Eğitim Bilim ve Araştırma Dergisi

2021, Cilt: 2, Sayı: 1
https://dergipark.org.tr/tr/pub/ebad

Problem Çözme Sürecindeki Tümevarımsal Muhakeme Becerilerinin Bağlamsal İncelenmesi[1]

Contextual Examination of Inductive Reasoning Skills in the Problem Solving Process

Handan DEMİRCİOĞLU[2], Gülten EROL[3]

[2]Dr. Öğr. Üyesi, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, Sivas/Türkiye, handandemircioglu@gmail.com,ORCID: 0000-0001-7037-6140

[3]Milli Eğitim Müdürlüğü-Sivas, gultnrol@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5751-6460

Geliş Tarihi: 26.02.2021 Kabul Tarihi: 30.03.2021

ÖZ

Tümevarımsal muhakeme özel durumlardan genellemelere varmaya kadar devam eden sonuç çıkarma sürecidir. Matematik eğitiminde tümevarımsal muhakeme sayılar ve şekiller arasında bulunan örüntülerin, bağıntıların ve ilişkilerin keşfedilmesi ile ilişkili bir süreçtir. Bu çalışmanın amacı Fen Lisesi öğrencilerinin tümevarımsal muhakeme süreçlerini incelemektir. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden birisi olan durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcılarını bir Fen lisesindeki çalışmaya gönüllü katılmak isteyen 9.10. ve 11. sınıftan toplam 54 öğrenci oluşturmaktadır. Veriler "Kibrit Çöpü Sorusu" ve "Hanoi Kulesi" problemleri ile yazılı toplanmıştır. Veri analizinde tümevarımsal muhakeme sürecinde kullanılan yaklaşımlara göre analiz edilmiştir. Elde edilen bulgular öğrencilerin doğru muhakemeleri yanı sıra kusurlu muhakemelerini de açığa çıkarmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Muhakeme, fen lisesi öğrencileri, tümevarımsal muhakeme*

1 Bu makale Gülten Erol'un Dr. Öğrt. Üyesi Handan Demircioğlu danışmanlığında tamamlanan yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

ABSTRACT

Inductive reasoning is the process of inference that continues from specific situations to generalizations. Inductive reasoning in mathematics education is a process related to the discovery of patterns, relations and relationships between numbers and shapes. The aim of this study is to examine the inductive reasoning processes of science high school students. The case study, one of the qualitative research methods, was used in the study. The study conducted with 54 students. These students were enrolled in 9^{th}, 10^{th} and 11^{th} grade students at a science high school. The data were collected in writing with the "Matchstick Question" and "Hanoi Tower" problems. In data analysis, it was analyzed according to the strategies used in the inductive reasoning process. The findings obtained revealed the flawed reasoning as well as the correct reasoning of the students.

Keywords: *Reasoning, inductive reasoning, science high school students*

GİRİŞ

Matematik eğitiminin amacı, yaşadığımız dünyanın artan gereksinimleri karşısında güçlü bireyler yani mantıksal, bilimsel, yaratıcı, eleştirel ve analitik düşünebilen, problem çözme becerisi gelişmiş, olayları gözlemleyebilen ve gözlemlediği durumlardan yola çıkarak varsayımlar ileri sürebilen, etkili kararlar alabilen ve aldığı kararların geçerliliğini sorgulayabilen, bilgiye ulaşma yollarını bilen, muhakeme gücü yüksek bireyler yetiştirmektir. Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın (MEB, 2018) hazırladığı Matematik öğretim programının (1-8. Sınıf) özel amaçları arasında muhakeme (akıl yürütme) becerisine vurgu "*Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilecek, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilecektir*" (s.9) şeklinde yapılmaktadır. Ulusal Bilim Vakfı'na *(*National Science Foundation-NSF) (1995) göre muhakeme yeteneği, öğrencilerin yaşamlarındaki sorunları çözmelerine, düşüncelerini doğrulamalarına ve matematiksel güvenlerini artırmalarına imkân vermektedir. Lithner (2008; 2012) ifade ettiği gibi muhakeme, matematik eğitiminin ve matematik eğitimindeki araştırmaların merkezinde yer alsa da, muhakeme sürecinin ayrıntılı incelenmesine ihtiyaç vardır.

Muhakeme, varsayımlar üretme ve bu varsayımlardan yola çıkarak ilişkilere, kurala veya formüle ulaşırken kullanılan bir düşünme biçimi (Lithner, 2008) olarak ifade edilmektedir. Nitekim bu düşünme süreci sonucunda eldeki delillerden hareketle mantıklı, kendi içinde çelişmeyen, usul ve kurallara uygun gerekçeli bir karar verme (Umay, 2003) vardır. Başka bir ifade ile muhakeme sonuç çıkarma, çıkarılan sonuçları test etme, bir karar verme, akla mantığa yatkın olup olmadığını inceleme, genellemeler yapma veya tahminlerde bulunma gibi birçok beceriyi içeren bir süreçtir. Üst düzey bir düşünme becerisi (Klauer, 1999) olarak nitelendirilmektedir. Matematiksel muhakeme ise birçok argüman içermektedir ve bu tür argümanların anlaşılması matematiğin anlaşılması için gereklidir (Selden ve Selden, 1978). Tümevarımsal muhakeme, matematiksel muhakemede tamamlayıcı rol oynamaktadır.

Tümevarımsal muhakeme, düşünmenin temel bir bileşeni olarak kabul edilmekle birlikte en fazla incelenen biliş prosedürlerinden birisi (Csapó, 1997) hatta öğrenme potansiyelini karakterize eden en üst düzey bilişsel beceridir (Papageorgiou, 2009). Tümevarımsal muhakeme olmadan bir durumdan diğerine genelleme yapılamaz, bilimsel hipotezler üretilemez (Feeney ve Heit, 2007). Tümevarımsal muhakemenin bilimsel bilgi üretmedeki rolü, felsefe çalışmalarında önemli bir yer tutmaktadır. İnsan zekâsının önemli özelliklerinden birisidir (Moreno, Mylleri, Sutinen, Lin ve Kinshuk, 2007) diğer bir ifade ile zekânın bir bileşenidir (Schwenzer ve Mathiak, 2012). En genel anlamı ile tümevarımsal muhakeme, bir bağlamda öğrenilen bilgileri yeni durumlara aktarmak için kullanılan bir araç ya da yalnızca yeni bilgi edinmek için değil, aynı zamanda edinilen bilgiyi yeni bağlamlarda daha kolay uygulanabilir hale getirmek için kullanılan zihinsel araçlardan birisidir (Csapó, 1997).

Neubert ve Binko (1992) matematikte tümevarımsal muhakemeyi sayılar ve rakamlar arasındaki kalıpları ve ilişkileri bulma ile ilişkilendirmiştir. Burton (1984) ve Magiera (2012a; 2012b) matematiksel düşünmenin de alt boyutları olarak verilen özelleştirme, varsayımda bulunma, genelleme ve doğrulama yeteneklerinin göstergesi olduğunu iler sürmüştür. Polya (1967) matematik öğretiminde tümevarımsal muhakemeyi özellikleri keşfetme ve düzenlilikleri mantıklı bir şekilde bulma yöntemi olarak ifade etmiştir. Edwards'a (1997) göre öğrenciler problem çözerken ilk önce bir kural, ilişki ya da örüntü bulmaya çalışırlar. Buldukları kural, ilişki ya da örüntülerin farklı durumlarda da geçerli olup olmadığını incelemek için farklı özel durumları incelerler. Bu aşamada tümevarımsal düşünme başlamaktadır. Varsayımlarının doğruluğunu belli durumlarda doğruluğunu göstermek kanıtlama düşüncelerinin temelindedir. Örneğin "çift iki sayının toplamı daima çift bir sayıdır" ifadesi ispatlanırken çeşitli sayıları deneyerek doğrulama yapabilirler. Bu son düşünme eylemi ispattan önceki adımdır. Bu bağlamda muhakeme becerisi ispat becerisi, cebirsel düşünme gibi birçok beceri ile de yakından ilgilidir.

Tümevarımsal muhakeme sürecinde farklı içeriğe sahip çeşitli görev türlerini kullanarak zihinsel olarak izlenen aşamaların araştırıldığı çalışmalarda, özel durumlardan genellemeye doğru nasıl bir süreç izlendiğinin açığa çıkarılmasını hedeflemişlerdir (Cañadas ve Castro, 2007; Magiera, 2012a; Pólya, 1967; Reid, 2002). Csapó (1997) tümevarımsal muhakemenin hangi yaş aralığında nasıl geliştiğini ve diğer bazı bilişsel işlevlerle nasıl ilişkili olduğunu incelemek amacı ile altı adet tümevarımsal muhakeme testini (sayı analojileri, sözlü analojiler, sayı serileri, sözlü seriler, kodlama, dışlama) tasarlanmış ve 3., 5., 7., 9. ve 11. sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Elde edilen bulgular tümevarımsal muhakemenin en hızlı gelişiminin 5. ve 9. sınıflar arasında gerçekleştiğini; 5. sınıftan önce büyük bir gelişme tespit edilirken 9. sınıftan sonra sadece küçük değişiklikler olduğu bulunmuştur. Tümevarımsal muhakeme sürecinde hangi adımların yer aldığı konusunda yapılan araştırmalar (Cañadas ve Castro, 2007; Magiera, 2012b; Polya, 1967; Reid, 2002) süreci açığa çıkarmak açısından önemlidir. Christou ve Papageorgiou (2007) ilkokul öğrencilerinin matematik tümevarımsal muhakemesini öngörmek ve değerlendirmek için bir çerçeve önermişlerdir. Bu çerçeveye dâhil edilen ana yapılar, Klauer (1999) tarafından öğrencilerin tümevarımsal muhakemesi sürecini tanımlarken kullandığı süreçlerdir. Klauer'in modeli, tümevarımsal muhakeme problemlerinin tüm yelpazesini yansıtan benzerlik, benzeşmezlik ve bütünleşme yapılarını içerecek şekilde değiştirilmiştir. Polya, (1967) göre tümevarımsal muhakeme dört adımı içermektedir. Bunlar belirli durumlarla ilgili deneyimler, varsayım formülasyonu, varsayım ispatı ve yeni belirli durumlarla doğrulamadır. Canadas (2002) bu adımlardan yola çıkarak, orta öğretim öğrencilerinin ispat problemlerini çözerken düşünme eylemlerinden ve tümevarımsal muhakemenin ortaya çıktığı bir ifadenin gerekçelendirilmesine ilişkin tümevarımsal muhakemeden oluşan bir sistem geliştirmiştir.

