

SİMETRİ VE DÖNME EKSENLERİNİN DÜZLEM SİMETRİ GRUPLARININ ANLAŞILMASINDAKİ ÖNEMİ

Özlem ÇEZİKTÜRK KİPEL

Özet

Dönüşüm geometrisi, farklı eksenler etrafında döndürmeyle oluşan geometrik şekilleri incelemektedir ve öğrencilerin uzamsal düşünme becerilerini geliştirmektedir. Yansıma simetrisi, dönme, ötelemeli yansıma bu dönüşümlerden bazılarıdır ve düzlem simetri gruplarının özellikleridir. Düzlem simetri gruplarının anlaşılması dönüşüm geometrisinin müfredattaki yerinin de değerlendirilmesi bağlamında önemlidir. Bu çalışmada simetri ve dönme eksenlerinin dönüşüm geometrisinin anlaşılmasında nasıl etkili olabildiğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışma 64 ilköğretim matematik öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Metot olarak içerik analizi ve nicel tarama yöntemleri bir arada kullanılmıştır. Araştırmanın analizinde odak, öğrencilerin kopyaladığı farklı simetri özelliklerine sahip şekillerin simetri ve dönme eksenlerine göre ayrımıdır. Öğretmen adayları kâğıdın üst kısmındaki çizime bakarak 3 çeşit düzlem simetri özelliği (pm , $p3$, $p6$) taşıyan deseni aşağıdaki noktali kâğıda geçirmişlerdir. Yaptıkları düzeltmeler sayılmış ve not edilmiştir. Çoğu aday öğretmen üç şekli de, bazıları ise en azından bir ikisini yapmıştır. İlişkili örneklem için t-testi analizi oluşturulmuştur. Daha önceki araştırmalarla paralellik göstererek yansıma simetrisinin (pm) öğretmen adaylarının en doğru kopyalayabildiği şekil olduğu, diğer iki şeklin ise düzeltme ortalamalarının birbirine yakın olduğu gözlemlenmiştir. Bu bize düzlem simetri gruplarının simetri ve dönme eksenlerine göre sıralamasında başa gelindikçe daha kolay anlaşıldığı ve dönme simetrisinin hem şekil algısını hem de anlamayı zorlaştırdığını göstermektedir. Birbirine benzer parçalar da analiz etmeyi ve anlamayı kolaylaştırmamaktadır.

Anahtar Sözcükler: *Yansıma simetrisi, Düzlem simetri grupları, Dönme simetrisi, Parça bütün ilişkisi*

Abstract

Transformational geometry investigates the shapes that are reflected around different axes and it enhances students' spatial thinking abilities. Reflection symmetry, rotation and glide reflection are some of these and they belong to the plane symmetry groups. Understanding plane symmetry groups is important for development of the place of the transformational geometry in the curriculum. In this study, the way symmetry and rotation axes act on understanding of transformational geometry was investigated. Data was collected from 64 preservice primary math teachers. Methodology included content analysis and quantitative research methods. They looked to an upper figure and redrew 3 plane symmetry group figures (p1, p3 and p6) on to the isometric paper underneath. Their corrections were counted and noted. Most preservice teachers did all three but some did at least one. Analysis was t-test for parallel groups. The results looked parallel to literature and reflection symmetry flourished as the easiest one for teachers. The correction means for other two figures looked similar. This shows that plane symmetry group figures are easier from the beginning in the classification with respect to the symmetry and rotation axes but gets difficult via rotations. Similar parts do not make it easy to analyze.

Keywords: *reflection symmetry, plane symmetry groups, rotational symmetry, whole-part relationships*

GİRİŞ

2005 yılında yapılan müfredat değişikliği ile yansıma simetrisi, dönme simetrisi ve ötelemeli yansıma programa dâhil edilen konulardan bazılarıdır (Talim ve Terbiye Kurulu, 2005). Yansıma simetrisi eski müfredatta da ayna yansıması adıyla var olmaktadır ama 2013 müfredatındaki kadar düzlem simetri gruplarına atıfla incelenmemiştir. 7. Sınıfta dönüşüm geometrisi başlığı altında öteleme ve yansıma dönüşümleri derinlemesine incelenmektedir. 8 sınıfta da dönüşüm geometrisi dönme kavramı ile devam etmektedir (Talim ve Terbiye Kurulu, 2013). Baki (1996) yansıma simetrisini bir yere olan uzaklığın korunması şeklinde tanımlar. Rotasyon simetrisini de bir noktaya olan uzaklık korunurken aynı motifin bir yön boyunca tekrarlanması şeklinde tanımlamak mümkündür. Bu tanımlar çerçevesinde bir yansıma aynası yardımıyla simetri alınabildiği gibi bir nokta etrafında şekli döndürerek de simetri sorulabilmektedir. Bu da konunun düzlem simetri gruplarına bağlantısını içerir.

Matematik öğretiminde, dönüşüm geometrisi konusunun karmaşıklığı ve yeniliği doğrultusunda özellikle dinamik geometri yazılımlarının kullanılması gündeme gelmiştir (Yavuz,2013) .Bu bağlamda yapılan araştırmalardan Güven ve Kaleli-Yılmaz (2011), sınıf öğretmenlerinin başarısına dinamik geometri yazılımlarıyla bu dersi anlatılmasının faydalı olduğunu belirlemiştir. Fakat bu çalışmada kullanılan testteki soruların sözel ve sembolik olması ve grafiğe dayandırılmaması dikkat çekicidir.

Matematik eğitimi literatüründe benzer çalışmalar gözlemlenmemekle birlikte, psikoloji, felsefe ve matematik alanlarında şekil tanıma, ayırt etme ile ilgili araştırmaların sayısı epey fazladır. Bu araştırmalardan bazıları bilgisayar yardımı ile şekil ayırt etme ile ilgilenirken (Mumford, 1991), bazıları şekil tanımanın teorilerini belirlemeye çalışmıştır (Mac-Pherson, 2010; Pizlo, & Salach-Golyska, 1995, Todd, 2004). Bu teoriler özellikle üç ana başlığa ayrılmaktadır; bakış açısına yönelik, yapıya yönelik ve perspektif öğelerine yönelik. Hiçbir teori diğerine üstün gelemediği için literatürde bu konuda hem fikir olunamamıştır ve hala şekil algısı konusu bir muamma olarak kalmaktadır. Aslan ve Tari (2005) eksen konusunu ele almışlar ve eksene göre rotasyonun cismin farklı açılardan görünümü konusunda sağlam bir bilgi verdiğini ve bölümlere ayrılıp incelendiğinde cismin şeklinin tanınması açısından yardımcı olabileceğini vurgulamışlardır. Çünkü eksen ele alınan uzay hakkında da bilgi vermektedir.

