OKU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 4, Sayı 3, 274-282, 2021

OKU Journal of The Institute of Science and Technology,
Volume 4, Issue 3, 274-282, 2021

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Dergisi

Osmaniye Korkut Ata University
Journal of The Institute of Science and Technology

Simetrik Modüllerin Türevleri Üzerine Bir Not

Ali KARAKUŞ[1*]

[1] Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 79000, Kilis

[1]https://orcid.org/0000-0002-8483-0137
*Sorumlu yazar: alikarakus@kilis.edu.tr

Araştırma Makalesi

Makale Tarihçesi:
Geliş tarihi: 10.02.2021
Kabul tarihi:29.03.2021
Online Yayınlanma: 15.12.2021

Anahtar Kelimeler:
Simetrik modül
Homomorfizma
Sonlu üretilmiş modül
Halka
Simetrik modüllerin türevi

ÖZET

Simetrik modüller ve Exterior modüller ile ilgili çalışmalar özellikle Değişmeli Cebir alanında araştırmacılara değişik bakış açıları kazandırmıştır. Bu bakış açılarından birisi de Simetrik ve Exterior modüllerin kararlı ve yarı karalı alt modüllerinin cebirsel özellikleri ile ilgilidir. Bu modül yapılarının matematik ile iç içe olan Matematiksel Fizik gibi başka alanlarda da kullanımı söz konusu olmaktadır. Bu çalışmada, herhangi modül homomorfizmaları için simetrik modüllerin yarı kararlı alt modüllerinin özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca bu makalede özel olarak karakteristiği sıfır olan bir halka üzerindeki sonlu olarak üretilen modül yapılarının kararlı olan alt modüllerinin bazı özellikleri incelenmiştir. Son olarak da Yardımcı Teoremler ile elde edilen bazı sonuçlara yer verilmiştir.

A Note on Derivation of Symmetric Modules

Research Article

Article History:
Received: 10.02.2021
Accepted: 29.03.2021
Published online: 15.12.2021

Keywords:
Symmetric module
Homomorphism
Finitely generated module
Ring
Derivation of symmetric modules

ABSTRACT

Studies on symmetric modules and exterior modules have brought different perspectives to researchers, especially in the field of Commutative Algebra. One of these perspectives is related to the algebraic properties of the stable and semi-stable submodules of the Symmetric and Exterior modules. These module structures are also used in other fields such as Mathematical Physics, which are intertwined with mathematics. In this paper, we will examine properties of semi stable submodules of symmetric modules for any module homomorphisms. In addition, in this article, some properties of stable submodules of finitely produced module structures on a ring with zero characteristic are examined. Finally, some results obtained with Auxiliary Theorems are given.

To Cite: Karakuş A. Simetrik Modüllerin Türevleri Üzerine Bir Not. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2021; 4(3): 274-282.

Giriş

Bir cebirin yüksek dereceden diferansiyel operatörlerinin modülleri ise ilk defa (Osborn, 1967) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra benzer tanımlar Heyneman ve Sweedler (1969) in çalışmalarında görülmektedir. Bu konuda en kapsamlı çalışma ise Nakai (1970) tarafından yapılmıştır. Türev modülleri ve simetrik türev tanımı ise ilk olarak Osborn (1968) tarafından yapılmıştır. Aynı konu üzerinde Vasconcelos (1968); Sweedler (1975); Hart (1996); Bergman (1997) gibi birtakım matematikçiler de çalışmıştır. Ayrıca Karakus (2021)'da yine exterior ve simetrik modüllerin türevleri ile ilgili bazı sonuçlar elde etmiştir.

M karakteristiği sıfır olan bir halka üzerinde sonlu üretilmiş bir modül olsun. M üzerindeki her e^* modül homomorfizması için $d(e^*)$, $S(M)$ simetrik modülü üzerinde bir türevdir ve

$$d(e^*)x_1x_2...x_p = \sum_{k=1}^{p} e^*(x_k)x_1...x_k...x_p$$

ile tanımlanır.

