,1159	1,4976	4,4724
k_{26}	1,5012	2,2586	7,9607	1,0955	1,3465	4,0879	1,0100	1,2769	3,4591
k_{27}	1,9275	3,1250	11,0763	1,2687	1,6926	6,0923	1,1261	1,5206	4,6276
k_{28}	1,6216	1,9949	2,1763	1,1967	1,3948	2,0838	1,0934	1,3790	2,0211
k_{29}	1,0574	1,3469	2,6216	0,9089	0,9697	1,9920	0,8807	0,9516	1,8548
k_{30}	1,8466	2,5779	3,9914	1,2542	1,5667	3,0523	1,1246	1,4701	2,9501
k_{31}	1,4005	1,9203	4,6601	1,0713	1,2203	2,8791	0,9963	1,2201	2,8465
k_{32}	1,7998	2,4748	3,6924	1,2408	1,5205	2,9908	1,1184	1,4476	2,8193
k_{33}	1,4432	1,9822	4,6536	1,0849	1,2609	2,9364	1,0032	1,2470	2,9132
k_{34}	1,6173	1,9886	2,1724	1,1942	1,3894	2,0061	1,0923	1,3762	1,9440
k_{35}	1,1896	1,4856	2,7877	1,0217	1,1773	2,1605	0,9903	1,1135	2,0916
k_{36}	1,7887	2,4528	3,6560	1,2350	1,5073	2,9203	1,1156	1,4413	2,9029
k_{37}	1,8104	2,5005	3,8125	1,2400	1,5281	2,8837	1,1176	1,4521	2,8507
k_{38}	1,4737	2,0153	4,8002	1,1192	1,2934	3,0204	1,0318	1,2757	2,9618
k_{39}	2,0164	3,3752	13,0538	1,2726	1,7017	6,4318	1,1278	1,5253	4,8278
k_{40}	2,1111	3,5316	13,6078	1,3044	1,7778	6,7690	1,1479	1,5691	4,9475
k_{41}	2,1147	3,5335	13,6697	1,3079	1,7795	6,7686	1,1484	1,5693	4,9545
k_{42}	1,7266	2,8174	10,5867	1,1734	1,4870	5,4540	1,0656	1,4138	4,3947
k_{43}	2,0815	3,4646	13,3427	1,2992	1,7567	6,6221	1,1443	1,5591	4,9000
k_{44}	2,1213	3,5470	13,7319	1,3102	1,7840	6,7914	1,1492	1,5709	4,9602
k_{45}	1,9061	3,0819	11,4703	1,2486	1,6261	5,7709	1,1158	1,4875	4,5127
k_{46}	2,0421	3,3829	12,9661	1,2881	1,7293	6,4550	1,1393	1,5471	4,8394
k_{47}	1,6172	2,2651	4,9919	1,1643	1,3762	3,1995	1,0662	1,3511	3,0028
k_{48}	1,8645	2,8004	7,1424	1,2476	1,5845	4,3913	1,1196	1,4825	4,0746
k_{49}	1,7744	2,5769	6,2686	1,2144	1,4959	3,8345	1,1011	1,4345	3,7487
k_{50}	1,3502	1,7288	3,1311	1,0649	1,3577	2,4250	1,0002	1,1996	2,3224
k_{51}	1,4478	1,7645	2,2241	1,1290	1,2647	2,0764	1,0448	1,2527	1,9975
k_{52}	0,9793	1,0286	1,2266	0,8529	0,8735	1,2064	0,8434	0,8591	1,1919
k_{53}	2,0272	3,2478	9,9182	1,2927	1,7234	5,7457	1,1420	1,5477	4,6524
k_{54}	1,6337	2,2068	4,0883	1,1795	1,4099	2,8572	1,0775	1,3450	2,6992