Presmeg (2008) psikolojide mümkün olmayan şekillerle ilgili araştırmalar olsa da bunların matematik eğitimindeki uzamsal becerilerle ilişkisi üzerine fazlaca değinilmediğini savunmaktadır. Bu ilişkilerden özellikle “üç boyutlu cisimlerin zihni rotasyonları”, üzerinde yeterince durulmamış konulardandır (Bishop, 2008). Bishop (2008) ayrıca uzamsal becerilerden algılama, hatırlama, tanıma veya aynı orantılarla yeniden yapılandırmaya dikkat çeker. Burada başarıyı, örüntü geri getirme, tanıma ve bir bütün olarak ye-

niden yapılandırma olarak tanımlamak yanlış olmaz. Bu da bir açıdan Vale ve arkadaşları (2011) bu kavramı yapı farkındalığı terimi ile açıklamaktadır. Yapı farkındalığı karmaşık geometrik yapıların irdelenmesi ve matematiksel özelliklerinin belirlenmesi ile ilgilidir. Yapı farkındalığı kavramı başarıyı tanımlamakta kullanılmasına rağmen alan eğitimindeki çerçevesinin belirlenmesi konusunda incelenmemiştir (Vale ve diğerleri, 2011). Benzer çalışmalardan bir diğeri de Guay ve Mc Daniel'in (Akt. Bishop, 2008 te belirtildiği üzere) düşük düzey ve yüksek düzey uzamsal beceriler ile ilköğretim matematik başarısını ilişkilendirdikleridir. Düşük düzey uzamsal becerileri 2 boyutlu şekillerin görselleştirilmesi olarak düşünürler fakat bu düzey zihinsel dönüşümleri içermez. Yüksek düzey uzamsal beceriler olarak ise 3 boyutlu şekillerin görselleştirilmesi ve bu şekillerin zihinsel dönüşümleri düşünülür (Akt. Bishop, 2008, s.72).

Dönüşüm Geometrisi ve Mümkün Olmayan Şekiller

2 boyutta geometrik olarak çizilebilseler de 3 boyutta gerçek dünyada mümkün olmayan yani gerçekliğe dökülemeyen yani mümkün olmayan şekiller Alan Wiltshire (1997)'in kitabında ve Sugihara'nın (2014) web sitesinde örneklendirilir. Kitabın özelliği üstte şekil verilirken altta noktalı kâğıt parçası verilerek şeklin birebir kopyasının yapılmasının beklenmesidir. Şekiller zorluk derecesine göre ilerler ve matematik öğretiminde kullanılabilecek açılar, çokgenler ve geometrik örüntüler içerir. Örüntüler, çoğunlukla 3 boyutta küplerin üst üste konulmasından oluşmuş izlenimi verir fakat hatalıdır. Hatalı da olsa matematik öğretmen adaylarıyla kullanılması onlardaki dönüşüm geometrisi kavramının oluşumunun ve gelişiminin desteklenmesi açısından gereklidir.

Düzlem simetri grupları bazen bir alanı tümünden kaplamak için de kullanılabilir. Bu durumda duvar kâğıdı örüntüleri ismiyle anılırlar (Baloglou, 2006). Bir düzlemi dolduran şekillerin kaynağının kare, dikdörtgen, eşkenar üçgen veya altıgen olması gereklidir. Kare, bir köşesinin 180 derece döndürülmesiyle aynı forma geri dönerken, aynı kare, köşegenlerinin kesişim noktasından 90 derecelik açı ile döndürülebilir (Baloglou, 2006). Altıgen dönme simetrisine sahiptir. 60 derecelik açılarla döndürülebilir. Eşkenar üçgen de 120 derecelik açı ile döndürülebilir. Dönme (rotasyon) simetrisi iki tur, üç tur, dört tur veya altı tur şeklinde olabilir. Örneğin bir altıgen 6 tur aynı nokta etrafında dönse de gene aynı şekilde görünür. Bu düzlemsel şekiller yanyana bir alanı bezemeleri için kullanıldığında dönme, öteleme ve ötelemeli yansıma özellikleri kullanılarak boşluksuz olarak alanı doldururlar. İspanya'daki Alhambra sarayında (Granada) bulunan 17 çeşit düzlem simetri grubunun 17 ye sınırlandırılması kristalografik sınıflandırma olarak ta bilinir (Schattschneider, 1978; Baloglou, 2006). Bu simetri grubunun sanatsal örnekleri de M.C. Escher (1898-1972)'in bezemelerinde görülür.

Düzlem Simetri Grupları

Düzlem simetri grupları düzlem izometrilere ve belirli bir örüntüyü sürekli tekrar ederler Düzlemde öteleme, dönme, ve ötelemeli yansıma olmak üzere üç izometri çeşidi vardır. (Levine, 2008). (Schattschneider, 1978). Burada yansıma ayna yansımasıdır, döndürme (rotasyon) merkezi bir nokta etrafında döndürmedir, ötelemeli yansıma ise bir çizgi boyunca yansımanın ötelenmesidir. Bu çalışmada kullanılan sınıflandırma ise Schattschneider (1978) ve Levine (2008) in makalelerinde yansıttığı uluslararası sınıflandırmaya göredir. Her periyodik örüntü onu oluşturan ızgaradan (grid) belirlenir. Izgara; paralelkenar, dikdörtgen, dörtgen, kare, eşkenar üçgen (veya onlardan oluşan altıgen) olabilir. Örüntüyü oluşturan ve kendisinin üstüne oluşturulan bağıntılarla ana şekli veren en küçük şekil birim şekil olarak adlandırılır.