Bu çalışmada, herhangi $e_1^*, e_2^* \in M$ modül homomorfizmaları için $d(e_1^*)d(e_2^*)A \subseteq A$ şartını sağlayan $S(M)$ nin A alt modüllerinin özelliklerini inceleyeceğiz.

Simetrik modüller kavramı birçok bilim insanı tarafından yıllardır çalışılan bir konudur. Bu çalışmada Greub (1967), Lambek (1971), Huneke (1981), Sharp (2000)'den faydalanılmıştır.

$Hom(M,M)$, M üzerindeki tüm modül homomorfizmaların oluşturduğu küme olmak üzere, M, $Hom(M,M)$ ile birlikte karakteristiği sıfır olan bir R halkası üzerinde sonlu üretilmiş bir $R-$modül olsun. Ayrıca $S(M) = \sum_{m=0} S^m(M), M$ üzerinde bir simetrik modül olsun. Her $e^* \in Hom(M,M)$ için $d(e^*), S(M)$ üzerinde bir türev olarak tanımlanır ve her $p \in \mathbb{Z}^+, \lambda \in R, x_j \in M, j = 1,2,..., p$ için

$$d(e^*)x_1x_2...x_p = \sum_{k=1}^{p} e^*(x_k)x_1...x_{k-1}x_{k+1}...x_p$$

$$d(e^*)\lambda = 0$$

dır. $A \subset S(M)$ olduğunu kabul edelim. O zaman, A,

1) $e^* \in Hom(R,R)$ için $d(e^*)A \subseteq A$ ise kararlı

2) $e_1^*, e_2^* \in Hom(R,R)$ için ise yarı kararlı olarak adlandırılır.

Bu çalışmada, $S(M)$ simetrik modüllerinin yarı kararlı alt modüllerini ve özelliklerini inceleyeceğiz.

Simetrik Modüllerin Yarı Kararlı Alt Modülleri

Bu kısımdaki ana teoremi ve ispatını vermeden önce aşağıdaki yardımcı teoremleri ispatlayalım.

Yardımcı Teorem 1: $x, y_1, y_2, ..., y_k \in R, 0 \neq \lambda \in R$ ve $f(x) = x + \lambda x^2$ olsun. Ayrıca

$$H = \{1, f(x)\}$$

ya da

$H = \{1, f(x), f^{'}(x) y_1, ..., f^{'}(x) y_k\} \cup \{y_i y_j : 1 \leq i \leq j \leq k\}$ olsun. O zaman H tarafından üretilen $S(M)$ nin B alt modülü yarı kararlıdır.

İspat: Eğer $H = \{1, f(x)\}$ ise ispat aşikardır. Biz ikinci durumu ispatlayalım. $x = y_{k+1}$ olmak üzere $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^* \in Hom(R, R)$ $R-$modül homomorfizmaları ile birlikte $y_1, y_2, ..., y_n \in M$ ve $\phi_1 = d(y_s^*) \in S(M), \phi_2 = d(y_t^*) \in S(M)$ iki türev olsun. $d_1, d_2 \in H$ alalım.

$\left(d(y_{k+1}^*) f(x)\right)^2 = \left(f^{'}(x)\right)^2 = 1 + 4\lambda f(x) \in B$ olduğundan

$$\phi_1(d_1)\phi_2(d_2) \in B \qquad (0.1)$$

dir. Dolayısıyla $\phi_1\phi_2(d_1) \in B$ olur.