Tablo 2. p=4 ve %10 aykırın değer bulunması durumunda MSE değerleri

n	30			50			70		
	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99
α	6,4686	10,7607	44,6362	3,1362	4,8158	18,7822	2,6577	3,6993	12,6485
α_M	4,1172	7,3628	38,3169	2,4361	4,0766	14,1181	2,0376	3,0761	8,2952
α_{GM}	2,3258	3,6835	15,9829	1,3652	2,0260	6,7367	1,1811	1,6448	5,6619
k_1	2,0464	3,1503	13,7358	1,2788	1,8394	6,0779	1,1256	1,5303	5,2676
k_2	1,6573	2,4338	10,2059	1,1418	1,5611	4,7470	1,0290	1,3441	4,4067
k_3	1,8574	2,8006	12,2875	1,2122	1,7005	5,6024	1,0806	1,4394	4,9509
k_4	1,6075	2,3456	10,3765	1,1148	1,5032	4,9214	1,0114	1,3026	4,4572
k_5	2,3130	3,6572	15,5212	1,3644	2,0241	6,7207	1,1806	1,6439	5,6541
k_6	1,5589	1,8529	4,4131	1,1875	1,5492	3,5555	1,0792	1,3699	3,2049
k_7	1,0949	1,3817	4,4235	0,8924	1,0535	2,8945	0,7930	0,9369	2,7161
k_8	1,3623	1,8080	6,5397	1,0019	1,3216	3,8227	0,9101	1,1503	3,6756
k_9	1,7015	2,4669	10,2422	1,1692	1,5843	4,7823	1,0608	1,3720	4,4396
k_{10}	1,5540	1,8417	4,0604	1,1907	1,5548	3,5158	1,0818	1,3747	3,2899
k_{11}	1,9138	2,6352	7,5338	1,2895	1,8228	5,1263	1,1399	1,5377	4,7685
k_{12}	2,1620	3,3485	13,5230	1,3291	1,9454	6,2559	1,1626	1,6051	5,4209
k_{13}	1,5167	1,7743	3,6086	1,1691	1,4726	3,1387	1,0682	1,3297	3,0633
k_{14}	1,1907	1,6298	5,7900	0,8700	1,0262	2,4645	0,7934	0,8985	2,0557
k_{15}	1,2148	1,6780	7,4798	0,8915	1,0778	3,2786	0,7998	0,9472	2,6609
k_{16}	0,9327	1,0576	2,2547	0,8219	0,9109	2,0036	0,7360	0,8069	1,9823
k_{17}	1,0860	1,3353	3,3725	0,8910	1,0472	2,6974	0,7926	0,9343	2,6403
k_{18}	1,3478	1,7322	4,3515	0,9993	1,3104	3,5000	0,9090	1,1458	3,2593
k_{19}	0,9777	1,0446	2,1288	0,8301	0,9071	1,7144	0,7759	0,8446	1,6003
k_{20}	2,0879	2,8019	5,6425	1,3273	1,8767	4,5499	1,1630	1,5771	4,5059
k_{21}	1,2670	1,4672	3,9703	0,9749	1,1755	2,6267	0,9193	1,0858	2,4889
k_{22}	2,1933	3,1838	8,4494	1,3424	1,9357	5,4504	1,1704	1,6037	5,0188
k_{23}	1,2281	1,4376	3,9819	0,9586	1,1293	2,6021	0,9052	1,0544	2,3200
k_{24}	2,2121	3,2293	8,9431	1,3464	1,9522	5,5518	1,1727	1,6112	5,0819
k_{25}	2,0116	3,0024	11,3809	1,2915	1,8569	5,7542	1,1420	1,5574	5,1238
k_{26}	1,6571	2,4332	10,1949	1,1417	1,5610	4,7460	1,0290	1,3441	4,4063
k_{27}	2,1112	3,2237	12,7824	1,3186	1,9196	6,1336	1,1561	1,5894	5,3332
k_{28}	1,8545	2,1949	3,3306	1,2683	1,6791	3,1258	1,1336	1,4781	3,0096
k_{29}	1,2275	1,4808	3,7795	0,9687	1,1549	2,8026	0,8893	1,0540	2,7912
k_{30}	2,0739	2,7773	6,0596	1,3151	1,8382	4,3719	1,1584	1,5577	4,0776
k_{31}	1,5852	2,0896	6,5258	1,1344	1,4784	4,0104	1,0330	1,3113	3,9057
k_{32}	2,0346	2,6970	5,6115	1,3048	1,7994	4,2187	1,1527	1,5392	3,9606
k_{33}	1,6256	2,1261	6,4918	1,1464	1,5230	4,0497	1,0422	1,3360	3,9713
k_{34}	1,8514	2,1902	3,3266	1,2671	1,6766	3,1214	1,1329	1,4764	2,9951
k_{35}	1,3472	1,6064	3,9894	1,0504	1,2684	2,9820	0,9776	1,1694	2,7393
k_{36}	2,0259	2,6806	5,5735	1,3021	1,7934	4,1988	1,1510	1,5354	3,9452
k_{37}	2,0448	2,7202	5,8231	1,3077	1,8156	4,2735	1,1539	1,5461	3,9999
k_{38}	1,6545	2,1724	6,7104	1,1678	1,5367	4,1202	1,0603	1,3554	4,0132
k_{39}	2,2203	3,5584	15,1391	1,3447	1,9677	6,5523	1,1685	1,6158	5,5676
k_{40}	2,3147	3,6678	15,8695	1,3626	2,0206	6,7243	1,1800	1,6425	5,6583
k_{41}	2,3169	3,6703	15,9017	1,3639	2,0230	6,7264	1,1805	1,6437	5,6584
k_{42}	1,9850	3,0900	12,9659	1,2759	1,8120	6,0292	1,1180	1,5329	5,2407
k_{43}	2,2874	3,6089	15,6601	1,3567	2,0074	6,6686	1,1766	1,6354	5,6297
k_{44}	2,3233	3,6787	15,9620	1,3648	2,0251	6,7333	1,1809	1,6444	5,6606
k_{45}	2,1070	3,2451	14,0023	1,3066	1,8930	6,2324	1,1468	1,5706	5,3906
k_{46}	2,2520	3,5401	15,3656	1,3486	1,9895	6,6038	1,1723	1,6264	5,5985
k_{47}	1,8354	2,5057	7,5096	1,2392	1,6680	4,6588	1,1102	1,4598	4,5180
k_{48}	2,0771	3,0167	9,9419	1,3150	1,8738	5,6290	1,1559	1,5753	5,1579
k_{49}	1,9867	2,8196	9,0761	1,2834	1,7988	5,2682	1,1385	1,5325	4,9582
k_{50}	1,5586	1,9449	5,0791	1,1431	1,4405	3,6049	1,0421	1,3113	3,2143
k_{51}	1,6475	1,8934	3,0159	1,1837	1,4826	2,4951	1,0781	1,3257	2,3290
k_{52}	1,1373	1,1404	1,6952	0,9014	0,9548	1,3023	0,8566	0,9110	1,2446
k_{53}	2,2324	3,4053	12,4620	1,3520	1,9850	6,3270	1,1750	1,6273	5,4901
k_{54}	1,8363	2,3357	5,3706	1,2324	1,6468	3,5797	1,1097	1,4209	3,4593