Neden, niçin ve nasıl gibi sorulara cevaplar verebilme, gerekçeler sunabilme, doğrulama yani muhakeme yapabilme matematik eğitiminin en önemli hedeflerindendir. Bu önemine paralel olarak özellikle muhakeme son yıllarda birçok çalışmanın konusu haline gelmiştir. Bu çalışmalar incelendiğinde niceliksel muhakeme (Güvendiren, 2019; Belin, 2016), geometrik muhakeme süreçleri (Kızıltoprak, 2020; Tutan, 2019), matematiksel muhakeme becerileri (Çalışkan, 2019), olasılıksal muhakeme (Erdem, 2011), tümevarımsal muhakeme (Navruz, 2012) gibi birçok başlık altında toplandığı görülmektedir. Yapılan bu yapılan çalışmalar incelendiğinde ortaokul öğrencileri (5., 6., 7., ve 8. sınıf) (Çalışkan, 2019; Güvendiren, 2019; Kızıltoprak, 2020; Mutluoğlu, 2019; Üstün; 2019; Yöndemli, 2018), lise öğrencileri (Özdemir, 2019), matematik öğretmen adayları (Demir, 2017), matematik öğretmenleri (Çokyaşa, 2019; Tutan, 2019) ile yapıldığı görülmektedir. Yurt içinde Fen Lisesi öğrencileriyle yapılmış bir çalışmaya rastlanmamıştır. Diğer taraftan tümevarımsal muhakeme ile ilgili ulaşılan çalışma çok azdır. Matematik eğitiminin tümevarımsal muhakemenin doğasını, işleyişini ve bilişsel anlamda nasıl bir süreç içerdiğini açığa çıkarmak onu betimlemekten daha önemlidir. Bu nedenle öğrencilerin tümevarımsal muhakeme sürecinde düşünme süreçlerinin incelenmesi bu çalışmanın odak noktasını oluşturmaktadır. Bu bağlamda, verilen problem çözme durumlarında tümevarımsal muhakeme sürecinin Fen Lisesi öğrencileri boyutunda nasıl gerçekleştiğinin açığa çıkarılması amaçlanmaktadır. Fen lisesi öğrencileri bir seçme sınavına göre belirlendikleri ve daha üst düzey düşünme becerilerine sahip oldukları öngörüsü ile Fen Lisesi öğrencilerinin tümevarımsal muhakeme süreçleri ele alınmış ve “Kibrit Çöpü” ve “Hanoi Kulesi” problem durumlarında tümevarımsal muhakeme sürecindeki yaklaşımları nasıldır?” alt problemine cevap aranmıştır. Elde edilecek bulguların muhakeme aşamalarını açığa çıkarmaya ve matematik öğretimindeki bu becerilerin geliştirilmesine imkân sağlayabilecek öğrenme ortamı hazırlanmasında rehberlik edebileceği düşünülmektedir. Hem Fen Lisesinde öğrenimlerine devam eden öğrencilerinin düşünme süreçleri ile ilgili hem de tümevarımsal muhakeme ile ilgili fazla çalışma olmaması nedeni ile ilgili literatüre katkı sağlayacağı öngörülmektedir.

YÖNTEM

Araştırmanın Modeli

Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden birisi olan durum çalışması kullanılmıştır. Gerring (2007) durum çalışmasını daha fazla durumu açıklamak amacıyla tek bir durumun derinlemesine çalışılması olarak tanımlamaktadır. Nitekim insan davranışı esnek ve bütüncül bir yaklaşımla araştırılabilir ve bu yaklaşımda araştırmaya katılan bireylerin deneyimleri, düşünme süreçleri büyük önem taşımaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Dolayısıyla durum çalışması, bir olayı meydana getiren süreci tanımlamak ve incelemek, olayla ilgili anlayışı geliştirmek ve değerlendirmek için kullanılmaktadır. Durum çalışmasının tüm durumlar için geçerli olmayışı ve sadece belirlenen durum/durumlar için genellemeler yapmaya uygun olması, çalışmada ele alınan problemlerin her birini durum olarak ele alınıp, bu durumların her birindeki düşünme süreçlerinin birbirinden hangi açılardan farklılık gösterdiğinin anlaşılması açısından bu araştırmanın doğası ile uyuşmaktadır. Gerçekten tümevarımsal muhakeme süreci öğrenciden öğrenciye, ele alınan problem durumuna göre değişmekte ve durum araştırması ile gözlemlenebilen bu çeşitlilik, araştırma problemlerinin yanıtlanabilmesine olanak sağlamaktadır.

Katılımcılar

Çalışmanın katılımcılarını 2017-2018 Eğitim-Öğretim Yılı’nda bir Fen lisesinde öğrenimlerine devam 54 gönüllü öğrenci oluşturmaktadır. Öğrenciler kolay ulaşılabilir örnekleme yöntemine göre seçilmiştir. 16 öğrenci 9. sınıf, 23 öğrenci 10. sınıf ve 15 öğrenci 11. sınıf öğrencisidir. Fen lisesinde öğrenimlerine devam ettikleri için hazır bulunuşluk düzeylerinin ve öğretim programındaki becerilere sahip oldukları düşünülmektedir. Katılımcılar problemleri çözmeleri için zorlanmamış yalnızca gönüllü olan öğrenciler katılmıştır. Araştırmada bilimsel etik gereği katılımcı öğrencilerin gerçek isimleri kullanılmamıştır.

Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması

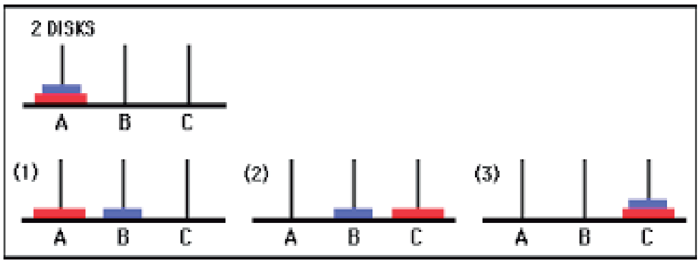
Çalışma veriler tümevarımsal muhakeme gerektiren “Kibrit Çöpü Sorusu“ ve “Hanoi Kulesi“ problemleri ile yazılı olarak toplanmıştır. Öğrenciler farklı sınıflarda olduğu gibi farklı zaman dilimlerinde toplanmıştır. Verilerin toplanması her oturumda yaklaşık 40 dk sürmüştür. Öğrencilere bunun bir çalışma olduğu problem çözme sürecinde mümkün olduğunca ne düşündüklerini ayrıntılı yazmaları istenmiştir. Öğrencilere çözüm için ve yazabilecekleri, çizim yapabilecekleri yeterli alan verilmiştir. Veriler toplanırken zaman kısıtlaması yapılmamıştır. Çalışmada kullanılan “Kibrit Çöpü Sorusu“ ve “Hanoi Kulesi“ aşağıda verilmiştir.

Kibrit Çöpü Sorusu: Aşağıdaki şekil her bir kenarı bir kibrit çöpü uzunluğundaki bitişik karelerden oluşmaktadır. Şekilde görüldüğü gibi 1 kare için 4 kibrit çöpü, 2 kare için 7 kibrit çöpü, 3 kare için 10 kibrit çöpü gerekmektedir.

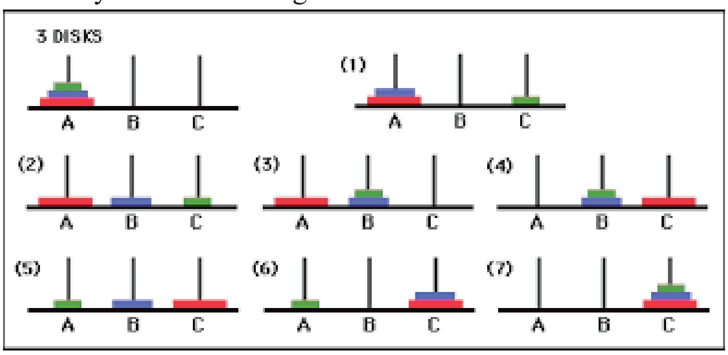
a. Yan yana 14 kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?

b. Yukarıdaki çözümü genelleyerek bir formüle ulaşabilir misiniz? Yani yan yana n tane kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?

Hanoi Kulesi: Aşağıdaki şekil 2 diskli Hanoi kuleleri oyununun hamlelerini göstermektedir. Oyunun amacı solda dizili diskleri en sağdaki direğe aynı sıra ile en az hamlede dizmektir.