Üçgen simetri II (şekil 1) 120 derecelik dönme simetrisine, altıgen simetri II ise 60 derecelik dönme simetrisine ve çizgi simetrisi de yansıma simetrisine sahip olduklarından bu isimleri almışlardır. Numaralandırmadaki II ise bu çalışmayı içeren başka bir dizi çalışmada farklı şekiller de kullanıldığından verilmiştir. Bu çalışma için farklı bir anlam teşkil etmemektedir. Çizgi simetrisi tek yansıma simetrisi şekil olduğundan Levine ve Schattschneider in sınıflandırmasına göre “pm” olarak isimlendirilebilir. Ancak, türlü rotasyona sahip olan ve içinde yansıma simetrisi veya öteleme yansıması olmayan şekiller (üçgen simetri II ve altıgen simetri II) de “p3” ve “p6” olarak isimlendirilmelidir. 3 ve 6 dönme simetrisindeki dönme sayısına eşdeğerdir ve sınıflandırmadan gelmektedir.

Mümkün olmayan şekiller düzlem simetri gruplarının birebir örnekleri olmadığı için üç şekil de yazar tarafından düzlem simetri gruplarına olan benzeşimleriyle (izometrileryle) isimlendirilmiştir. Onların sınıflandırması da tablo 1 de genel notasyonla birlikte verilmiştir. Tablo 1 yansıma eksenlerine ve yansıma, ötelemelerin varlığına göre sınıflandırılmıştır.

Tablo 1. *Araştırmada kullanılan mümkün olmayan şekiller*

Şekil çeşidi	Düzlem simetri grubu	Yansımalar/ötelemeler	Yansıma eksen
Çizgi simetri	pm	var, yok	var
Üçgen simetri II	p3	yok, yok	yok
Altıgen simetri II	p6	yok, yok	yok

Sadece çizgi simetrisinde yansıma simetrisi vardır, diğer ikisinde ise döndürme simetrisi vardır. Üç-gen simetri üç türlü rotasyona sahiptir. Altıgen simetri şeklinde de altılı rotasyon simetrisi mevcuttur. Şekillerin sınıflandırılması için Jensen and Harvey (1988) algoritması ile Schattschneider (1978) in 17 düzlem simetri grupları listesine bakılabilir. Barlow, Fedorov and & Schönflies’ün 1800 lü yıllarda ispatladığı gibi sadece 17 değişik simetri grubu

vardır ve duvar kâğıdı örüntüsü olarak adlandırılırlar. Çalışmada kullanılan şekiller şekil 1, şekil 2 ve şekil 3 de de görülebilir.

Şeklin imkânsız olmasına araştırmada hiç değinilmeyecektir. Öğretmen adaylarına da vurgulanmamıştır. Fakat resmin alındığı kitapta bunlar “mümkün olmayan katılar” olarak isimlendirildiğinden öğrencilerin (imkânsızlığı fark edenlerin) ön bilgisi de mevcuttur. Cismin mümkün olmamasının sadece akıl yürütmeye öğrencinin önsezilerine aykırı düşündürteceği fakat çözüme engel olmayacağı düşünülmüştür. Bunlar 2 boyut ile 3 boyut arası geçişleri de vurgulayan şekillerdir. Bu kitapta her şekil için bir sayfa vardır ve üstteki şekli aşağıya geçirirken verilen izometrik kâğıt parçasından ve başlangıç noktalarından faydalanılır.

Simetri eksenini düzlemi iki parçaya böler (Zembat, 2007). Eksenden olan uzaklığı her iki tarafta da koruyan şekilde ayna simetrisi vardır. Bu çalışmada kullanılan şekillerden sadece bir tanesi simetri eksenli şekildir. Ve ona “çizgi simetrisi” adı verilmiştir (Şekil 1). Öğretmen adayları, öğrenim hayatlarından ve aldıkları geometri derslerinden bu konulara aşinaydılar. Dönme simetrisi eski öğretim programlarında işlenmeyen bir konu iken, bununla ilgili kavramsal bilgiyi geometri derslerinden ve yeni müfredatın gerekliliklerinden çıkarabilmektedirler. Dönme sayısı bir merkez etrafında şeklin kaç defa döndürülse de şeklin görselliğinin değişmeyeceği üzerine kuruludur. Bu düzlem simetri gruplarının da gerektirdiği izometrilere birisidir. Öteleme örüntüyü yeniden yerleştirmektir veya başka bir deyişle kaydırmaktır. Son olarak ötelemeli yansıma bir çizgi boyunca ilerletilen yansımadır. Buradaki örneklerde ötelemeli yansıma yoktur. Bu kavramların daha detaylı açıklaması için yeni müfredat (Talim ve Terbiye Kurulu, 2013) ve Zembat’ın (2007) makalesine de bakılabilir.

Öğrenme; şekillerin de gösterim şekli olarak kullanıldığı karmaşık bir süreçtir. Bu karmaşık süreç aynı zamanda akıl yürütmeyi de içerir. Farklı gösterim şekillerinin yalnız ve bir arada kullanılması ile ilgili araştırmalar son yıllarda sıkça görülmektedir. Şekilleri (diyagramları) ve onlarla olan akıl yürütmeyi anlayabilmek ise özellikle interaktif diyagramları öğretimde daha etkin bir biçimde kullanmanın yolunu açabilecektir. Çünkü her interaktif diyagram daha statik şekillerin iç içe geçmesi ile veya birlikte kullanılmasıyla oluşmaktadır. Burada diyagramların ayrımı düzlem simetri gruplarına izometrilere yoluyla olmuştur. Ayrıca, düzlem simetri gruplarının anlaşılmasında dönüşüm geometrisinden nasıl yararlanılabileceği program geliştirenlere yardımcı olabilecektir.