Tablo 3. p=6 ve %5 aykırı değer bulunması durumunda MSE değerleri

n	30			50			70		
	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99
α	14,7481	28,7859	137,4686	7,4739	14,9097	82,1293	5,5992	9,9881	60,9919
α_M	11,0361	23,0871	111,2088	5,1496	8,6513	64,5336	4,4939	8,5927	49,9282
α_{GM}	6,3140	9,6131	32,2741	4,5925	5,5989	13,6871	4,1612	4,8390	10,7460
k_1	5,8568	8,6607	28,0761	4,4653	5,3061	12,1441	4,0816	4,6610	9,9258
k_2	4,8753	6,8630	20,0016	3,9970	4,5440	9,3693	3,7302	4,1335	8,0547
k_3	5,5237	7,9811	25,1969	4,3629	5,0862	11,0671	4,0149	4,5199	9,3125
k_4	4,7452	6,4242	18,7439	4,0928	4,5559	8,6477	3,8277	4,1540	7,7979
k_5	6,2886	9,5014	30,9939	4,5905	5,5924	13,5807	4,1603	4,8356	10,7248
k_6	4,7039	5,4879	8,1856	4,3116	4,7859	6,6113	3,9983	4,3818	6,5509
k_7	3,2595	3,9800	7,3823	3,1928	3,4283	4,9122	3,1158	3,2839	4,7044
k_8	4,1996	5,3279	12,4383	3,8314	4,2044	6,8172	3,6061	3,8811	6,6672
k_9	4,0006	5,0407	11,9327	3,7657	4,0460	6,5201	3,5710	3,7693	6,2102
k_{10}	4,9326	6,9197	20,0499	4,0972	4,6239	9,4241	3,8144	4,1954	8,1040
k_{11}	4,6764	5,4527	7,7108	4,3153	4,7937	6,4618	4,0012	4,3873	6,3424
k_{12}	5,5471	7,4989	15,5233	4,4879	5,3196	10,3673	4,1043	4,6903	9,2341
k_{13}	5,9469	8,8717	28,9214	4,5289	5,4793	13,0944	4,1304	4,7786	10,3754
k_{14}	4,2213	5,6490	16,1727	3,7934	4,3196	8,8405	3,5279	3,8161	6,9916
k_{15}	4,3935	6,1407	19,6593	3,8860	4,4356	9,9876	3,5954	4,0271	8,4224
k_{16}	2,7633	3,2529	4,2335	2,7406	2,9670	3,6889	2,7190	2,8943	3,6559
k_{17}	3,2481	3,9096	5,5359	3,1913	3,4203	4,4351	3,1152	3,2810	4,4046
k_{18}	4,1591	5,1175	6,8273	3,8249	4,1739	5,5858	3,6041	3,8707	5,5801
k_{19}	3,4416	3,7475	4,8743	3,4154	3,5470	4,0722	3,3932	3,4526	4,0509
k_{20}	5,5365	6,8212	8,1939	4,4656	5,1263	6,8726	4,1137	4,6634	6,8052
k_{21}	4,1241	4,8687	8,0909	3,9066	4,1620	5,4574	3,6927	3,8858	5,3236
k_{22}	5,9339	8,0482	12,8606	4,5336	5,3486	8,7026	4,1409	4,7488	8,6027
k_{23}	4,0059	4,7171	7,7846	3,8618	4,0669	5,3072	3,6669	3,8162	5,2885
k_{24}	5,9972	8,2308	13,6304	4,5446	5,3978	9,0508	4,1444	4,7671	9,0441
k_{25}	5,7614	8,3850	25,0496	4,4988	5,4023	12,4175	4,1128	4,7369	10,0953
k_{26}	4,8748	6,8612	19,9692	3,9969	4,5437	9,3638	3,7302	4,1335	8,0535
k_{27}	5,8834	8,6471	26,6933	4,5187	5,4436	12,6913	4,1240	4,7605	10,2559
k_{28}	5,0536	5,7366	5,9838	4,3574	4,8088	5,7489	4,0605	4,4911	5,7856
k_{29}	3,6448	4,2410	6,3603	3,6334	3,7818	4,8305	3,5182	3,6130	4,8168
k_{30}	5,7184	7,3341	9,7424	4,4975	5,2222	7,3098	4,1241	4,6864	7,1389
k_{31}	4,5674	5,6851	10,8336	4,0832	4,4516	6,6475	3,8477	4,1446	6,3034
k_{32}	5,6087	7,0772	9,1388	4,4769	5,1398	6,9595	4,1166	4,6502	6,8010
k_{33}	4,7014	5,8875	11,2287	4,1233	4,5552	6,8604	3,8691	4,2111	6,5908
k_{34}	5,0489	5,7305	5,9813	4,3545	4,8030	5,9433	4,0592	4,4879	6,8995
k_{35}	3,9594	4,5165	6,6794	3,9351	4,0973	5,1399	3,7559	3,8888	5,0309
k_{36}	5,5902	7,0447	9,0989	4,4678	5,1207	7,0146	4,1124	4,6411	6,9706
k_{37}	5,6374	7,1647	9,4236	4,4719	5,1530	7,0464	4,1131	4,6552	6,8379
k_{38}	4,7169	5,8651	11,0819	4,1759	4,5855	6,8529	3,9153	4,2438	6,5200
k_{39}	5,9813	9,0569	29,8316	4,4833	5,3983	12,8759	4,1039	4,7510	10,2917
k_{40}	6,2979	9,5802	32,0916	4,5874	5,5899	13,6448	4,1594	4,8361	10,7363
k_{41}	6,2955	9,5765	32,0871	4,5876	5,5891	13,6355	4,1595	4,8359	10,7319
k_{42}	4,8190	6,9336	20,2283	4,0307	4,6136	9,8915	3,8483	4,3202	8,6963
k_{43}	6,2273	9,4304	31,4499	4,5704	5,5465	13,4009	4,1513	4,8163	10,6378
k_{44}	6,3085	9,6016	32,2220	4,5912	5,5958	13,6699	4,1608	4,8381	10,7413
k_{45}	5,9071	8,7083	27,7994	4,4881	5,3392	12,1190	4,1037	4,7002	10,0256
k_{46}	6,1479	9,2626	30,6991	4,5498	5,4979	13,1371	4,1419	4,7947	10,5351
k_{47}	4,9032	6,1075	9,7353	4,2283	4,6430	6,4923	3,9674	4,3387	6,4333
k_{48}	5,5175	7,3282	13,8304	4,4274	5,0938	8,4281	4,0856	4,6152	8,0360
k_{49}	5,3983	7,0496	12,6794	4,3826	4,9843	7,7763	4,0596	4,5528	7,7420
k_{50}	4,1693	4,8416	6,4214	3,9473	4,1245	5,2532	3,7811	3,9701	5,1307
k_{51}	4,9590	5,8642	8,0500	4,2955	4,7469	6,0560	4,0112	4,3788	6,0010
k_{52}	3,9433	4,2701	4,8442	3,8304	3,8975	4,2291	3,6587	3,6945	4,1370
k_{53}	6,0270	8,6333	20,9340	4,5508	5,4592	11,4580	4,1453	4,7876	10,0533
k_{54}	5,4194	6,9045	11,8371	4,4048	5,0495	7,7306	4,0669	4,5481	7,5478