Oyunun kuralları: Her hamlede tek disk oynatılabilir ve her disk kendinden büyük bir diskin üstüne gelebilir (yani bir disk kendinden küçük bir diskin üstüne gelemez). Aşağıdaki şekil ise 3 diskli oyun için yapılabilecek en az sayıdaki hamleleri göstermektedir.



a. Bu kurallara uyarak 4 diskli bir oyun en az kaç hamlede tamamlanabilir?

b. Bunu n tane disk için genelleyerek bir formüle ulaşabilir misiniz?

Hanoi kulesi probleminde verilen görseller matematiksel.org sitesinden alınmıştır. Özellikle hamleler rahat görülebilmesi için renkli resim seçilmiştir. Bu iki problem karşılaştırıldığında her iki problemde de özel durumlardan hareketle genellemeye kadar bir süreç bulunmaktadır ve özel durumlar detaylı açıklanarak ve görsel ile desteklenerek problemler anlaşır hale getirilmeye çalışılmıştır. Kibrit çöpü probleminde görsel ile birlikte 1 kare, 2 kare ve 3 kare yapmak için kaç tane kibrit çöpü gerektiği yani ilk 3 özel durum açıklanmıştır. Benzer olarak Hanoi kulesi probleminde de 2 ve 3 disk için hangi hamlelerin yapılacağı renkli diskler ile gösterilmiştir.

Her iki problemde de tümevarımsal düşünme süreçlerinin aşamaları olan verilen yakın durumları gözlemlemeleri, gözlemlerini organize etmeleri, özel durumlardaki ilişkilerden hareketle varsayımlar ortaya koymaları, varsayımlarını doğrulamaları, uzak durumlar için (14 kare ve 4 disk için) çıkarım yapmaları ve herhangi bir durum için (herhangi bir n için) bir kural ortaya koymaları yani genelleme yapmaları beklenmektedir. Diğer taraftan bu iki problemdeki muhakeme (akıl yürütme süreçleri) birbirinden farklıdır. Çünkü kibrit çöpü probleminde bir önceki özel durumun üzerine yeni kibrit çöpü eklemek ile yeni durum hakkında varsayımda bulunma varken Hanoi probleminde önceki durumun tamamını dikkate alarak bir varsayımda bulunma vardır. Dolayısıyla birinde tek durum dikkate alınırken diğerinde bütünü dikkate alınmaktadır.

Veri Analizi

Toplanan veriler betimsel analiz tekniği ile analiz edilmiştir. Özel durumlarından genellemelere ulaşana kadar olan süreçte muhakeme yaparken seçilen heuristikler/yaklaşımlar farklılıklar gösterebilir. Katılımcıların tümevarımsal muhakeme sürecinde sergiledikleri yaklaşımlar altı aşamaya göre analiz edilmiş ve yorumlanmıştır. Bu aşamalar sırasıyla adlandırma, eleme, tekrar derleme, kategori oluşturma, geçerlilik-güvenirlilik ve bulguların oluşturulması şeklinde gerçekleştirilmiştir. Adlandırma aşamasında öğrencilerin tümevarımsal muhakeme sürecinde kullanabilecekleri stratejileri/yaklaşımları listelenmiştir. Eleme aşamasında listelenen stratejiler yeniden gözden geçirilmiş ve uzman görüşleri doğrultusunda yeniden değerlendirilmiştir. Daha sonra kategoriler oluşturulmuştur. Öğrencilerin tümevarımsal muhakeme sürecinde kullandıkları stratejileri/yaklaşımları sınıflandırmak için kullanılan çerçeve Tablo 1' de verilmiştir.

Tablo 1. Öğrencilerin Tümevarımsal Muhakeme Sürecindeki Yaklaşımları Sınıflandırmak için Kullanılan Çerçeve

Kategori	Açıklama
Sayma	Problemdeki artışa odaklanılan ve bu sabit artışı sayarak sonuca ulaşılan kategoridir.
Cebirsel	Şekille hiç ilgilenilmeyen ve kullanılan çöp sayısı olan 4, 7, 10 sayılarına odaklanılan, özellikle cebirsel işlemler yardımıyla sonuca ulaşılan kategoridir.
Bütünden eksiltme	Önce kareler oluşturulmuş sonra bunlar birleştirilerek bütün oluşturulmuş en son da fazlalıklar şekilden eksiltilmiştir.
Bütüne genişletme	Bütüne adım adım varılan kategoridir.
Zihinden sonuca ulaşma	Herhangi bir açıklama yapılmadan sonuca ulaşılan kategoridir.
Şekil çizme	Şeklin tamamını veya bir kısmını çizme ve daha sonra sayma işleminin tercih edildiği kategoridir.
Doğru formüle genelleme (önce uzak terimler için sonra yakın durum)	İki disk için üç hamle ve üç disk için yedi hamle sayısına odaklanılan ve bu iki durumu sağlayan doğru formüle-ilişkiye ulaşanların bulunduğu kategoridir.
Yanlış formüle genelleme	İki disk için üç hamle ve üç disk için yedi hamle sayısına odaklanılan ve bu iki durumu sağlayan doğru formüle ulaşamayanların oluşturduğu kategoridir. Yanlış formüle genellemişlerdir.
Örüntü bulma	Doğru sonuca ulaşabilmek için yanlış örüntü oluşturanların kategorisi.

Tablo 1' de verilen çerçeve ve verilen cevaplar alanda iki uzman tarafından ayrı ayrı incelenmiştir. Her bir kategori altında ele alınan yaklaşım açıkça ifade edilmiştir. Geçerlilik ve güvenirliği için veri analizi ayrıntılı olarak açıklanmış, katılımcıların cevaplarına doğrudan yer verilmiştir. İlgili literatür ile benzerlik ve farklılıkları ortaya konulmuştur. Alınan uzman görüşleri doğrultusunda "görüş birliği" ve "görüş ayrılığı" olan kısımlar belirlendikten sonra düzenlemeler yapılmıştır. Araştırmanın güvenirlik hesaplaması için Miles ve Huberman'ın (1994) önerdiği Güvenirlik = Görüş Birliği / (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı) formül kullanılmıştır araştırmanın güvenirliği % 90 bulunmuştur. Miles ve Huberman'a (1994) göre güvenirlik hesaplarının %70'in üzerinde olması araştırma için güvenilir kabul edilmektedir. Burada elde edilen sonuç, araştırma için güvenilir kabul edilmiştir.

BULGULAR

Çalışmadan elde edilen bulgular her bir problem durumuna göre ayrı başlıklar altında ele alınmıştır. Daha sonra iki problemden elde edilen veriler karşılaştırılmıştır.

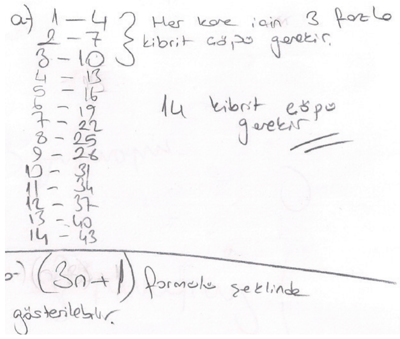
Kibrit Çöpü Probleminden Elde Edilen Bulgular

Kibrit çöpü sorunun a şıkkında 14 kare yapmak için yakın adıma devam ettirme becerisi ölçülürken b şıkkında ise uzak terimler yani herhangi bir n için bulunan ilişkileri genellemeleri istenmiştir. Doğru kodlamalar, 14 kare yapmak için gerekli olan kibrit sayısını doğru olarak ifade etme, herhangi bir durum (n için) genelleme yapabilme yani kuralı ifade edebilme olarak ele alınmıştır. Elde edilen bulgular Tablo 2' de özetlenmiştir.

Tablo 2. Kibrit Çöpü Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Kategoriler	f	Yakın adıma devam ettirme (a şıkkı)			Uzak terimler için genelleme (b şıkkı)		
		Doğru	Yanlış	Boş	Doğru	Yanlış	Boş
Sayma	23	20	3	-	13	3	7
Cebirsel	11	9	2	-	9	1	1
Zihinden sonuca ulaşma	8	8	-	-	7	-	1
Şekil çizme	6	6	-	-	5	-	-
Bütünden eksiltme	4	4	-	-	3	-	-
Bütüne genişletme	2	2	-	-	2	-	-

Tablo 2'den görüldüğü gibi 23 öğrencinin cevabı sayma kategorisi altında kodlanmıştır. Bu kategorideki öğrenciler, ilk karedeki dört kibrit çöpünün üzerine her kare için üç tane kibrit çöpü daha eklemiş ve sayarak cevap vermişlerdir. Yani problemi çözerken kibrit çöplerindeki artışa odaklanmışlar ve hepsi de her bir durumda üçer ritmik artışı yazmışlardır. Bu kategoriye ait bir cevap örneği Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. Sayma kategorisini temsil eden bir çözüm