Araştırmanın Amacı

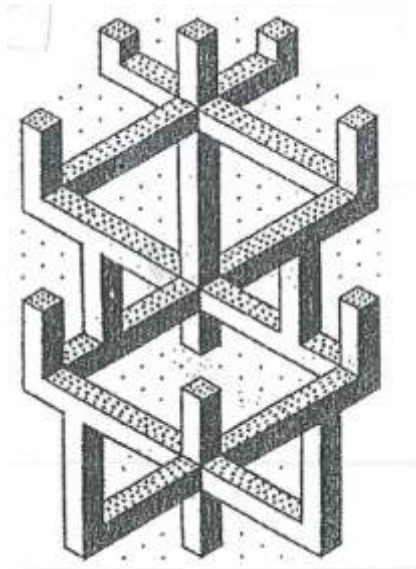
Müfredat giren ve ağırlığı artan konularla ilgili araştırmaların artırılması o konuların daha iyi öğretilmesine de fayda sağlar. Dönüşüm geometrisi de bunlardan birisidir. Dinamik geometri yazılımları ile dönüşüm geometrisi konusu anlatılabilir fakat bu matematiksel düşüncenin belli bir açıdan incelenmesine yol açar. Matematiksel düşünme matematikçi gibi düşünmeyi de içermelidir. Bunun için ise konuların ileri sınıf matematik kavramları ile ilişkileri

belirlenmelidir ve öğrencilere fark ettirilmelidir. Öğrencilere fark ettirmek için ise öğretmen adaylarına uygun bağlantılar kurulmalı veya hissettirilmelidir. Araştırmada karmaşık düzlem simetri grup özellikleri taşıyan şekillerle (şekil 1, şekil 2, şekil 3) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının yapısal farkındalığa ulaşip ulaşmadıkları, ulaşmak için simetri ve dönme eksenlerini kullanmaları incelenmiştir. Bu şekiller Wiltshire'in kitabından alınmıştır. Öğretmen adaylarının yaptıkları düzeltmeler ile yapı farkındalığının ne kadarının oluştuğu belirlenmiştir. Matematik kaygısını arttırmadan yüksek matematikle ilgili bir konuyla bağlantıları fark etmeleri sağlanmıştır. Bu bağlamda simetri ve rotasyon eksenlerinin düzlem simetri gruplarıyla olan bağlantılarını şekilsel olarak düşünmeleri amaçlanmıştır.

Araştırma Problemleri

Bu araştırma ile öğretmen adaylarının karmaşık 3 boyutlu görünen geometrik şekillerin (şekil1, şekil2, şekil3) yeniden yapılandırılması sırasında yaptıkları düzeltme sayısının şeklin geometrik sınıflandırmasıyla ilişkisi incelenmiştir.

Şeklin geometrik sınıflandırmasında simetri ve rotasyon eksenleri önem kazanmıştır. Çünkü eksen döndürme veya hareket ettirme için başlangıç noktası belirlemek gereklidir. Bu çalışmada kullanılan imkânsız şekiller Wiltshire(1997)'in "Üçüncü boyut ve mümkün olmayan katılar" kitabından alınmış şekillerdir. İmkânsız bir şekil, geometrik olarak kâğıda dökülebilen fakat gerçek hayatta kâğıtla, tahtayla ve başka bir hammaddeyle üretilemeyecek, sadece belli bir açıdan bakılırsa bazı parçaların oluşturulabildiği şekillerdir. Şekil 1' de sadece simetri eksenine olduğundan yansıma simetrisi

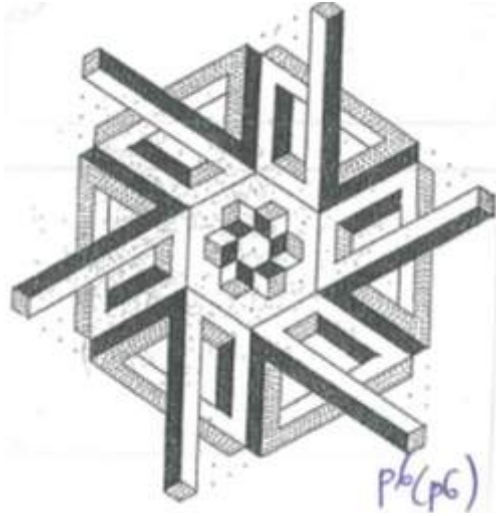
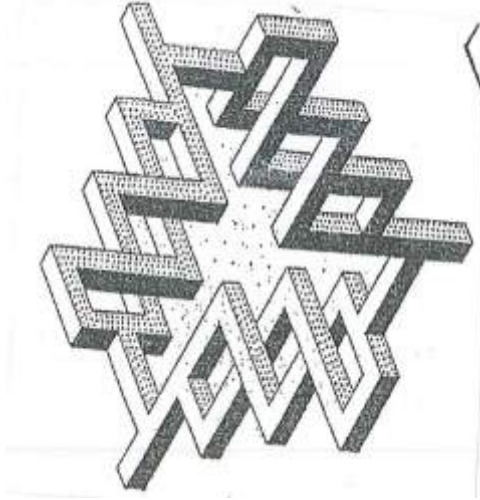


Şekil-1. Çalışmada kullanılan şekiller-Çizgi simetrisi

görüldükçe, şekil 2 de üçgen simetri yani 3 rotasyon ekseni ve şekil 3 te 6 rotasyon ekseni farklılığı ile

yaptıkları düzeltme sayısının bu sınıflandırmaya göre anlamlı bir fark olup olmadığına bakılmıştır. Akıl yürütmenin düzlem simetri gruplarından farklı özellikteki üç şeklin yeniden yapılandırılması sırasında karşılaşılan güçlüklerin aynı şekil veya farklı şekil olduğu zaman oluşan farklılıkların nedenleri sorgulanmıştır. Aynı öğretmen adaylarının farklı şekilleri yapmaları durumundaki düzeltme sayısı farklılığına da bakılmıştır.

Şekil-2. Çalışmada kullanılan şekiller- Üçgen simetri II



Şekil- 3. Çalışmada kullanılan şekiller, Altıgen simetri -II

YÖNTEM

Örneklem

Çalışmanın örneklemini olarak İstanbul'daki iki devlet üniversitesinin eğitim fakültelerinde okuyan toplam 64 ilköğretim matematik öğretmenliği 3. Sınıf öğrencisinden veri alınmıştır. Öğretmen adayları çoğunlukla öğretmen liselerinden sonra bu okullara girmiş, Türkiye geneline göre başarılı öğrencilerdir.