Tablo 4. p=6 ve %10 aykırın değer bulunması durumunda MSE değerleri

n	30			50			70		
	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99
α	12,9469	24,0652	120,7487	5,9058	10,4128	55,1169	4,7019	7,3899	38,5499
α_M	9,8879	19,4058	102,4783	5,2970	9,8616	47,0140	3,8450	6,9994	24,8972
α_{GM}	6,6429	10,2284	35,8696	4,5179	5,6284	15,0807	3,9980	4,9502	11,3522
k_1	6,1348	9,2242	31,9138	4,3771	5,3474	14,0066	3,9116	4,7767	10,7705
k_2	5,0327	7,2022	23,4954	3,8997	4,6344	11,3810	3,5719	4,2704	9,1782
k_3	5,7670	8,5063	29,1448	4,2643	5,1299	13,2014	3,8395	4,6354	10,2990
k_4	4,9037	6,8348	22,7048	3,9667	4,5796	11,1621	3,6385	4,2519	8,9912
k_5	6,6028	10,1153	33,9654	4,5160	5,6168	15,0273	3,9968	4,9472	11,3175
k_6	4,6713	5,3385	9,6888	4,1475	4,6708	8,3945	3,7995	4,4272	7,7518
k_7	3,4131	3,9362	8,7683	3,1762	3,3964	6,4216	2,9817	3,3659	5,5975
k_8	4,2669	5,4693	15,2626	3,7152	4,1807	9,2110	3,4340	3,9796	7,7901
k_9	4,1047	5,1920	14,7021	3,6381	4,0203	8,8480	3,4028	3,8494	7,3992
k_{10}	5,0843	7,2398	23,5382	3,9755	4,6769	11,4195	3,6367	4,3042	9,2210
k_{11}	4,6296	5,2688	8,8958	4,1490	4,6655	8,2834	3,7994	4,4305	7,7118
k_{12}	5,6428	7,4818	16,8480	4,3814	5,2582	11,9371	3,9276	4,7757	9,9957
k_{13}	6,2374	9,3541	30,8988	4,4440	5,4823	14,0854	3,9630	4,8786	10,9306
k_{14}	4,2675	5,7597	18,3505	3,5854	4,1134	9,1588	3,3578	3,7544	6,7839
k_{15}	4,3774	6,1442	21,6407	3,6572	4,2656	10,4505	3,3609	3,8225	8,0614
k_{16}	2,9134	3,1468	4,7533	2,7874	3,0558	4,5871	2,7426	2,9870	4,2509
k_{17}	3,4003	3,8704	6,8381	3,1745	3,3886	6,0450	3,1612	3,3628	5,4752
k_{18}	4,2316	5,2648	9,1494	3,7099	4,1586	8,2364	3,4420	3,9698	7,5251
k_{19}	3,3677	3,6075	5,2777	3,2730	3,3950	4,6834	3,2127	3,3769	4,4268
k_{20}	5,8980	7,3759	11,0144	4,4262	5,2884	9,8459	3,9585	4,8075	9,0803
k_{21}	4,1703	4,9657	9,8960	3,6957	3,9946	6,9383	3,4847	3,8951	6,3623
k_{22}	6,2905	8,6920	16,8196	4,4745	5,4597	11,9447	3,9803	4,8770	10,1390
k_{23}	4,0692	4,8137	9,5204	3,6464	3,9004	6,7232	3,4541	3,8158	6,1427
k_{24}	6,3441	8,8448	17,8957	4,4822	5,4910	12,2074	3,9840	4,8910	10,2771
k_{25}	5,9910	8,7498	26,7876	4,3958	5,3733	13,4358	3,9393	4,8254	10,6296