$m \geq 2, g_i \in H, i = 1, 2, ..., m$ için $g = g_1 g_2 ... g_m$ ve $h = g_1 g_2 ... g_{m-1}$ olsun. $m \geq 3$ için tümevarımdan faydalanarak

$$\phi_1(g_1 g_2 ... g_{m-2})\phi_2(g_m) \in B \qquad (0.2)$$

olduğunu kabul edebiliriz. Dolayısıyla (1.2) den

$$\begin{aligned}\phi_1(h)\phi_2(g_m) &= \left(g_{m-1}\phi_1(g_1 g_2 ... g_{m-2})\right) \\ &+ \left(g_1 g_2 ... g_{m-2}\phi_1(g_{m-1})\right)\phi_2(g_m) \in B\end{aligned} \qquad (0.3)$$

dir. Tekrar tümevarım yaparak

$$\phi_1\phi_2(h) \in B \qquad (0.4)$$

elde ederiz. (1.1), (1.3) ve (1.4) denklemlerinden

$$\phi_1\phi_2(g) = \phi_1(h\phi_2(g_m) + g_m\phi_2(h))$$

$= \phi_1(h)\phi_2(g_m) + h\phi_1\phi_2(g_m) + \phi_1(g_m)\phi_2(h)$ elde edilir. Bu ise B nin yarı kararlı olması demektir.

$+ g_m\phi_1\phi_2(h) \in B$

Yardımcı Teorem 2: $A, S(M)$ nin yarı kararlı bir alt modülü ve $y_1, y_2, ..., y_k \in R, 0 \neq \lambda_i, i = 1,2,...,k$ olmak üzere $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2$ olsun. Ayrıca $x \in M$ için $x + y \in A$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) Her $1 \leq i \leq k$ için bir $x_i^{'} \in M$ vardır öyleki $x_i^{'} + y_i^2 \in A$ dır.

b) $x = 0$ iken $y_1^2, y_2^2, ..., y_k^2 \in A$ dır.

İspat:

a) $k > 1$ ve $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^* \in Hom(R, R)$ için $y_1, y_2, ..., y_n \in R$ olsun.

$A \in (x+y)^2 = x^2 + 2xy + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 y_i^4 + 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \lambda_i \lambda_j y_i^2 y_j^2$ olduğundan bazı $g_0 \in F, g_1 \in R$ için

$$v = d(y_1^*) d(y_1^*)(x+y)^2$$
$$= g_0 + g_1 + 12\lambda_1^2 y_1^2 + 4\sum_{i=2}^{k} \lambda_1 \lambda_i y_i^2 \in A$$

dır. Dolayısıyla

$$v - 4\lambda_1(x+y) = g_0 + (g_1 - 4\lambda_1 x) + 8\lambda_1^2 y_1^2 \in A$$

olur. Buradan da açıkça görüleceği üzere $F \subseteq A$ dır. Ayrıca $(8\lambda_1^2)^{-1}(g_1 - 4\lambda_1 x) = x_1^{'} \in R$ olduğundan $x_1^{'} + y_1^2 \in A$ dır. Benzer şekilde $2 \leq i \leq k$ olmak üzere bazı $x_i^{'} \in R$ için $x_i^{'} + y_i^2 \in A$ dır.

b) nin ispatı (a) nın ispatına benzer olarak yapılır.

$h_1, h_2, ..., h_k \in R$ olmak üzere $0 \neq \lambda_i \in R, i = 1,2,...,k$ için $h \in S^2(M)$ simetrik modülü $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i^2$ olarak yazılabilir.

Yardımcı Teorem 3: $A, S(M)$ nin yarı kararlı bir alt modülü olsun. O zaman bazı $W \subset M$ için $A \cap S^2(M) = S^2(W)$ dir.

İspat: W, M nin en büyük alt modüllerinden biri olmak üzere $S^2(W) \subseteq A$ olsun. Kabul edelim ki $h \in A \cap S^2(W)$ ve $h \notin S^2(W)$ olsun. Yardımcı Teorem 2(b) den, bir $e \in M$ vardır öyle ki $e^2 \in S^2(W)$ ve $e^2 \in A$ dır. $e^2 \in A$ olduğundan, $W \neq 0$ ve $0 \neq y \in W$ için $y^2 e^2 \in A$ olur. A nın yarı kararlı oluşundan, $ye \in A$ ve dolayısıyla $A \supseteq S^2(W + \langle e \rangle)$ dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $A \cap S^2(M) = S^2(W)$ dir.