Veri toplama, analiz

Veri toplama, farklı zamanlarda "Matematik ve sanat" ile "Matematiğin doğası" derslerinin içeriği olarak ele alınmıştır. Bu dersler ilköğretim matematik öğretmeni adaylarına 3. Sınıf dersleri arasında verilmektedir. Derslerin içeriğinde çalışma sayfası şeklinde dağıtılan veri toplama kâğıtlarının üst kısmında üç boyut imgesi perspektifle verilmiş düzlem simetri grup özelliği taşıyan çizimlerini, aynı kâğıdın altında bulunan boş izometrik kısma aktarmaları istenmiştir. Çizimleri yaparken tek başlarına olmaları gerektiği vurgulanmıştır. Öğrenciler sayfanın üstünde verilen imkânsız şekli aşağıdaki ızgaraya geçirmişlerdir. Şeklin sadece küçük bir kısmı aşağıdaki izometrik ızgaraya referans noktaları olarak verilmiştir. Üstten alta gördükleri kadarıyla şekli çizmeye çalışmışlardır. Derste 3 boyut imgesi ve perspektif kavramları üzerinde durulmuştur. Düzlem simetri gruplarının sınıflandırmaları üzerinde ise durulmamıştır. Sadece duvar kâğıdı simetrisi denilen bir şey olduğunu ve bunun Endülüs Emevilerinden kalan İspanya'da Alhambra Sarayı'nın duvarlarında da 17 çeşit şeklinde yer aldığından bahsedilmiştir. Öğrencilere bu şekli aşağıya geçirirlerse bir artı alacakları sözü verilmiştir.

Wiltshire'ın kitabından alınan şekiller öğrencilere rasgele dağıtılmıştır. Bu üç şeklin seçilmesi ise simetri ve rotasyon eksenlerinin sayısına göre olmuştur. Hangi şekli hangi öğrencinin alacağı önceden belli değildir. Çizgi simetrisi 60 öğretmen adayı tarafından, üçgen simetri II 47 öğretmen adayı tarafından ve altıgen simetri II 48 öğretmen adayı tarafından çizilmiştir. 41 öğrenci her üç şekli de çizmiştir, 3 öğrenci p_3 ve p_6 yı çizmiştir. 2 öğrenci p_3 ve p_6 leri çizmiştir. 4 öğrenci p_3 ve p_6 ları ızgaraya geçirmiştir. Toplamdaki 64 öğrenci içinden 14 öğrencinin de sadece çizgi simetrisi şeklini çizmişlerdir.

Buradaki p_3 ; simetri grupları sınıflandırmasında içinde ayna simetrisi yer alan şekil, p_6 ; içinde 120 derecelik üçlü dönme simetrisi yer alan şekil için ve p_6 ; ise içinde 60 derecelik altılu dönme simetrisi olan şekil için kullanılmıştır. Bu sınıflandırma Schattscheider'ın (1978) makalesinde ayrıntılı olarak görülebilir. Sınıflandırma bu üç şekil çeşidi ile sınırlı değildir. Şekillerin benzerliği ele alınarak yola çıkılmıştır.

Öğretmen adaylarına dağıtılan çalışma kâğıdının üst kısmında yer alan şekil de benzer bir izometrik kâğıt parçasına (ızgara= grid) e çizilmiştir. O yüzden ızgaradan yol göstericisi olarak faydalanabilmişlerdir. Üstteki şekli aşağıya tekrar çizerken uzaklıkları yanlış hesaplama gibi, boyutları yanlış yerleştirme gibi, boş kalması gereken noktaları yanlış sayma gibi ve parçaları farklı belirleme gibi küçük hatalar yapmışlardır ve bu hataları kâğıttan silseler

bile kâğıt üzerinde izi kalmıştır. Kendilerine düzeltmelerinin sayıldığı bilgisi verilmemiştir. Fakat çalışma ile geometrik irdeleme konusunda bilgi toplanılmaya çalışıldığı bilgisi öğrencilerle paylaşılmıştır. Bu çalışmada tam olarak niteliksel araştırma yöntemlerinden içerik analizi metodu kullanılmıştır. İçerik analizinde analiz edilen veri bir yazılı doküman olabileceği gibi bir şekil de olabilir. Yalnız sadece nitel araştırma metodu değil, kullanılan analizler yolu ile de nicel araştırma metodları kullanıldığından araştırma karma metod kullanılarak yürütülmüştür. Ayrıca, başlama ve bitiş zamanları ve dolayısı ile sürelerini de not etmeleri istenmiştir. Yani zaman, öğrencilerin verilen görevi bitirme algısı ile belirlenmiştir. Ve bu da “zaman” verisi olarak isimlendirilmiştir.

Veri toplandıktan sonra, öğrencilerin kâğıt üzerindeki sayılabilen düzeltmeleri sayılmıştır ve “düzeltme sayısı” verisi olarak kodlanmıştır. Veri toplama toplamda iki üniversite dâhilinde yapılmıştır. Bu çalışma için okul bir değişken olarak kodlanmamıştır. Matematik öğretmen adayları ile olan araştırma ilerideki bir dizi çalışmanın parçası niteliğindedir.

BULGULAR

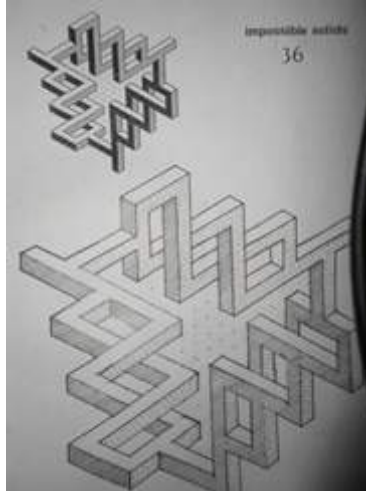
Veri analizi istatistik programı ile yapılmıştır. Aynı öğrencilerin farklı şekillerle olan etkileşimine bakılmıştır. Şekil 4 te örnek bir öğrenci kâğıdı görülebilir. Bunun için her öğrenciden “çizgi simetrisi”, “üçgen simetri II” ve “altıgen simetri II” şekillerini altta verilen ızgaraya geçirmeleri beklenmiştir. Bu süreçte yaptıkları düzeltmeler silinmiş izlerden yola çıkılarak sayılmıştır. Öğrencilerin her bir şekil tipinde çizgi simetrisi (pm), üçgen simetri II(p3), altıgen simetri II(p6)düzeltilmelerin ortalamaları ilişkisel örneklemeler için t testleriyle karşılaştırılmıştır.