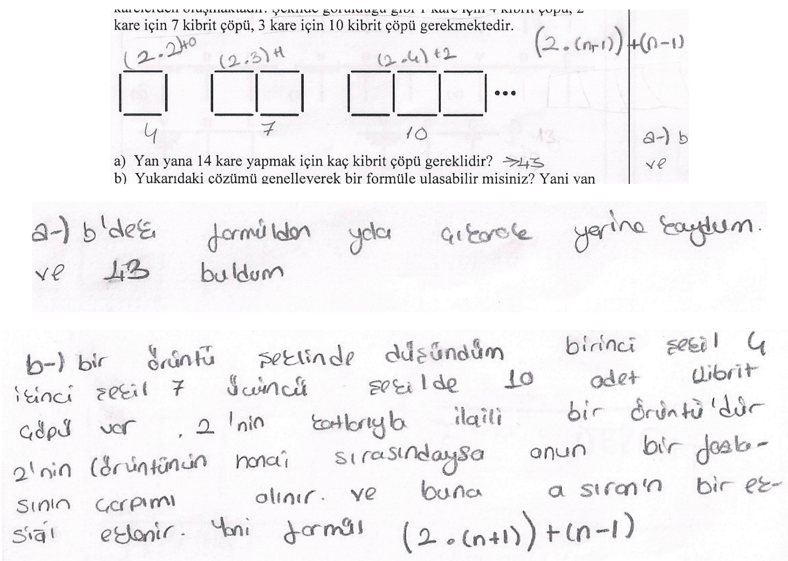
Şekil 1'den de görüldüğü gibi bazı öğrenciler her bir artışı karelerin sayısıyla birebir eşleştirmişlerdir. Doğru sonuca ulaşan bazı öğrencilerde bir önceki terime üç eklemek yerine ilk terime üçlerin hepsini birden eklediği görülmüştür. Yani verilen bitişik üç kareye on bir kare eklediğini ve her eklenecek kare için üç kibrit çöpü gerektiğini düşünmüşlerdir. Bu şekilde üçleri tek seferde 11.3=33 olarak eklemişlerdir. Bu yaklaşımla 20 öğrenci doğru sonuca ulaşabilmişken üç öğrenci ulaşamamıştır. Doğru sonuca ulaşamayan öğrencilerden birisinin onuncu adımdan sonra işlem hatası yaptığı gözlemlenmiştir. Bu öğrenci *"…31, 33, 36, …"* şeklinde devam etmiştir. Yanlış yapan başka bir öğrenci ise sekizinci adıma kadar gelmiş ancak devam etmemiştir. Diğer öğrenci ise dörtten kırk üçe kadar üçer ritmik sayarak yazmış ancak soruyu yanlış anladığı için bu sayıları tekrar toplamıştır. Hepsi de üçer artışa odaklandığı için bu kategoride değerlendirilmiştir. Sayma kategorisinde verilen cevapların sınıflara göre dağılımı Tablo 3' de verilmiştir.

Tablo 3. Sayma Kategorisindeki Cevapların Sınıflara Göre Dağılımı

	a şıkkı		b şıkkı		
Sınıf	**Doğru**	**Yanlış**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**
9. sınıf	6	1	6	-	1
10. sınıf	8	-	6	-	2
11. sınıf	6	2	1	3	4
Toplam	20	3	13	3	7

Tablo 3'den görüldüğü gibi 9. sınıftan yedi öğrenci bu şekilde cevaplandırmıştır. Bu öğrencilerden bir tanesi yanlış, altı öğrenci ise doğru cevaplandırmıştır. 10. sınıftan sekiz öğrenci ve hepsi de doğru cevaplandırmıştır. Sekiz öğrenci ise 11. sınıf öğrencisidir. Fakat bu öğrencilerden altısı a şıkkını doğru cevaplarken iki öğrenci yanlış cevaplandırmıştır. Tablo 3'den görüldüğü gibi yakın adıma devam ettirme için 20 öğrenci doğru cevap vermişken b şıkkında ise doğru cevap veren öğrenci sayısı on üçtür. Uzak durumlar için genellemede üç öğrenci yanlış cevap verirken ve yedi öğrenci ise boş bırakmıştır. Boş bırakan bir öğrenci 9. sınıf, iki öğrenci 10. sınıf, dört öğrenci ise 11. sınıf öğrencisidir. Doğru yapan öğrencilerden altısı 9. sınıf öğrencisi, altısı 10. sınıf öğrencisi ve bir öğrencide 11. sınıftandır. Tüm yanlış cevaplar 11. sınıf öğrencileri tarafından yapılmıştır. 11. sınıf öğrencilerinden doğru yapan bir öğrenci de 3n+4 formülüne ulaşmıştır. n'yi kare sayısının bir eksiği olarak kullanmıştır. Bu nedenle genelleme yapamamıştır. Katılımcıların kâğıtları incelendiğinde a şıkkını doğru yapan üç kişinin b şıkkını yanlış yaptığı ve a şıkkını yanlış yapan üç kişinin b şıkkını boş bıraktığı görülmüştür. Tüm bulgular birlikte değerlendirildiğinde bu kategoride a şıkkını yanlış yapanların b şıkkını da yanlış yaptığı, a şıkkını doğru yapmasına rağmen yedisinin b şıkkını boş bıraktığı görülmektedir. Üstelik Tablo 3'den görüldüğü gibi "sayma" her sınıf düzeyinde de tercih edilirken uzak adımlar için (b şıkkı) 11. Sınıftaki öğrenciler çoğunlukla yanlış yapmışlar ya da boş bırakmışlardır. Ayrıca yanlış cevaplar yalnızca 11. sınıf öğrencilerinden gelmiştir.

Tablo 2'den görüldüğü gibi 11 öğrencinin cevabı cebirsel kategorisi altında kodlanmıştır. Cebirsel kategorisinde cevap veren öğrenciler görsel ile ilgilenmemişlerdir. Bunun yerine kullanılan kibrit çöpünün sayısına yani dört, yedi ve on sayılarına odaklanmışlardır. Birincide dört, ikincide yedi, üçüncü de on verecek bir kural aramışlardır. Bu öğrenciler cebirsel yöntemlerle genelleme yapmışlar, kuralı bulmuşlar daha sonra yakın adımdaki çöp sayısını bulmak için buldukları kuraldan yararlanmışlardır. Yani kuralı 3n+1 bulduktan sonra n=14 alarak a şıkkının cevabını bulmuşlardır. Düşünme yaklaşımını da örüntü veya ilkokulda öğrenmiştik şeklinde ifade etmişlerdir. Bu kategorideki cevaplardan birisi Şekil 2'de verilmiştir.



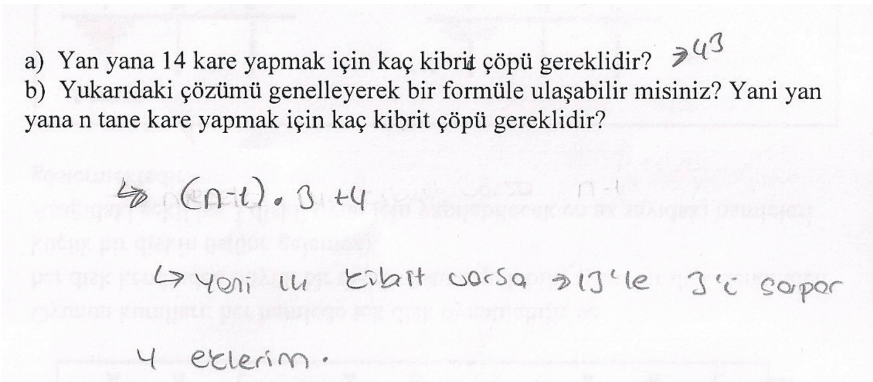
Şekil 2. Cebirsel kategorisini temsil eden bir çözüm

Cebirsel kategorisinde dokuz öğrenciden yedisi doğru cevaplarken ikisi doğru cevaplayamamıştır. Doğru cevaplayanlardan birisi artış miktarının üç olduğuna dikkat etmiş ve bu artış miktarı yardımıyla 4, 7, 10 sayılarına ulaşmaya çalışmıştır. Diğer doğru cevaplayan öğrenciler ise bir kare dört, iki kare yedi, üç kare on ve n kare x şeklinde orantı kurmuşlar ve kuralı bulmuşlardır. Bu öğrencilerde diğerleri gibi 4, 7, 10 sayılarına odaklandıkları için cevapları bu kategoriye alınmıştır. Cebirsel kategorisinde verilen cevapların sınıflara göre dağılımı Tablo 4' de verilmiştir.

Tablo 4. Cebirsel Kategorisindeki Cevapların Sınıflara Göre Dağılımı

	a şıkkı		**b şıkkı**		
Sınıf	**Doğru**	**Yanlış**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**
9. sınıf	2	-	-	-	-
10. sınıf	5	1	-	1	-
11. sınıf	1	1	-	-	1
Toplam	7	2	7	1	1

Tablo 4' den görüldüğü gibi bu kategoride cevap veren sekiz öğrenciden beşi 10. Sınıf öğrencisidir. İki öğrenci 9. Sınıf bir öğrenci ise 11. Sınıf öğrencisidir. Diğer taraftan öğrencilerden sadece bir tanesi b şıkkını boş bırakırken birisi de yanlış cevaplamıştır. Boş bırakan öğrenci 11. sınıf öğrencisiyken yanlış yapan öğrenci 10. sınıf öğrencisidir. 9. sınıfların hepsi doğru cevaplamıştır. Tablo 4 incelendiğinde bu kategoridekilerden a şıkkını doğru cevaplayanların b şıkkını da doğru cevapladıkları ve a şıkkını yanlış yapanlardan birinin b şıkkını yanlış birinin de boş bıraktığı görülmektedir. Zihinden sonuca ulaşma kategorisi herhangi bir açıklama yapmadan işlem yapan öğrencilerin cevaplarından oluşmaktadır. Bu kategoride sekiz öğrenci cevap vermiştir. Bu sekiz öğrencinin tamamı sorunun a şıkkında doğru sonuca ulaşmıştır. Şekil 3'de bu kategorideki cevaplardan bir tanesi verilmiştir.


a) Yan yana 14 kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir? → 43
b) Yukarıdaki çözümü genelleyerek bir formüle ulaşabilir misiniz? Yani yan yana n tane kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?

↳ (n-1).3+4

↳ yani 14 kibrit varsa → 13'le 3'ü çarpar 4 eklerim.