k_{26}	5,0324	7,2010	23,4744	3,8996	4,6343	11,3792	3,5719	4,2704	9,1776
k_{27}	6,1444	9,0756	29,0208	4,4302	5,4440	13,9353	3,9552	4,8597	10,8476
k_{28}	5,3383	6,1084	7,5196	4,2940	4,8977	7,3279	3,8992	4,6154	7,1531
k_{29}	3,7785	4,2460	7,6656	3,5312	3,7342	6,2823	3,3851	3,6766	5,7527
k_{30}	6,0345	7,8970	12,8019	4,4245	5,2918	9,9063	3,9613	4,8005	9,0856
k_{31}	4,7634	5,9890	13,7475	3,9875	4,4989	9,1773	3,6709	4,2673	7,9979
k_{32}	5,9373	7,6593	11,9068	4,4052	5,2232	9,5690	3,9524	4,7672	8,8429
k_{33}	4,8790	6,1803	14,2088	4,0322	4,6005	9,4181	3,7038	4,3363	8,2303
k_{34}	5,3346	6,1037	7,5170	4,2925	4,8950	7,3243	3,8983	4,6134	7,1489
k_{35}	4,0506	4,5416	8,0772	3,7454	3,9823	6,6415	3,5663	3,9128	6,1752
k_{36}	5,9230	7,6320	11,8719	4,4009	5,2144	9,5464	3,9498	4,7618	8,8247
k_{37}	5,9692	7,7489	12,3987	4,4090	5,2508	9,7515	3,9526	4,7801	8,9583
k_{38}	4,8980	6,1664	14,0397	4,0575	4,6004	9,3370	3,7309	4,3448	8,1780
k_{39}	6,3704	9,7367	33,1266	4,4427	5,4848	14,7872	3,9443	4,8924	11,0354
k_{40}	6,6315	10,2026	35,4938	4,5157	5,6247	15,0681	3,9971	4,9487	11,3476
k_{41}	6,6289	10,2001	35,7128	4,5156	5,6240	15,0663	3,9969	4,9485	11,3467
k_{42}	5,3195	7,6866	23,9775	4,1171	4,9238	12,8115	3,7170	4,5841	10,0108
k_{43}	6,5612	10,0662	35,2219	4,5013	5,5948	14,9491	3,9896	4,9331	11,2946
k_{44}	6,6386	10,2199	35,8357	4,5172	5,6270	15,0755	3,9978	4,9496	11,3503
k_{45}	6,2107	9,3241	31,9492	4,4136	5,4077	14,1594	3,9395	4,8259	10,9002
k_{46}	6,4857	9,9155	34,6223	4,4855	5,5627	14,8239	3,9815	4,9165	11,2389
k_{47}	5,2158	6,5867	13,2224	4,1707	4,7942	9,7410	3,8016	4,5237	8,6811
k_{48}	5,8483	7,9240	18,2524	4,3702	5,2234	11,8797	3,9265	4,7655	10,0128
k_{49}	5,7153	7,6539	17,3583	4,3232	5,1220	11,3422	3,9041	4,7058	9,7385
k_{50}	4,3909	5,0681	8,5260	3,8851	4,2261	7,2913	3,5990	4,1435	6,9517
k_{51}	5,1692	6,1225	9,3635	4,1946	4,7351	7,3819	3,8342	4,4525	6,8526
k_{52}	4,0571	4,3351	5,6338	3,6337	3,7471	4,6582	3,5385	3,6603	4,4319
k_{53}	6,3435	9,2165	24,9397	4,4842	5,5192	13,8658	3,9836	4,9075	10,9265
k_{54}	5,6506	7,2727	14,2729	4,3075	5,0399	9,2610	3,9007	4,6178	8,1908

Simülasyon çalışması ile elde edilen tablolardan çıkartılan sonuçlar ise aşağıda özetlenmiştir:

- Örneklem hacmi arttıkça tüm tablolarda EKK, M, GM ve tüm k değerleri için RGME' nin MSE değerleri azalmaktadır.
- Bağımsız değişken sayısı arttıkça tüm tahmin edicilerin MSE değerleri artmaktadır.
- Korelasyon şiddeti arttıkça tüm tahmin edicilerin MSE değeri artmaktadır.
- Bağımlı değişkende aykırı değer bulunduğu için M tahmin edicisi EKK tahmin edicisinden daha küçük MSE değerine sahiptir.
- Bağımsız değişkende aykırı değer bulunduğu için GM tahmin edicisi EKK ve M tahmin edicilerinden daha küçük MSE değerine sahiptir.
- Tüm k değerleri için RGME' lerin MSE değerleri GM tahmin edicisinin MSE değerlerinden daha küçüktür.
- Tablo 1 ve 2' de görüldüğü gibi $p=4$ olması durumunda 0,99 korelasyon değeri için en küçük MSE değeri k_{52} ' nin kullandığı RGME' dir.
- $p=4$ ve %5 aykırı değer için 0,90 ve 0,95 korelasyon değerlerinde k_{16} ' nin kullandığı RGME en küçük MSE değerine sahiptir.
- Tablo 1' de 0,90 korelasyon değerinde GM tahmin edicisi EKK tahmin edicisinin MSE değerini $n=30$ iken %70 iyileştirirken k_{16} ' nin kullandığı RGME %88 iyileştirmiştir. Ayrıca $n=70$ için GM tahmin edicisi %61, RGME ise %74 iyileştirmektedir.
- 0,99 korelasyon için en küçük MSE değeri olan k_{52} ' nin kullandığı RGME ile EKK tahmin edicisinin MSE değerini %98 iyileştirirken k_{16} ' nin kullandığı RGME ise %97 iyileştirmektedir.
- Tablo 2' de yani $p=4$ ve %10 aykırı değer olması durumunda en küçük MSE değeri 0,90 korelasyon için k_{16} ' nin kullandığı RGME' ye, 0,95 korelasyon için $n=30$ ve 50 iken k_{19} ' un kullandığı RGME' ye, $n=70$ iken k_{16} ' nin kullandığı RGME' ye ve 0,99 korelasyonda ise k_{52} ' nin kullandığı RGME' ye aittir.
- 0,90 korelasyon değeri için $n=30$ olması durumunda RGME, EKK tahmin edicisinin MSE' sini %85 iyileştirirken, $n=70$ olması durumunda %72 iyileştirmektedir.
- 0,99 korelasyon değeri için ise k_{52} ' nin kullandığı RGME, $n=30$ olması durumunda EKK tahmin edicisinin MSE değerini %96 ve $n=70$ olması durumunda ise %90 iyileştirmektedir.
- Tablo 3 ve 4' te görüldüğü gibi $p=6$ olması durumunda %5 ve %10 aykırı değer için seçilen tüm korelasyon değerlerinde en küçük MSE değeri k_{16} ' nin kullandığı RGME' ne aittir.
- Tablo 3' e göre $n=30$ olması durumunda 0,90 korelasyon için EKK tahmin edicisi GM tahmin edicisi ile %57 ve RGME ile %81 iyileştirilmiştir. $n=70$ olması durumunda GM tahmin edicisi ile %26, RGME ile %51 iyileştirilmiştir.
- 0,99 korelasyon değeri için $n=30$ olması durumunda EKK tahmin edicisinin MSE değeri GM tahmin edicisi ile %76, RGME ile %97 iyileştirilmiştir. Ayrıca $n=70$ olması durumunda ise GM tahmin edicisi %82, RGME %94 iyileştirmektedir.
- Tablo 4' teki $p=6$ iken %10 aykırı değer olması durumunda 0,90 korelasyon değerinde $n=30$ için EKK tahmin edicisinin MSE değeri GM tahmin edicisi ile %49, RGME ile %77 ayrıca $n=70$ olması durumunda ise GM tahmin edicisi ile %15, RGME ile %42 iyileştirilmiştir.
- 0,99 korelasyon değeri için ise EKK tahmin edicisinin MSE değeri $n=30$ için GM tahmin edicisi ile %70, RGME ile %96, $n=70$ olması durumunda GM tahmin edicisi ile %70, RGME ile %89 iyileştirilmiştir.
- Korelasyon değerinin artması ile RGME' nin EKK tahmin edicisinin MSE değerini iyileştirme oranı artmaktadır.

- Örneklem hacmi arttıkça GM tahmin edicisi ve RGME' nin EKK tahmin edicisinin MSE değerini iyileştirme oranı azalmaktadır.
- Aykırı değer oranının artması durumunda tahmin edicilerin EKK tahmin edicisinin MSE değerini iyileştirme oranı azalmaktadır.
- Değişken sayısının artması durumunda yine tahmin edicilerin EKK tahmin edicisinin MSE değerini iyileştirme oranları azalmaktadır.

B. Gerçek Veri

Bu bölümde elde edilen simülasyon sonuçlarını desteklemek amacıyla gerçek veri seti örneğinde de tahmin edicilerin performansları MSE kriterine göre karşılaştırılmıştır. Bu amaçla Brownlee [29] tarafından verilen stackloss verisi kullanılmıştır. Amonyagin (NH) nitrik aside (HNO) oksidasyonu için bir tesisin 21 gün işletilmesiyle elde edilen veri setinde üç bağımsız değişken bulunmaktadır. Bu değişkenler soğutma suyunun sıcaklığı, hava akımı ve asit konsantrasyonunu göstermektedir. Bağımlı değişken ise absorbe edilmeden bitkiye giden amonyak ölçüsüdür. Bu ölçü olarak amonyak miktarının on katı alınmış ve bu şekilde tesisin verimliliği ölçülmeye çalışılmıştır. Bu veri setinde EKK, ME, GM ve çalışmada kullanılan farklı yanlılık parametreleri ile RE, RME ve RGME tahmin edicilerinin MSE değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar ise Tablo 5' te verilmiştir.