Tablo 2. Öğrencilerin aynı şekle karşılık gelen düzeltme ortalamaları

şekil	Çizgi simetrisi	üçgen simetri II	Altıgen simetri II
Veri sayısı	60	47	48
Düzeltilme ortalamaları	1.8	3.2	3

Öğrencilerin bu şekillerde yaptığı düzeltmelerin ortalamaları Tablo 2 de görülebilir. Bunlardan en az ortalamayı çizgi simetrisi (pm) almıştır (ortalama 1,8). Bu da en kolaylıkla şekil 1 in yapıldığını gösterir. Çizgi simetrisi bu şekiller arasında ayna simetrisine sahip tek şekildir ve öğrenciler için anlaşılması ve çizilmesi diğerlerine göre bu yüzden daha kolaydır, şeklinde açıklanabilir. Düzeltme ortalamalarına göre çizgi simetrisi şeklinden sonra sırasıyla altıgen ve üçgen simetrisi gelmektedir. Altıgen simetri II şeklinin düzeltme ortalamasının ortada kalmasının nedeni araştırılmıştır. Ve gizli bir boyut kavramının sonucu etkili olup olmayacağı irdelenmiştir. Şekillere daha dikkatli bakınca boyut altıgen simetri II şeklinde daha göze görünür bir etkidir, oysa üçgen simetri II şeklinde aynı oranda fark edilmemektedir. Ayrıca, üçgen

simetri II şekli iç içe geçmelerin hayli sıkça olduğu bir simetri grubudur, oysa altıgen simetri II bu konuda da diğerine göre



Şekil- 4. Örnek öğrenci kâğıdı- Üçgen simetri (p3)

zayıftır. İç içe geçmeler İslam geometrisinde sıkça kullanılan bir örüntüdür ve şeklin karmaşıklığını arttırmaktadır. Boyut ise üçgen simetride sadece iç içe geçmelerle anlatılmaya çalışılmıştır. Altıgen simetrideki boyut alt/üst, iç/dış kutuplarıyla da belirgindir. Bu bilgilerin betimsel analizden çıkarılması hatalı olacaktır. Araştırmanın önemli bir parçası da ilişkili örneklem için t-testleridir. T testler sadece ikili düzeltme sayıları var olan veriler için elde edilmiştir. Bu da verinin parça parça kullanılmasına yol açmıştır.

Tablo 3. paralel t test sonuçları

Çift no	sınıf	Ortalama farkı	Std sapma	t	df	Önemlilik derecesi (p)
çift 1	p3&p6	0.067	2.359	0.190	44	0.850
çift 2	p3&pm	1.302	2.596	3.290	42	0.002*
çift 3	p6&pm	0.977	2.194	2.955	43	0.005*

*p<0.05 derecesinde anlamlıdır

Tablo 3 deki verilerde dikkati çeken nokta sadece çift 2 ve çift 3 teki ortalama farklarının anlamlı oluşudur(p<0.05). Bu da çizgi simetrisinde yapılan düzeltmelerin hem üçgen simetri için olanlardan, hem de altıgen simetrisi için olanlardan istatistiki olarak daha az sayıda olduğunu ortaya koymaktadır. Oysa p3 ve p6 düzeltmeleri birbiri ile bağlantılı çıkmış, bu da ortalama farkının anlamsız olmasına yol açmıştır. Nitelde bulunan Tablo 2 deki sonuçlarla da bu durum uyumlu çıkmıştır.

Tablo 3 teki verilerin Tablo 2 teki verilerden fazlası ortalamanın sadece her üç şekli de çizen öğrencilerden alınmış olmasıdır. Bu da bizim daha önce belirttiğimiz ama anlamlı çıkmayan üçgen simetri ve altıgen simetri düzeltmeleri farkını da önemsememiz gerektiğini belirtmektedir.

Çeziktürk-Kipel (2013) araştırmasında farklı öğrencilerin bu üç çeşit düzlem simetri grubuna ait düzeltme sayıları ve zaman değişkenleri incelemiş ve şeklin Schattschneider (1978) sınıflandırmasına göre hem düzeltme sayısı, hem de harcanan zamanı açıkladığı ortaya çıkmıştır. Bunun için MANOVA istatistiksel analizi yapılmıştır çünkü 2 bağımlı değişken vardır (düzeltme sayısı ve zaman). Bu çalışmada ise zaman değişkeni göz ardı edilmiştir ve sadece düzeltme sayıları ile ilgilenilmiştir. Çeziktürk-Kipel (2013) çalışmasında şekli tanımak ve belirli parçaları fark etmek için karmaşıklık arttıkça işin de zorlaştığı belirtilmiştir. Aynı akıl yürütme bu araştırma için de yapılabilir. Her iki çalışmanın veri analizi birbirlerini destekler niteliktedir. Çünkü çizgi simetri şekli düzeltme ortalamaları diğer ortalamalardan istatistiki olarak anlamlı şekilde $p < 0,05$ oranında düşük çıkmıştır.

Çeziktürk-Kipel (2013) öğrencilere boyut kavramı hakkında şekillerin ne düşündürdüğü sorulduğunda “iç içe geçen şekiller boyutu 3 ten fazla hissettiriyor” diye olan cevap buradaki farklılığı açıklayabilir. Ne yazık ki bu çalışmada boyut kavramı daha fazla sorgulanmamıştır.