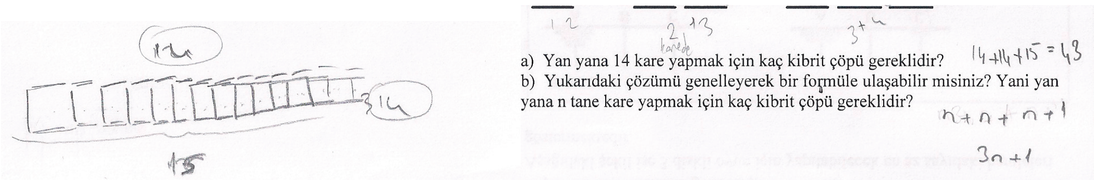
Şekil 3. Zihinden sonuca ulaşma kategorisini temsil eden bir çözüm

Şekil 3'de görüldüğü gibi önce formülü bulmuşlar daha sonra formülde yerine yazarak a şıkkının cevabına ulaşmışlardır. Genellemeyi nasıl yaptıklarına dair açıklama yapmamışlardır. Bazı öğrenciler ise sayarak kategorisine yakın bir şekilde 14.3+1 şeklinde yazmışlardır. Bu tür cevapların sayarak kategorisi yerine zihinden sonuca ulaşma kategorisine alınmasının nedeni, dördün üzerine üç artışı yapmamış olmalarıdır. Bu öğrenciler yan duran U harfi olarak almışlar ve şekillerini birleştirmişlerdir. En son da bir kapak yerleştirmişlerdir. Her U harfi için üç kibrit çöpü sayısını almışlar ve bir sonraki U harfinin tabanın bir önceki U harfinin kapağı olacağını düşünmüşlerdir. En sona bir kapak daha eklemişler. Zihinden sonuca ulaşma kategorisindeki cevapların sınıflara göre dağılımı Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. Zihinden Sonuca Ulaşma Kategorisindeki Cevapların Sınıflara Göre Dağılımı

	a şıkkı		b şıkkı		
Sınıf	**Doğru**	**Yanlış**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**
9. sınıf	5	-	4	-	1
10. sınıf	2	-	2	-	-
11. sınıf	1	-	1	-	-
Toplam	8	-	7	-	1

Tablo 5'den görüldüğü zihinden sonuca ulaşma kategorisinde cevap veren 8 öğrenci bulunmaktadır. Beş öğrenci 9. sınıf, iki öğrenci 10. sınıf ve bir öğrenci 11. sınıf öğrencisidir. Bu öğrencilerden bir tanesi b şıkkını boş bırakmıştır. Bu öğrenci 9. sınıf öğrencisidir. Diğerleri ise doğru cevaplamışlardır. Şekil çizme kategorisinde altı öğrencinin hepsi yakın adıma devam ettirme kısmında şeklin tamamını çizerek saymışlar ve doğru sonuca ulaşabilmişlerdir. Şekil 4' de bu kategorideki cevaplardan bir tanesi verilmiştir.



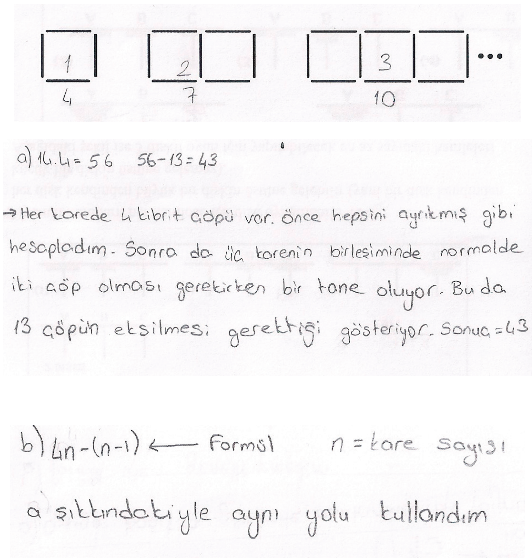
Şekil 4. Şekil çizme kategorisini temsil eden bir çözüm

Sayma işlemini yaparken öğrencilerden biri tüm kareleri çizdikten sonra üstteki, alttaki ve aradaki çöpleri ayrı ayrı saymış ve en son eklemiştir. Bazıları da çizdikten sonra tek tek toplayıp 43 ü bulmuş ve "*bir kare dört, iki kare yedi, üç kare on ve on dört kare 43 çöpten oluşur*" şeklinde yazarak bulmuşlardır. Hatta cebirsel çözenlerden bazıları da daha rahat algılamak için şekil çizmiş ama şekli kullanmadan çözümü sayılarla yapmışlardır. Şekil çizme kategorisindeki cevapların sınıflara göre dağılımı Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6. Şekil Çizme Kategorisindeki Cevapların Sınıflara Göre Dağılımı

	a şıkkı		b şıkkı		
Sınıf	**Doğru**	**Yanlış**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**
9. sınıf	1	-	1	-	-
10. sınıf	3	-	2	-	1
11. sınıf	2	-	2	-	-
Toplam	6	-	5	-	1

Tablo 6'dan görüldüğü gibi bu kategoride cevap veren öğrencilerden birisi 9. sınıf, üçü 10. sınıf, ikisi 11. sınıf öğrencisidir. b şıkkında ise tek bir öğrenci boş bırakmış geri kalan beş öğrenci doğru sonuca ulaşmıştır. Boş bırakan öğrenci ise 10. sınıf öğrencisidir. Bütünden eksiltme kategorisinde 4 öğrenci cevap vermiştir. Şekil 5'de bu kategorideki cevaplardan bir tanesi verilmiştir. Şekil 5'den de görüldüğü gibi bu kategoride cevap veren öğrenciler a şıkkında önce tüm karelerin dört kibrit çöpünden oluştuğunu düşünmüşlerdir. Daha sonra arada ortak olan yani iki kere sayılan kibrit çöplerinin sayısını çıkartarak doğru çözüme ulaşmışlardır. Buradaki öğrenciler bütüne yani 14 tane tam kareye yoğunlaşmışlardır.



a) $14.4=56$ $56-13=43$

→Her karede 4 kibrit çöpü var. Önce hepsini ayrıkmış gibi hesapladım. Sonra da üç karenin birleşiminde normalde iki çöp olması gerekirken bir tane oluyor. Bu da 13 çöpün eksilmesi gerektiğini gösteriyor. Sonuç $=43$

b) $4n-(n-1)$ ← Formül $n=$ kare sayısı

a şıkkındakiyle aynı yolu kullandım

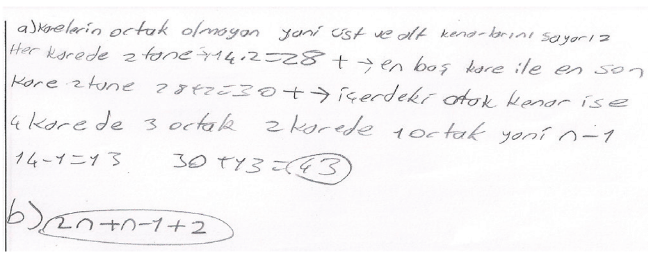
Şekil 5. Bütünden eksiltme kategorisini temsil eden bir çözüm

Katılımcılardan birisi "*iki kareyi bir çöp ayırıyor ve üç kareyi iki çöp ayırıyorsa 14 kareyi de 14-1=13 kibrit çöpü ayırır*" şeklinde açıklama yapmıştır. Yine aynı düşünceyle b şıkkında da doğru bir biçimde genelleyerek formülü elde edebilmişlerdir. Bir kişi de 3n+1 formülüne ulaşmış ancak n=1 için de bu formülün geçerli olduğunu görememiş ve n'yi ikiden başlatmıştır. Bütünden eksiltme kategorisindeki cevapların sınıflara göre dağılımı Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7. Bütünden Eksiltme Kategorisindeki Cevapların Sınıflara Göre Dağılımı

	a şıkkı		b şıkkı		
Sınıf	**Doğru**	**Yanlış**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**
9. sınıf	1	-	1	-	-
10. sınıf	3	-	2	-	1
11. sınıf	2	-	2	-	-
Toplam	6	-	5	-	1

Tablo 7'den görüldüğü gibi bu kategoride cevap veren dört öğrenciden, birisi 9. sınıf, ikisi 10. sınıf ve birisi 11. sınıf öğrencisidir. Tüm öğrenciler yakın durum için doğru cevap vermişken 10. Sınıfta olan bir öğrenci boş bırakmıştır. Bütüne genişletme kategorisinde cevap veren iki öğrenci bulunmaktadır. Şekil 5'de bu kategorideki cevaplardan bir tanesi verilmiştir. Burada önce karelerin altında ve üstünde yer alan kibrit çöplerinin sayısı toplanmış sonra aradaki kibrit çöplerinin sayısı eklenmiştir.


a) karelerin ortak olmayan yani üst ve alt kenarlarını sayarız
Her karede 2 tane → $14.2=28$ + → en baş kare ile en son kare 2 tane $28+2=30$ + → içerdeki ortak kenar ise 4 karede 3 ortak 2 karede 1 ortak yani $n-1$
$14-1=13$ $30+13=43$

b) $2n+n-1+2$

Şekil 6. Bütüne genişletme kategorisini temsil eden bir çözüm

Bütünden eksiltme kategorisinde aradaki kibrit çöpleri çift sayılıp fazlalıklar çıkarılırken bütüne genişletme kategorisinde (Şekil 6) tam tersi şekilde düşünülmüştür. Önce arada hiç kibrit çöpü yokmuş gibi hesaplanmıştır. Bütünden eksiltme kategorisinde çıkarılan kibrit çöplerinin sayısı burada eklenmiştir. Şekli uzun kenarı on dört birim kısa kenarı bir birim olan uzun bir dikdörtgen gibi düşünmüşler ve daha sonra bir birim aralıklarda kibrit çöpleri yerleştirerek bütüne genişletmişlerdir. Bütüne genişletme kategorisindeki cevapların sınıflara göre dağılımı Tablo 8' de verilmiştir.