Yardımcı Teorem 4: W, M nin bir alt modülü, $z \in S^q(M)$ ve $r < q$ bir pozitif tamsayı olsun. Eğer $z \notin S^q(M)$ ise $e_i^*, \ldots, e_{q-r}^* \in Hom(R, R)$ $R-$modül homomorfizmaları vardır öyle ki

$$\left(\prod_{j=1}^{q-r} d\left(e_j^*\right) \right) z \notin S^r(W)$$

dir.

$r = 1$ için bu Yardımcı Teorem, Marvin Marcus da ispatlanmıştır.

Teorem: $B, S(M)$ simetrik modülünün yarı kararlı bir alt modülüdür ancak ve ancak

Ya, $B = S(W)$ dir.

Ya, bazı $W \subset M$ alt modülleri için $B = \sum_{m=0} S^{2m}(W)$ dir.

Ya da B, Yardımcı Teorem 1 de belirtildiği gibi bir alt modüldür.

İspat:

Gereklilik: Yardımcı Teorem1'den açıktır.

Yeterlilik:

1.Durum: $B \cap M = W \neq 0$ ve $S^2(W) \subset B$ olduğundan $F \subseteq B$ dir. $z_i \in S^i(M), z_q \neq 0, q \geq 2$ için $z = \sum_{i=1}^{q} z_i \in B$ olsun. Eğer q tek sayı ise $F \subseteq B$, $B \cap M = W$ ve Yardımcı Teorem 4'den $z^q \in S^q(W)$ dır. Kabul edelim ki q çift sayı ve $0 \neq w \in W$ olsun. O zaman $zw = \sum_{i=1}^{q} z_i w \in B$ iken $z_q w \in S^{q+1}(W)$ olur. Dolayısıyla buradan da $B = S(W)$ elde ederiz.

2.Durum: $B \cap M = 0$ olduğundan, eğer $B \cap \left(\sum_{i=0}^{2} S^i(M) \right) = F$ ise Yardımcı Teorem 4'den $B = F$ elde edilir. Şimdi, $B \cap \left(\sum_{i=0}^{2} S^i(M) \right) \neq F$ olduğunu kabul edelim. Buradan, $F \subseteq B$ ve $B \cap \left(\sum_{i=0}^{2} S^i(M) \right) \neq 0$ olduğu kolayca görülür. Şimdi; $z^i \in S^i(M)$ ve $z_q \neq 0$ olmak üzere $z = \sum_{i=1}^{q} z_i \in B$ olduğunu kabul edelim. $B \cap M = 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 4 e göre q çift olmalıdır. Dolayısıyla burada iki tane daha alt durum ortaya çıkar:

Alt Durum 1: $0 \neq u_1 \in U, u_2 \in S^2(M)$ olmak üzere $B, u_1 + u_2$ formunda hiçbir eleman içermesin. Yardımcı Teorem 3'den, bazı $W \subset M$ alt modülleri için

$$B \cap \left(M + S^2(M) \right) = S^2(W) \qquad (0.5)$$

dir. Eğer $q \geq 4$ ise, Yardımcı Teorem 4 ve Yardımcı Teorem 5'e göre $z \in B$ ve $F \subseteq B$ olduğundan $z_q \in S^q(W)$ elde ederiz. Dolayısıyla tümevarımdan da yararlanarak, $z = \sum_{m=0} S^{2m}(W)$ bulunur. Bu ise $B = \sum_{m=0} S^{2m}(W)$ olduğunu gösterir.