Tablo 5. Stackloss verisine ait tahmin edicilerin MSE değerleri

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
α	0,2428	0,20923	0,19221	0,18943	0,17614	0,24275	0,17074
α_M	0,2238	0,19344	0,17640	0,17507	0,16258	0,22381	0,15962
α_{GM}	0,1998	0,16385	0,13858	0,14185	0,12658	0,19977	0,13032
	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}
α	0,17024	0,17232	0,19223	0,17030	0,19188	0,19908	0,19221
α_M	0,15920	0,15949	0,17643	0,15926	0,17816	0,18295	0,17677
α_{GM}	0,12996	0,12373	0,13863	0,13003	0,15002	0,15030	0,15356
	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}	k_{20}	k_{21}	k_{22}
α	0,15221	0,16864	0,17024	0,19676	0,24063	0,24509	0,24204
α_M	0,14102	0,15636	0,15920	0,18128	0,22194	0,18851	0,22316
α_{GM}	0,10142	0,12042	0,13000	0,15525	0,19849	0,16078	0,19930
	k_{24}	k_{25}	k_{26}	k_{27}	k_{28}	k_{29}	k_{30}
α	0,24182	0,18745	0,24275	0,20006	0,24110	0,21205	0,24153
α_M	0,22297	0,17162	0,22381	0,18496	0,22229	0,19594	0,22265
α_{GM}	0,19915	0,14009	0,13858	0,15812	0,19867	0,17053	0,19887
	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}
α	0,24156	0,21740	0,24110	0,21209	0,24156	0,24152	0,21803
α_M	0,22266	0,20125	0,22229	0,19597	0,22266	0,22265	0,20135
α_{GM}	0,19879	0,17793	0,19867	0,17057	0,19879	0,19886	0,17643
	k_{40}	k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}
α	0,24275	0,24275	0,24274	0,24248	0,24275	0,23451	0,24221
α_M	0,22381	0,22381	0,22380	0,22357	0,22381	0,21642	0,22332
α_{GM}	0,19977	0,19977	0,19976	0,19948	0,19977	0,19101	0,19920
	k_{48}	k_{49}	k_{50}	k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}
α	0,24215	0,24200	0,23827	0,20650	0,15906	0,24258	0,22485
α_M	0,22327	0,22311	0,21978	0,19034	0,14390	0,22366	0,20693
α_{GM}	0,19922	0,19901	0,19564	0,17287	0,11827	0,19963	0,18617

Tablo 5 incelendiğinde veri setinde bağımlı değişkende aykırı değer bulunduğundan dolayı ME, EKK tahmin edicisinden daha etkin ayrıca bağımsız değişkende de aykırı değer bulunduğundan dolayı GM tahmin edicisi ise hem EKK hem de ME' den daha etkin sonuçlar vermiştir. Benzer şekilde tüm yanlılık parametrelerine bağlı RME' ler, RE' lerden daha etkin ve RGME' ler ise RE ve RME' lerden daha küçük MSE değerlerine sahiptirler. Çoklu iç ilişki bulunan veri setinde tüm yanlılık parametreleri için RE' ler, EKK tahmin edicisinden, RME' ler, ME' den ve RGME' ler ise GM tahmin edicisinden daha küçük MSE değerlerine sahiptirler. RE, RME ve RGME tahmin edicilerinin MSE değerleri tek tek incelendiğinde üç tahmin edici için kendi içlerinde en küçük MSE değeri k_{16} ile hesaplanan tahmin edicilere aittir. Tüm MSE değerlerine bakıldığında ise en küçük MSE değeri k_{16} ' ya bağlı RGME tahmin edicisine aittir.

V. SONUÇLAR

Bu çalışmada Ridge tahmin edicisinin performansını etkileyen yanlılık parametresinin farklı tahmin edicileri üzerinde durulmuştur. Yapılan çalışmalar incelendiğinde yanlılık parametresinin performansı sadece çoklu iç ilişki bulunan veri setleri üzerinde yapılan simülasyon çalışmalarında tahmin edicilerin performansları karşılaştırılmıştır.

Çoklu iç ilişki bulunan veri setlerinde daha etkin sonuçlar elde edebilmek amacıyla Ridge tahmin edicisi önerilmiştir. Fakat uygulamada çoklu iç ilişki problemi, sıklıkla karşılaşılan diğer bir problem olan aykırı değer problemi ile birlikte görülmektedir. Bu iki problemin ortak çözümleri için yapılan çalışmalarda sağlam Ridge tahmin edicileri önerilmiştir. Bu tahmin edicilerden en yaygın olarak bilineni RME' dir. Fakat bu tahmin edici bağımsız değişkende aykırı değer bulunması durumunda etkinliğini kaybetmektedir. Bu amaçla RGME önerilmiştir.

Önerilen sağlam Ridge tahmin edicilerinde genellikle Hoerl ve Kennard [4] tarafından önerilen yanlılık parametresinin tahmin edicisi kullanılmıştır. RE' de bu yanlılık parametresinin tahmini için alternatif birçok yanlılık parametresi tahmin edicileri önerilmiştir. Fakat önerilen diğer parametre tahmin edicilerinin sağlam Ridge tahmin edicilerindeki performansları karşılaştırılmamıştır. Bu amaçla her iki değişkende de aykırı değer bulunması ve çoklu iç ilişki problemi olan veri setlerinde RE ve RME' den daha etkin sonuçlar veren RGME' de farklı yanlılık parametrelerinin performansları karşılaştırılmıştır. Yapılan simülasyon çalışması ve gerçek veri örneğinin sonuçları göstermiştir ki önerilen yanlılık parametreleri RGME' ne olumsuz bir etki göstermemektedir. Tüm yanlılık parametreleri ile RGME, EKK, ME ve GM tahmin edicilerinden daha etkin sonuçlar vermektedir.