Tablo 8. Bütüne Genişletme Kategorisindeki Cevapların Sınıflara Göre Dağılımı

	a şıkkı		b şıkkı		
Sınıf	**Doğru**	**Yanlış**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**
9. sınıf	-	-	-	-	-
10. sınıf	2	-	2	-	-
11. sınıf	-	-	-	-	-
Toplam	2	-	2	-	-

Tablo 8'den görüldüğü gibi bu kategoride cevap veren iki öğrencide 10. sınıf öğrencisidir. Her iki öğrenci de iki şıkkı da doğru cevaplamıştır.

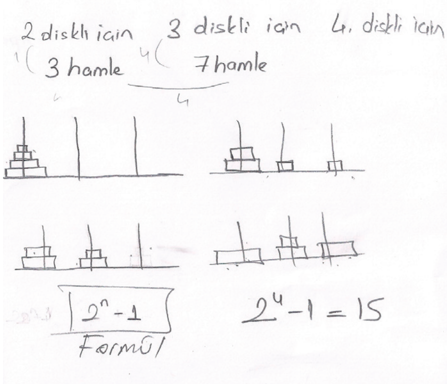
Hanoi Kulesi probleminden elde edilen bulgular

Hanoi kulesi probleminde de kibrit çöpü problemindeki gibi a şıkkında yakın adıma devam ettirme becerisi ölçülürken b şıkkında ise yine uzak terimler için genelleme yapmaları beklenmiştir. 46 öğrenci bu soruya bir şeyler yazmasına rağmen sekiz öğrenci boş bırakmıştır. Cevap veren 16 öğrenci 9. sınıf, 22 öğrenci 10. sınıf ve sekiz öğrenci 11. sınıftadır.

Tablo 9. Hanoi Kulesi Probleminden Elde Edilen Bulgular

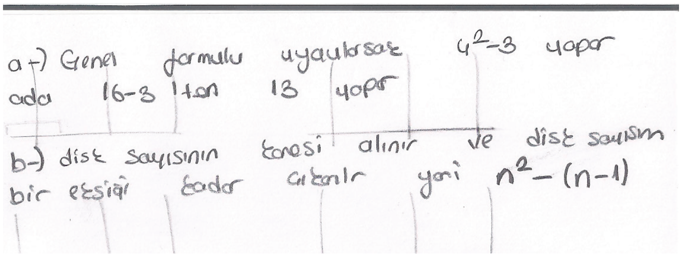
Kategoriler			**Yakın adıma devam ettirme**			**Uzak terimler için formüle genelleme**		
	Sınıf	**f**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**
Doğru formüle genelleme (önce uzak terimler için sonra yakın durum)	9. sınıf	3						
	10. sınıf	-	7	-	-	7	-	-
	11. sınıf	4						
Yanlış formüle genelleme	9. sınıf	2						
	10. sınıf	10	4	8	-	-	12	-
	11. sınıf	-						
Şekil çizme	9. sınıf	3						
	10. sınıf	10	4	6	4	1	3	10
	11. sınıf	1						
Zihinden sonuca ulaşma	9. sınıf	4						
	10. sınıf	1	2	2	3	-	1	6
	11. sınıf	2						
Örüntü bulma	9. sınıf	4						
	10. sınıf	1	-	6	-	-	6	-
	11. sınıf	1						

Tablo 9'dan görüldüğü gibi doğru formüle genelleme kategorisinde cevap veren yedi öğrenci bulunmaktadır. Üç öğrenci 9. sınıf ve dört öğrenci 11. sınıftandır. Bu öğrenciler iki disk için üç hamle ve üç disk için yedi hamle sayısına odaklanmışlar ve bu iki durumu sağlayan formülü aramışlar. "iki ve üç arasında, üç ve yedi arasında nasıl bir ilişki var" sorusuna yoğunlaşmışlardır. Hatta bazı öğrenciler tahmin ve doğrulama stratejisi ile bulmayı denemişlerdir. Bu iki kategorinin de yani doğru formüle genelleme ile yanlış formüle genelleme yapanların ortak noktasıdır. Bunun nedeni önceden çözdülerse hatırlamaya çalışma ya da örüntü soruları ile benzerlik kurmaya çalışmaları olabilir. Şekil 7' de doğru genelleme yapan bir öğrencinin cevabı verilmektedir. Doğru genellemeyi yaptıktan sonra yakın adıma devam ettirme basamağında doğru sonucu bulmuşlardır.



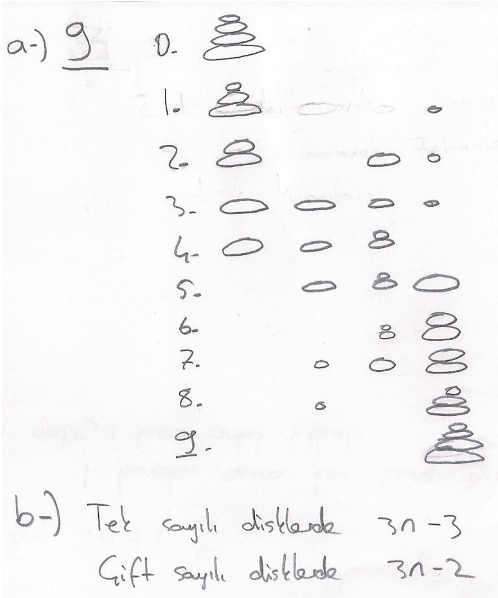
Şekil 7. Doğru formüle genelleme kategorisini temsil eden bir çözüm

Tablo 9'dan görüldüğü gibi yanlış formüle genelleme kategorisinde cevap veren 12 öğrenci bulunmaktadır. Bu öğrencilerden ikisi 9. sınıf ve geri kalanı da 10. sınıf öğrencisidir. Buradaki öğrenciler iki disk için üç hamle ve üç disk için yedi hamle sayısına odaklanmışlar ve bu iki durumu sağlayan formülü aramışlardır. Buradaki öğrenciler de doğru formüle genellemedeki gibi "iki ve üç arasında, üç ve yedi arasında nasıl bir ilişki var" sorusuna yoğunlaşmışlardır. Yine burada da bazı öğrenciler tahmin ve doğrulama stratejisi ile bulmayı denemişlerdir. Daha önce de söylendiği gibi bu strateji iki kategorinin yani doğru formüle genelleme ile yanlış formüle genelleme yapanların ortak noktasıdır. Ancak buradakiler doğru formüle ulaşamamışlardır. Buradaki öğrencilerden dördü yakın adıma devam ettirmede başarılı olmuş ancak bunlar da doğru formüle genelleyememişlerdir. Uzak terimler için formüle genellemede öğrencilerden hiçbiri başarılı olamamıştır. Şekil 8' de bu kategorideki cevaplardan bir tanesi verilmiştir.



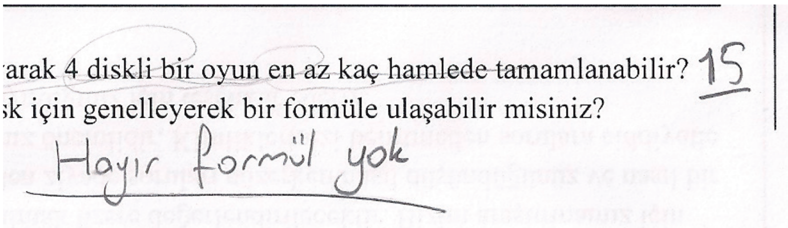
Şekil 8. Yanlış formüle genelleme kategorisini temsil eden bir çözüm

En çok öğrencinin bulunduğu şekil çizme kategorisinde 14 öğrencinin cevabı bulunmaktadır. Tablo 9'dan görüldüğü gibi üç öğrenci 9. sınıf, on öğrenci 10. sınıf ve sadece bir öğrenci 11. sınıftandır. Yakın adıma devam ettirmede dört öğrenci başarılı olurken altı öğrenci başarılı olamamıştır. Dört öğrenci de doğru veya yanlış bir sonuç bulamamış birkaç çizim yapmıştır fakat sonuca ulaşamamıştır. Bu öğrenciler cevapsız yani boş olarak kategorilendirilmiştir. Boş bırakanların birisi 9. sınıf, ikisi 10 ve biriside 11. sınıf öğrencisidir. Uzak terimler için formüle genellemede bir öğrenci doğru sonuca ulaşırken üç öğrenci yanlış sonuca ulaşmış ve on öğrenci de boş bırakmıştır. Buradaki öğrencilerinde üçü 9. sınıf, altısı 10. sınıf ve birisi de 11. sınıf öğrencisidir. Bu kategoride öğrencilerin tüm hamleleri verilen örnek şekillerdeki gibi çizerek devam ettirdikleri gözlemlenmektedir. Bazı öğrenciler son hamleye kadar çizememiş bir yerden sonra "*hocam buradan sonrasını gözümde canlandırarak oynadım*" ifade edenler olmuştur. Şekil 9'da bu kategorideki cevaplardan bir tanesi verilmiştir.