Alt Durum 2: $0 \neq u_1 \in M, u_2 \in S^2(M)$ olmak üzere $B, u_1 + u_2$ formunda bir elemanı içersin. $v_1, v_2, ..., v_k \in M$ olmak üzere, $\alpha_i \neq 0, i = 1, 2, ..., k$ için $u_2 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i^2$ yazarız. Yardımcı Teorem 2'den dolayı, $v_1^{'}, v_2^{2}, ..., v_k^{'} \in M$ vardır öyle ki $i = 1, 2, ..., k$ için $v_i^{'} + \alpha_i v_i^2 \in B$ dir. $B \cap M = 0$ ve her $i = 1, 2, ..., k$ olmak üzere, yarı kararlılıktan dolayı $v_i^{'} \in \langle v_i \rangle$ olduğu görülür. Dolayısıyla $B \cap M = 0$ iken

$$u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^{k} \left(v_i^{'} + \alpha_i v_i^2 \right) \qquad (0.6)$$

dir. Yani bazı $v_j^{'} \neq 0$ dır. Bu yüzden bazı $\lambda \in R$ için $0 \neq x \in M$ vardır öyle ki $x + \lambda x^2 \in B$ dir. Şimdi, W, M nin bir alt modülü olmak üzere $B \cap \left(S^2(M) \right) = S^2(W)$ olsun. o zaman ya $W = \{0\}$ ya da W, $f(x) = x + \lambda x^2$, $f^{'}(x) = 1 + 2\lambda x$ ve $H = \{1, f(x), f^{'}(x) y_1, ..., f^{'}(x) y_k\} \cup \left(S^2(W) \right)$ elemanlarına sahiptir. Şimdi, B nin H tarafından üretildiğini göstermeliyiz. İlk olarak, şunu belirtmeliyiz ki; her $1 \leq i \leq k$ için

$$f\left(x\right)y_i^2 \in B \qquad (0.7)$$

dir. $B \cap M = 0$ olduğundan x ve y_i farklı elemanlardır. Dolayısıyla, B'nin yarı kararlılığı ve (1.7) den $2f^{'}\left(x\right)y_i \in B$ dir. Ayrıca $\left[H\right], S\left(M\right)$ nin H tarafından üretilen alt modülünü göstermek üzere $\left[H\right] \subseteq B$ dir. $B \cap \left(M + S^2\left(M\right)\right) \subseteq \left[H\right]$ olduğunu göstermeliyiz.

$0 \neq u \in M, c \in R$ olmak üzere $u + cu^2 \in B$ olsun. Eğer u ve x farklı elemanlar değilse $B \cap M = 0$ ve $x + \lambda x^2, u + cu^2$ da farklı elemanlar değildir. Dolayısıyla $u + cu^2 \in H$'dır. Şimdi, kabul edelim ki u ve x farklı elemanlar olsunlar. $x^*, u^* \in Hom(R,R)$ için

$$x^*(x) = 1 \ , \ x^*(u) = 0$$

$$u^*(u) = 1 \ , \ u^*(x) = 0$$

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}&\lambda\left(x + \lambda x^2\right) + c\left(u + cu^2\right)\\ &-\frac{1}{2}d\left(x^*\right)d\left(u^*\right)\left(x + \lambda x^2\right)\left(u + cu^2\right) + \frac{1}{2} = \left(\lambda x - cu\right)^2 \in B\end{aligned}$$ dir. Bu yüzden $\left(\lambda x - cu\right) \in W$'dır.

$$\begin{aligned}c\left(u + cu^2\right) &= \left(\lambda x - cu\right)^2 + \lambda\left(x + \lambda x^2\right)\\ &- f^{'}(x)\left(\lambda x - cu\right)\end{aligned} \qquad (0.8)$$

ve (1.8) in sağ tarafındaki her terim $\left[H\right]$ nin elemanı olduğundan

$$u + cu^2 \in \left[H\right] \qquad (0.9)$$

olur. Dolayısıyla (1.6),(1.8) ve (1.9) dan

$$\begin{aligned}&B \cap \left(M + S^2\left(M\right)\right)\\ &\subseteq \left[H\right] \subseteq S\left(\langle x, y_1, y_2, ..., y_k \rangle\right)\end{aligned} \qquad (0.10)$$

sonucunu elde ederiz.