Yapılan bu çalışmada M tipi tahmin ediciler üzerinde durulmuştur. Bu çalışmaya ek olarak diğer sağlam Ridge tahmin edicilerinde farklı yanlılık parametrelerinin performansları incelenebilir. Veri setinde aykırı değer bulunması durumunda kullanılacak sağlam tahmin edicilere bağlı olarak yeni yanlılık parametresi için tahmin ediciler önerilebilir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (ESOGÜBAP) Komisyonu tarafından 2020-19A102 nolu proje olarak desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Huber, P. J. (1964). Robust estimation of a location parameter. *The Annals of Mathematical Statistics Theory and Methods*, 53 (1), 73-101.
- [2] Mallows, C. L. (1975). On some topics in Robustness. Unpublished Memorandum, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, NJ.
- [3] Handschin, E., Schewpe, F. C., Kohlas, J. & Fiechter, A. (1975). Bad data analysis for power system state estimation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 4 (2), 105-123.
- [4] Hoerl, A. E. & Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12, 55-67.
- [5] Theobald, C.M. (1974). Generalization of mean square error applied to ridge regression. *Journal of the Royal Statistical Society*, ser B (36), 103-106.
- [6] Hoerl, A.E., Kennard, R.W. & Baldwin, K.F. (1975). Ridge regression: some simulation. *Communications in Statistics*, 4, 105-123.
- [7] Lawless, J. F. & Wang, P. A. (1976). Simulation study of ridge and other regression estimators. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 5, 307-323.
- [8] Hocking, R. R., Speed, F. M. & Lynn, M. J. (1976). A class of biased estimators in linear regression. *Technometrics*, 18, 425-438.
- [9] Kibria, B.M.G. (2003). Performance of some new ridge regression estimators. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 32, 419-435.
- [10] Khalaf, G. & Shukur, G. (2005). Choosing ridge parameters for regression problems. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, A34, 1177-1182.
- [11] Alkhamisi, M., Khalaf, G. & Shukur, G. (2006). Some modifications for choosing ridge parameters. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 35(11), 2005-2020.
- [12] Alkhamisi, M. A. & Shukur, G. (2007). A Monte Carlo study of recent ridge parameters. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*®, 36(3), 535-547.

- [13] Muniz, G. & Kibria, B. G. (2009). On some ridge regression estimators: An empirical comparisons. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*®, 38(3), 621-630.
- [14] Al-Hassan, Y. M. (2010). Performance of a new ridge regression estimator. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 9(1), 23-26.
- [15] Muniz, G., Kibria, B. M. G., Mansoon, K. & Shukur, G. (2012). On developing ridge regression parameters: a graphical investigation. *Sort Stat Oper. Res. Trans*, 36 (2), 115-138.
- [16] Dorugade, A. V. (2014). New ridge parameters for ridge regression. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 15, 94-99.
- [17] Karaibrahimoğlu, A., Asar, Y. & Genç, A. (2014). Some new modifications of Kibria's and Dorugade's methods: An application to Turkish GDP data. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 20, 89-99.
- [18] Asar, Y. & Genç, A. (2017). A note on some new modifications of ridge estimators. *Kuwait J. Sci.*, 44 (3), 75-82.
- [19] Silvapulle, M. J. (1991). Robust ridge regression based on an m estimator. *Australian Journal of Statistics*, 33 (3), 319-333.JJ
- [20] Arslan, O. & Billor, N. (1996). Robust ridge estimation based on the gm estimators. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 9(1), 1-9.
- [21] Altın Yavuz, A. (2019). A New Modification of Ridge Parameter for Regression Problems: A Monte Carlo Simulation Study, *Türkiye Klinikleri Journal of Biostatistics*, 11 (3), 173-188.
- [22] Işılar, M. (2020). Çoklu Lineer Regresyon Modelinde Liu tipi GM Tahmin Edicisi, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- [23] Simpson, D. G., Rubbert, D. & Carrol, R. J. (1992). On one-step Gm estimates and stability of inferences in linear regression. *Journal of the American Statistical Association*, 87, 439-450.
- [24] Farrar, D. E. & Glauber, R. R. (1967). Multicollinearity in regression analysis: The problem revisited. *The Review of Economics and Statistics*, 49 (1), 92-107.
- [25] Silvey, S. D. (1969). Multicollinearity and imprecise estimation. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 31 (3), 539-552.
- [26] McDonald, G. C. & Galarneau, D. I. (1975). A Monte Carlo evaluation of ridge-type estimators. *Journal of the American Statistical Association*, 70 (350), 407-416.
- [27] Newhouse, J. P. & Oman, S. D. (1971). An evaluation of ridge estimators, Rand Corporation (p-716-PR) Santa Monica, 1-16.
- [28] R Core Team (2014). R: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: R Foundation for statistical computing.
- [29] Brownlee, K. A. (1965). *Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering* 2nd ed, John & Sons, New York.