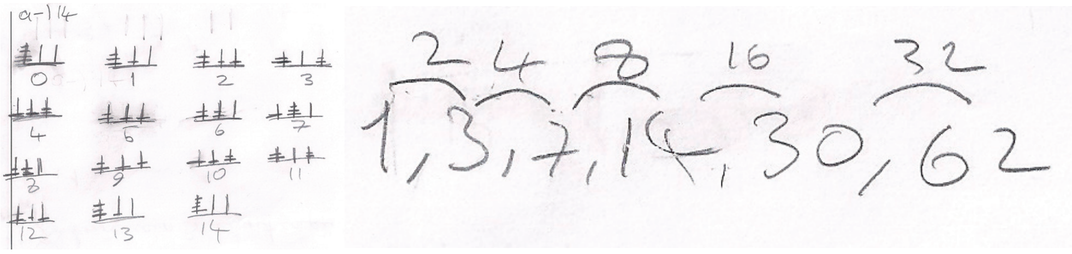
Şekil 9. Şekil çizme kategorisini temsil eden bir çözüm

Yedi öğrenciden oluşan zihinden sonuca ulaşma kategorisinde dört tane 9. sınıf, bir tane 10. sınıf ve iki tane 11. sınıf öğrencisi bulunmaktadır. Öğrenciler verdikleri cevaplara hiçbir açıklama yapmamışlardır. a şıkkında sadece 11. sınıf öğrencileri doğru cevap verirken üç tane 9. sınıf öğrencisi de boş bırakmıştır. b şıkkını ise doğru cevaplayan öğrenci bulunmazken bir tane 9. Sınıf öğrencisi hariç hepsi boş bırakmıştır. Şekil 10' da bu kategorideki cevaplardan bir tanesi verilmiştir.



Şekil 10. Zihinden sonuca ulaşma kategorisini temsil eden bir çözüm

En az öğrencinin bulunduğu örüntü bulma kategorisi altı öğrencinin cevabından oluşmaktadır. Bu kategoride cevaplardan birisi Şekil 11'de verilmiştir. Şekil 11'den görüldüğü gibi her bir adımdaki hamleyi şekil üzerinde göstermiş ve hamle sayısını da not etmiştir.



Şekil 11. Örüntü bulma kategorisini temsil eden bir çözüm

Dört öğrenci 9. sınıf, bir öğrenci 10. sınıf ve bir öğrenci de 11. sınıf öğrencisidir. Hiç bir soruya doğru cevap verilemeyen bu kategoriyi yanlış formüle genelleme kategorisinden ayıran şey ise b şıkkına hiç cevap verilmiş olmasıdır. Öğrencilerden bazıları 2, 4, 6… şeklinde bir artışın olduğunu düşünmüş bazıları sabit artan olarak dördü seçmiş ve bir kısmı da 4, 5… şeklinde bir artışın olduğunu düşünmüşlerdir.

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın amacı Fen Lisesi öğrencilerinin tümevarımsal muhakeme sürecindeki düşünme süreçlerini Kibrit çöpü ve Hanoi kulesi problemleri bağlamında incelemektir. İki problemdeki muhakeme süreçleri birbirinden farklıdır. Kibrit çöpü probleminde bir önceki durumun üzerine kibrit çöpü eklemek ile yeni durum hakkında varsayımda bulunma varken Hanoi kulesi probleminde önceki durumun tamamını dikkate alarak bir varsayımda bulunma vardır. Elde edilen bulgular kibrit çöpü probleminde her bir kademede öğrencilerin en fazla sayma kategorisinde yani ilk karedeki dört kibrit çöpünün üzerine her kare için üç ekleyerek sonuca ulaşmaya çalıştıklarını göstermiştir. Sayma stratejisi, tekrarlı örüntü problemlerinde sıklıkla kullanılan bir stratejidir. Bunun nedeni Goldman Pellegrino ve Mertz (1988) ifade ettiği gibi matematik öğrenme güçlüğü olan çocukların sayma stratejisine muhakeme stratejilerine oranla daha fazla güvenmeleri şeklinde ifade edilebilir. Yirmi öğrenci doğru sonuca ulaşabilmiş ancak üç öğrenci doğru sonuca ulaşamamıştır. Doğru sonuca ulaşamayan öğrencilerden birisinin 10. adımdan sonra işlem hatası yaptığını gözlemlenmiştir. Bu öğrenci *"...31, 33, 36, ..."* şeklinde devam etmiştir. Yanlış yapanlardan birisi sekizinci adıma kadar gelmiş ancak devam etmemiştir. Bir diğer öğrenci de 4'den 43'e kadar üçer ritmik sayarak yazmış ancak soruyu yanlış anladığı için bu sayıları tekrar toplamıştır. Bu öğrenci her bir adımda üç kibrit çöpü arttığını sayarak yazmasına rağmen sorulan durumda hepsini toplaması zayıf muhakemenin göstergesidir. Zayıf muhakeme, Russell (1999) ifade ettiği gibi temeli olmayan, acele uyduruk, iyi düşünülmemiş muhakemelerdir. Umay ve Kaf (2005) ifade ettiği gibi muhakeme tarzlarının yanı sıra kusurlu ve zayıf muhakemeler ile ilgili bilgi sahibi olmak, öğretmenlere öğrencilerinin nasıl düşündüğüne, nerelerde hata yaptığına yönelik ipuçları vermektedir. Kibrit çöpü sorusunda katılımcıların kâğıtları incelendiğinde 14 kare için doğru yapan üç kişinin herhangi bir durum için (n için) yanlış yaptığı ve 14 kare için yanlış yapan üç öğrencinin herhangi bir durum için (n için) boş bıraktığı görülmüştür. Elbette aynı anda birden çok muhakeme yaklaşımı kullanılabilir (Malloy, 1999). Bir duruma bütünsel muhakeme kurarak yaklaşan biri, hesaplarında pratik ya da çözümsel muhakeme yaklaşımlarını karıştırarak uygulayabilir (Umay ve Kaf, 2005). Sternberg'in (1999) ifade ettiği gibi analitik muhakeme, genellikle tek doğru cevapları olan soyut matematik problemlerine yönelik formüller ve uygulamalar hakkında düşünme yeteneğini ifade etmekte iken, pratik muhakeme, günlük problemleri veya uygulamalarla ilgili sebepleri çözme yeteneğini, yaratıcı muhakeme ise problemler hakkında düşünme yöntemlerinin icat edilmesidir. Bu nedenle öğrencileri farklı problem durumları ile karşılaştırmak farklı muhakeme becerilerinin gelişime neden olabileceği söylenebilir. Diğer taraftan cebirsel kategorisinde cevap veren on bir öğrenci görsel ile hiç ilgilenmemiş çizim yapmamış, kullanılan çöp sayısı olan 4, 7, 10 sayılarına odaklanmışlardır. Geneli cebirsel yöntemlerle kuralı bulmuş daha sonra yakın adımdaki çöp sayısını bulmuşlardır. Özel durumdan genele gitmesi beklenirken genelden özele doğru bir yaklaşım sergilemişlerdir. Aslında Zazkis, Liljedahl ve Chernoff (2007) ifade ettiği gibi belirli özel durumları rahatça çalışabilen öğrenciler bile genelliği ifade etmekte zorlanmaktadırlar. Fakat bunun tersine bazı öğrenciler genel kuralı ifade edip özel durumları buna göre yorumlayabilmektedir.

Hanoi kulesi problemi diğer probleme göre düşünme süreçleri yönünden farklı bir problemdir. Bu problem 1883'te Fransız matematikçi Edouard Lucas tarafından ortaya atılmıştır ve problem çözme çalışmalarında sıklıkla kullanılan bir problemdir. Başlangıçtaki durumdan hedefteki duruma ulaşmanın yani problem çözmenin birçok farklı yolları mevcuttur (Goldstein, 2011). Bu yollardan bazıları çok fazla hamle gerektirmektedir. Nitekim Newell ve Simon (1972) problem çözmenin her biri bir "ara durum" olarak ele alınan farklı seçimleri içerdiğini ifade etmektedir. Buna göre problem çözücüler aynı "başlangıç durumu" ile başlarlar farklı ara durumlardan yani farklı adımlardan sonra hedef duruma ulaşabilirler. Ara durumlar yani problem çözme stratejileri öğrenciden öğrenciye farklılık gösterebilir. Bu problemde muhakeme yapmak önceki durumların hepsini göz önüne alıp yeni durum hakkında çıkarımda bulunmak çözüm için etkili bir stratejidir. Kotovsky ve Simon (1990) bu tür problemlerde zorlukların üstesinden gelebilmek için öğrencilerin öğrenmesi gereken şeyin bir hedefe ulaşmak için bir alt hedef aracılığıyla iki hamle ilerisini planlamak olduğunu ifade etmiştir. Çalışmanın bulguları öğrencilerin herhangi bir durum için muhakeme yapamadıklarını göstermiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin çoğunluğu şekil çizerek çözmeyi denemişlerdir. Hatta bazı öğrenciler son hamleye kadar çizememiş bir yerden sonra "*hocam buradan sonrasını gözümde canlandırarak oynadım*" şeklinde ifade etmişlerdir. Bu çizim yapmanın yakın durumlar için etkili bir strateji iken uzak durumlar için kullanışlı bir strateji olmadığını göstermektedir.