$q \geq 4$ ve tümevarım yardımıyla $B \cap \left(\sum_{i=0}^{q-2} S^i\left(M\right)\right) \subseteq \left[H\right]$ olduğunu kabul edelim. $y_{k+1} = x$ olmak üzere $y_1, y_2, ..., y_n \in M$ olsun. O zaman; $G_{q,n}, q$ uzunluğundaki tüm azalmayan dizilerin kümesi olmak üzere, $\alpha \in R$ için $z_q = \sum_{\alpha \in G_{q,n}} a_\alpha y_{\alpha_1} ... y_{\alpha_q}$ dır. Kabul edelim ki, $G_1 = \left\{\alpha \in G_{q,n} : a_\alpha \neq 0\right\}$ olsun.

Yardımcı Teorem 4 ve (1.10) dan dolayı her $\alpha \in G_1$ için $\alpha_q \leq k+1$ elde edilir. Buradan, her $\alpha \in G_1, \alpha_{j_\alpha} \leq k$ için

$$y_{\alpha_1} \dots y_{\alpha_q} = y_{\alpha_1} \dots y_{\alpha_{j_\alpha}} y_{k+1}^{q-j_\alpha}$$

bulunur. Eğer j_α çift ise,

$$J_\alpha = \left(f(x) \right)^{(q-j_\alpha)/2} y_{\alpha_1} \dots y_{\alpha_{j_\alpha}}$$

dır. Eğer j_α tek ise

$$J_\alpha = \left(f(x) \right)^{(q-j_\alpha-1)/2} y_{\alpha_1} \dots y_{\alpha_{j_\alpha}} f'(x)$$

dir. Dolayısıyla her $\alpha \in G_1$ için $J_\alpha \in [H] \subseteq B$ ve bir $c_\alpha \in R$ için,

$$c_\alpha J_\alpha - a_\alpha y_{\alpha_1} \dots y_{\alpha_q} \in \sum_{i=0}^{q-i} S^i(M)$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} z - \sum_{\alpha \in G_1} c_\alpha J_\alpha &= \sum_{i=0}^{q-1} z_i + \sum_{\alpha \in G_1} a_\alpha y_{\alpha_1} \dots y_{\alpha_q} - \sum_{\alpha \in G_1} c_\alpha J_\alpha \\ &\in \left(\sum_{i=0}^{q-2} S^i(M) \right) \cap B \end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı $z - \sum_{\alpha \in G_1} c_\alpha J_\alpha \in [H]$ ve $z \in [H]$ dir.

Dolayısıyla $B = [H]$ dir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarı herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Yazar makaleye %100 oranında katkı sağlamış olduğunu beyan eder.

Kaynakça

Bergman GM. Tensor algebras, Exterior algebras and Symmetric algebras, 1997; http://math.berkeley.edu/gbergman.

Greub WH. Multilinear algebra, 1st edition. NY: Springer-Verlag; 1967.

Hart R. Higher derivations and universal differentials. Journal of Algebra 1996; 184: 175-181.

Huneke C. On the symmetric algebra of a modüle. Journal of Algebra 1981; 69: 113-119.

Karakuş A. An Approximation to second exterior derivation of high order universal modules. Algebra Letters 2021; 1: 1-13.

Lambek J. On the representation of modules by sheaves of factor modules. Canadian Mathematical Bulletin 1971; 14: 359-368.

Nakai Y. High order derivations. Osaka Journal of Mathematic 1970; 7: 1-27.

Osborn H. Modules of diferantials I. Mathematische Annalen 1967; 170: 221-244.

Osborn H. Modules of diferantials II. Mathematische Annalen 1968;175: 146-158.

Sharp RY. Steps in commutative algebra, 2nd edition. UK: Cambridge University Press;2000.

Sweedler ME. Groups of simple algebras. Publicationes Mathematicae 1975; No:44.

Sweedler ME., Heyneman RG. Affine hopf algebras. Journal of Algebra 1969; 13: 192-241.

Vasconcelos WVA. Note on normality and the module of differantials. Mathematische Zeitschrift 1968; 105: 291-293.