Bu çalışmadaki p3 ve p6 şekilleri modüler olduğundan rotasyon eksenleri simetri ekseninin yerini almaktadır. Rotasyon eksenini şeklin kaç defa kendi eksenini etrafında (şeklini bozmadan) dönebildiği olduğundan simetri eksenini sadece pm şeklinde yani çizgi simetrisi şeklinin dâhilindedir. Simetri eksenini rotasyon ekseninden daha kolay anlaşılacaktır, çünkü müfredatta yeni değildir. Rotasyon eksenini ise 2005 müfredatı ile geldiğinden öğrenciler için zorluk teşkil etmektedir (Talim ve Terbiye Kurulu, 2005). Fakat bu çalışmada bunun ötesinde bir bulgu daha vardır, o da rotasyon ekseninin şeklinin de düzeltme sayısını etkileyebildiği gerçeğidir. Rotasyon eksenini boyut kavramını iç içe geçen şekillerle verdiğinde parça sayısı azalsa bile iş daha zorlaşmaktadır. Burada p3 ün parça sayısı 3, p6 nın parça sayısı 6 düşünülmüştür. Modül birbirine benzeyen en küçük birim örüntü olarak isimlendirilebilir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Aday matematik öğretmenleri çalışma kâğıdının üst kısmında yer alan şekli alta geçirirken simetri eksenleri kadar dönme eksenlerinin de etkili olacağı düşünülmüştür. Üstteki şeklin aşağıya geçirilmesinde başlangıç noktasından hareketle sonsuz değişik şekilde davranmak mümkündür. Bu da her öğrencinin olaya farklı bakmasıyla gözlemlenmiştir. Verilen parçadan bütünü bağlantılarını doğru bir şekilde kâğıda aktarmak başta kolay gelse de öğrencinin öngörüsüne ters geldiğinden kolay olmamaktadır. Özellikle rotasyon simetrisinde parça oluşturulabilirdiyse onu akıldan döndürüp kopyalama yapmak gerekmektedir. Bu zihinsel dönüşümü harekete geçirmektedir. Yani bu görev, öğrencilerde hem parça bütün ilişkisini hem de zihinsel dönüşümü geometrik akıl yürütmeyle buldurmaya çalışmaktadır.

Bu çalışma ile öğrencilerin özellikle simetri eksenleri ile geometrik akıl yürütmesi konusu üzerinde durulmuştur. Araştırmada sadece çizgi simetrisi şekli ortadan inilen dikmeye göre ayna simetrisine sahiptir. Diğer iki şekil ise dönme simetrisi konusuna örnek teşkil etmektedir. Şekillerin imkânsız katı şekilleri olması çalışmaya hiçbir şekilde dâhil edilmemiştir. Fakat bu şekiller aynı zamanda düzlem simetri gruplarına benzeşim gösterdiğinden tektirler. Çalışma ise aynı öğrencilerin farklı düzlem simetri gruplarıyla (pm, p3, p6) olan akıl yürütmesinde neyin önem kazandığını belirlemek açısından faydalı olmuştur. Buna göre öğrencilere simetri eksenli şekiller daha kolay gelmektedir. P3 ve p6 türünden düzlem simetri gruplarında ise öğrenciler küçük farklılıklar görünse de nispeten aynı şekilde davranmışlardır. Küçük farklılıklar da boyut kavramının şeklin bütününe nasıl bütünleştirilmiş olduğu ile ilgili gibi gözükmektedir.

Liu ve diğerlerinin araştırması da (2012) bu çalışmayı destekler niteliktedir. Benzer araştırmalar şekil algısının sadece matematik eğitimi için değil, başka alanlarda da önemli olduğunu vurgulamaktadır. Yalnızca şekil algısı net olarak tanımlanamamaktadır. Bizim araştırmamız bu konunun matematik eğitimindeki özel bir durumunu (imkânsız figürler yardımı ile) incelendiği için önemlidir yalnız Mac Pherson (2010) araştırması dışında tektir. Bu araştırmada ise imkânsız şekillerin imkân dâhilinde parçalara bölüdüğü zaman ayırt edilebildiği konusunda değinilmektedir ki bu da bizim araştırmamızla arasındaki bağlardan birisidir.

Şekillerin karmaşıklığı aynı aday matematik öğretmenlerinin tamamladığı diğer düzlem simetri grup şekillerinde de etkili olmuştur. 41 aday öğretmenin her üç şekli de tamamladığı daha önce verilmişti. Şeklin karmaşıklık düzeyi arttıkça, yani ayna simetrisinden üçlü dönme simetrisine ve oradan da altılı dönme simetrisine gelindikçe aday öğretmenlerin çizimde hata oranının daha arttığı verilerle desteklenmiştir. Yeni müfredattan kaynaklanan öğretim programı tasarımlarında basitten karmaşığa etkisi ki bu da düzlem simetri grup sınıflandırmasına göre öncekiler önce sıralamasıyla düşünülebilir. Öğrencilerin düzlem simetri grupları diyagramları ile tanışıklığını artırırken diyagramlarla akıl yürütme işini de kolaylaştıracaktır. Öğrencilerin ayna simetrisine hâkim olmaları düzlem simetri gruplarının başlangıç şekillerinde (pm) hata sayısını azaltmaktadır. Rotasyon simetrisi içeren düzlem simetri gruplarında (p3 ve p6) düzeltme sayısı artmaktadır. Rotasyon simetrisi ilköğretim aday öğretmenleri için bile yeni bir konudur. Bu konunun tahayyül edilmediği üzere boyut kavramıyla etkileşimi sonucu öğrenciler üçgen simetri II şeklinde daha çok hata yapmışlardır. Dönüşüm geometrisi ve düzlem simetri gruplarını bir araya getiren araştırmada aynı öğrencilerin çizdiği farklı tipteki şekillerin incelenmiş olması araştırmaya farklı bir boyut getirmiştir. İmkânsız katı olmalarının şekillerin çizilmesine etki etmediği varsayılmıştır. Bunda da öğrencilere istedikleri kadar zaman verilmesi ve bir sınav veya ödev niteliğinde zorlama olmamasının istenmemesinin (ek puan ödevi olarak istenmişti) beyin fırtınası şansını arttırdığı düşünülebilir. Ne yazık ki bu konuda

yardım alınabilecek araştırma literatürü bulunmamaktadır.

Benzer araştırmaların arttırılması müfredattaki yeniliklerin sadece ad olarak kalmamasını ama aynı zamanda üzerinde düşünülmesi gerekliliğini ortaya koymaktadır. Matematiksel düşünceyi oluşturmanın en iyi yolu öğrencileri ve onları eğitecek olan öğretmenleri bir matematikçi gibi düşündürmekle olabilir(Umay, 2003). Araştırmamızda aday matematik öğretmenlerinin düzlem simetri grup sınıflandırmasına sahip şekilleri analiz etmesi ve onları daha sonra yeniden sentezleyerek oluşturmaları beklenmiştir. Analiz ve sentez matematiksel muhakeme yeteneğinin özelliklerindedir. Bunun için de düşünselliği arttırıcı karmaşık problemler arttırılmalıdır. Karmaşık şekillerle düşünme yazıya dökmesi zor olan bir aktivitedir. İmkânsız katılar gibi şekiller bu zorluğu azaltabilir. Sonuçta basit gibi görünen bir aktivite de matematik kaygısını azaltabileceği gibi hiç beklenmedik kavramlara da bağlantı kurulabilmektedir. Çalışmamızda bu kavram “boyut” kavramıdır.

ÖNERİLER

Bu araştırmada elde edilen verilere göre dönüşüm geometrisinde özellikle dönme simetrisi özel ihtimam istemektedir. Müfredatlar geliştirilirken buna dikkat edilmelidir. Farklı simetri çeşitlerine dikkat çekilmelidir. Özellikle simetri eksenleri ve rotasyon içeren simetride farklılıklar gözlemlenebilmektedir. İmkânsız şekiller matematiksel düşünceyi tetikleemektedir. Öğretmen adaylarımızın dolayısı ile öğrencilerimizin matematikçi gibi düşünmesini istiyorsak imkânsız şekiller gibi görseller daha sıklıkla kullanılmalıdır. Araştırma daha farklı deneklerle ve daha farklı zamanlarda tekrar denenebilir veya Wiltshire(1997)’ın kitabındaki diğer görsellerle araştırma tekrarlanabilir.

Teşekkür

Araştırmanın yazarı bu araştırmada maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü hoca ve asistanlarına teşekkürü bir borç bilir.

KAYNAKLAR

- Aslan, Ç. & Tari, S. (2005). An axis-based representation for recognition, *In ICCV*, 1339-1346.
- Baki, A. (1996). Matematik öğretiminde bilgisayar herşey midir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12, 135-143.
- Baloglou, G.,(2006). *Wallpaper patterns: Isometrica*, Aralık 19, 2012 tarihinde www.oswego.edu/~baloglou/103/isometrica-4.html adresinden alınmıştır.
- Bishop, A. (2008). Spatial abilities and mathematics education: A review, P.Clarkson & N.

- Presmeg(Eds.) *Critical issues in mathematics education*, (pp. 71-82). NewYork: Springer Science and Business Media, LLC.
- Çeziktürk-Kipel, Ö. (2013). *Role of symmetry Axes; Undergraduate students' experience of impossible figures as plane symmetry groups*, 8. CERME konferansında sunulmuş poster, Antalya: Türkiye.
- Güven, B. & Kaleli-Yılmaz, G. (2011). *Dinamik geometri yazılımlarının dönüşüm geometrisi konusunda sınıf öğretmeni adaylarının başarılarına etkisi*, Paper presented at the 5th International Computer & Instructional Technologies Symposium, Elazığ: Turkey.
- Hummell, J.E.(1998)Where view-based theories break down; The role of structure in human shapeper-ception.In Dietrich, E., Markman, A.(Eds.)*Cognitive Dynamics: Conceptual Change in Humans and Machines*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Jensen, D. W. & Harvey, R. G. (1988). *Plane symmetry groups, United States Air force Academy, Colorado*. Aralık 2012 tarihinde <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?AD=ADA198952> adresinden alınmıştır.
- Liu, T., Kim, V.G. & Funkhouser, T. (2012). *Finding surface correspondances using symmetry axis cur-ves*, Paper presented on Eurographics Symposium on geometry processing, 31, 5, 1605-1616.
- Levine, M. (2008, August 22). *Plane symmetry groups*, Ağustos 22, 2012 tarihinde <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Levine.pdf> adresinden alınmıştır.
- Mcpherson, F. (2010). Impossible figures. In B. Goldstein (Ed.) *Encyclopedia of Perception*, Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Mumford, D. (1991) Mathematical theories of shape: do they model perception?, *Proc. SPIE 570*, *Geometric Methods in Computer Vision*, 2; (September 1,1991).doi:10.1117/12.49981; <http://dx.doi.org/10.1117/12.49981>
- Pizlo, Z. & Salach-Golyska, M. (1995). 3-D shape perception, *Perception & Psychophysics*, 57 (5), 692-714.
- Presmeg, N. (2008). Spatial Abilities Research as a Foun-dation for Visualization in Teaching and Learning MathematicsP. Clarkson & N. Presmeg(Eds.) *Critical issues in mathematics education*, (pp. 83-96). NewYork: Springer Science and Business Media, LLC.
- Schattschneider, D. (1978), The plane symmetry groups: Their Recognition and Notation, *American Mathematical Monthly*, 85, 439-450.
- Sugihara, K. (tarihsiz) *Welcome to the Wonderland of Impossible Objects; Three-dimensional representations of Escher's Confounding Images*, Haziran 23, 2014 tarihinde <http://home.mims.meiji.ac.jp/~sugihara/hobby/ImpossibleObjectsEnglishforWEB.pdf> adresinden alınmıştır.
- Talim ve Terbiye Kurulu (2005). *Matematik Dersi (6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı*, MEB:İstanbul
- Talim ve Terbiye Kurulu (2013). *Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı*, MEB: İstanbul
- Todd, J.T. (2004). The visual perception of 3D shape, *TRENDS in Cognitive Sciences*, 8,3, 115-121.

- Umay, A. (2003): Matematiksel muhakeme yeteneđi, *Hacettepe Üniversitesi eğitim Fakültesi dergisi*, 24, 234-243.
- Vale, C., Mc Andrew, A., & Krishnan, S. (2011). Connecting with the horizon: developing teachers' appreciation of mathematical structure, *Journal of Math Teacher education*, 14, 193-212.
- Wiltshire, A. (1997). *Three dimensions and impossible solids*, Claire Publications.
- Yavuz, İ. (2013). Cabri Geometri ile Geometri Öğretimi, (Eds. M. Dođan, & E. Karakırık). Matematik Eğitiminde Teknoloji Kullanımı(pp.197-234), Nobel Yayınları:Ankara.
- Zembat, I. Ö. (2007). The tenets of direct instruction and constructivism: The case of translations, *Gazi Üniversitesi Fakültesi Dergisi*, 27, 1, 195-213.