Her iki problemden de elde edilen bulgular karşılaştırıldığında tümevarımsal muhakeme sürecindeki düşünme yaklaşımları farklılık göstermesine rağmen şekil çizme ve zihinden sonuca ulaşma kategorileri ortaktır. Polya (1957) tümevarımsal muhakeme sürecinin gözlemlenen olayın açıklanması, konuyla ilgili örnek verme, özel örneklerin incelemesi ve yapılan genellemenin doğruluğunu göstermek şeklinde aşamalı olarak gerçekleştiğini ifade etmektedir. Öğrencilerin problemleri çözerken kullandıkları gösterimler, çizimler nasıl düşündüklerini ve akıl yürüttüklerini anlamamızı kolaylaştırmaktadır. Görselleştirme problem çözmenin hem problemi anlama basamağında kullanılabilen bir strateji olmasının yanı sıra problem çözme stratejisi olarak da kullanılabilir. Nitekim her iki problemde de öğrenciler çizim yaparak çözüme ulaşma eğilimi göstermişlerdir. Bu bulgu Umay ve Kaf (2005) ifade ettiği "*bazı öğrenciler problemleri, sözel ifadelere indirgerken, bazıları uzamsal şekiller kullanırlar*" görüşünü desteklemektedir. Görselleştirme yapılabilecek en iyi yaklaşımlardan birisi de bilgisayar destekli eğitimdir ve tümevarımsal muhakeme becerisini geliştirmek için kullanılabilecek etkili yollar arasında yer almaktadır. Anderson (1992) yinelemeli programlama yöntemleri ile Hanoi kulesinin çözüm sürecini algoritmik olarak açıklamaya çalışmıştır. Arif (2011) ise yinemeli çözüm ile açıklamaya çalışmıştır. Bu türlü etkinlikler sınıflarda uygulanabilirse öğrencilerin düşünme süreçlerinde uzmanlık kazanabilecekleri önerilmektedir. Ayrıca bu çalışmada akademik başarıya göre inceleme yapılmamıştır. İleride yapılacak çalışmalarda farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin muhakeme süreçleri aynı bağlam içinde akademik başarıya göre incelemeler yapılıp, tümevarımsal muhakeme sürecindeki yaklaşımları ve güçlükler ortaya çıkarılabilir. Diğer taraftan bu çalışmada veriler yazılı toplanmıştır. Bu nedenle tümevarımsal düşünme sürecinde, hangi aşamaların nasıl gerçekleştirildiği, problemlerdeki her bir durumdaki gözlemlerini nasıl organize ettikleri, öne sürdükleri varsayımlarının neler olduğu, varsayımlarının doğruluğunu nasıl gerçekleştirdikleri gibi veriler yaptıkları çözümlerden anlaşılamamıştır. İlerideki çalışmalarda yazılı verilerle birlikte sondaj soruların yer aldığı mülakatlar yapılarak bu aşamaların açığa çıkabileceği çalışmalar önerilebilir. Ayrıca öğrencilerin öğrenim süreçlerini de kapsayacak şekilde uzun süreli boylamsal çalışmalar da yapılabilir. Bu sayede düşünme süreçlerindeki gelişime yönelik veriler elde edilebilir.

Bilgilendirme / Acknowledgement:

Çalışmaya katkılarından dolayı gönüllü öğrencilere teşekkür ederiz.

KAYNAKÇA

Anderson, O.D. (1992) Induction, recursion, and the Towers of Hanoi, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(3), 339-343.

Arif, B.R. (2011). *On the footsteps to generalized Tower of Hanoi Strategy*. Erişim adresi: FTP:arxiv.org Directory: papers/1112 File: 1112.0631.pdf

Belin, M. (2016). *Reel sayılarının ondalık açılımının geliştirilmesinde matematik* öğretmeni *adaylarının nicel muhakemesi ve nicel muhakemenin konuyla bağlantılı bir ispatı anlamalarına etkisi*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Boğaziçi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Burton, L. (1984). Mathematics thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(1), 35-49.

Cañadas, M.C., ve Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Christou, C., ve Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction,* 17, 55-66.

Csapó, B. (1997). The development of inductive reasoning: Cross sectional assessments in an educational context. *International Journal of Behavioral Development, 20*(4), 609-626.

Çalışkan, A.L.K. (2019). *7. ve 8. sınıf* öğrencilerinin *matematiksel muhakeme becerilerinin incelenmesi,* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Edwards, L.D. (1997). Exploring the territory before proof: Student‘s generalizations in a computer micro world for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *2*(3), 187-215.

Erdem, E. (2011). İlköğretim *7. sınıf* öğrencilerinin *matematiksel ve olasılıksal muhakeme becerilerinin incelenmesi*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Adıyaman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman.

Feeney, A. ve Heit, E. (2007). *Inductive reasoning: Experimental, developmental, and computational approaches*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511619304

Gerring, J. (2007). *Case study research: Principles and practices*. Cambridge: Cambridge University Press.

Goldman, S.R., Pellegrino, J.W., ve Mertz, D.L. (1988). Extended practice of basic addition facts: Strategy changes in learning-disabled students. *Cognition and Instruction*, *5*(3), 223-265.

Goldstein, E.B. (2011). *Cognitive psychology: Connecting mind, research and everyday experience*, (3rd ed), Australia: Wadsworth Cengage Learning.

Güvendiren, G.N. (2019). *Altıncı sınıf* öğrencilerinin *cebirsel düşünmelerinin* üç *parametreyle birlikte incelenmesi: Niceliksel muhakeme, kovaryasyonel ve fonksiyonel düşünme*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Kızıltoprak, A. (2020). *Ortaokul* öğrencilerinin *dörtgenlere ilişkin geometrik muhakemelerinin gelişimi,* Yayınlanmamış Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Klauer, K.J. (1999). Fostering higher order reasoning skills: the case of inductive reasoning. In J. H. M. Hamers, J. E. H. Van Luit, ve B. Csapo´ (Eds.), *Teaching and learning thinking skills* (131-155). Lisse, the Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Koçyiğit, Ş. (2019). *Stem odaklı* öğretim *süreçlerinde* öğrencilerin *matematiksel muhakeme, matematiğe yönelik tutum ve* özyeterliklerinin *incelenmesi* Yayınlanmamış Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Kotovsky, K. ve Simon, H.A. (1990). What makes some problems really hard: Explorations in the problem space of difficulty? *Cognitive Psychology*, 22, 143–183.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 255 -276.

Lithner, J. (2012). University mathematics students’ learning difficulties, *Education Inquiry*, *2*(2), 289-303.

Magiera, M.T. (2012a). K-*8 Pre-service teacher' inductive reasoning in the problem-solving contexts*. Canada: Marquette University.

Magiera, M.T. (2012b). *Characterizing prospective K-8 teachers' inductıve behavıors in solutıons to contextually-based tasks*. 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12). 8 – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea.

Malloy, C.E. (1999). Developing mathematical reasoning in the middle grades recognizing diversity. In Lee V. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* / 1999 yearbook. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Miles, M., ve Huberman, A.M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook (2nd ed.) Thousand Oaks, CA:Sage.*

Millî Eğitim Bakanlığı, (2018). M*atematik dersi* öğretim *programı*. Ankara.

Moreno, A., Myller, N. Sutinen E., Lin, T. ve Kinshuk (2007). Inductive reasoning and programming visualization, an experiment proposal. *Computer Science 178*, 61–68.

Mutluoğlu, A. (2019). *6. sınıf matematik dersi geometri ve* ölçme öğrenme *alanında geliştirilen bir sanal manipülatif takımının (MATMAP)* öğrencilerin *akademik başarılarına, geometriye yönelik tutumlarına ve geometrik muhakeme süreçlerine etkisi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

National Science Foundation [NSF]. (1995). Mathematical power for all students: the Rhode Island mathematics framework. K-12. C.I.A.I. *Curriculum, instruction, assessment, improvement, Pinellas county schools division of curriculum and instruction secondary mathematics*. Washington. DC. Arlington.

Navruz, V. (2012) *İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin matematiksel problemlerin çözümünde sergiledikleri tümevarımsal düşünce süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

Newell, A. ve A. Simon, H.A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Neubert, G.A. ve Binko, J.B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington DC: National Education Association. OECD. (2004). Problem solving for tomorrow's world. First measures of cross-curricular competencies from PISA 2003. OECD.

Özdemir, F. (2019). *Lise* öğrencilerinin *limit ve süreklilik konusunda muhakeme ve* üstbilişsel *gelişiminin Improve modeli ile incelenmesi* Yayınlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Papageorgiou, E. (2009). *Towards a teaching approach for improving mathematics inductive reasoning problem solving*. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. and Sakonidis, H. (Eds.). Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 313–320). Thessaloniki, Greece: PME .

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, N.J: Princeton University Press.

Polya, G. (1967). *La découverte des mathématiques*. Paris: DUNOD.

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in Grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Russell, S.J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In Lee V. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* / 1999 yearbook. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Selden, A.A. ve Selden J. (1978). Errors students make in 'mathematical reasoning. *Bosphorous University Journal, 6*, 67-87.

Sternberg, R.J. (1999). The nature of mathematical reasoning. In Lee V. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* / 1999 yearbook. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Schwenzer, M. ve Mathiak, K. (2012). The correlation of inductive reasoning with multi-dimensional perception. *Personality and Individual Differences, 52*(8), 903–907.

Tutan, S. (2019). *Geometrik muhakeme süreçleri bağlamında ortaokul matematik* öğretmenlerinin *geometri içerikli derslerinin incelenmesi*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe* Üniversitesi *Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*, 234-243.

Umay, A. ve Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe* Üniversitesi *Eğitim Fakültesi Dergisi*, *28*, 188-195.

Üstün, A. (2019). *5. sınıf* öğrencilerinin *kesirler konusu* üzerindeki *muhakeme yapabilme becerilerinin incelenmesi.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Tokat.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2003). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntem*leri. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yöndemli, E. (2018). *Zekâ oyunlarının (strateji ve geometri) ortaokul düzeyindeki* öğrencilerde *matematiksel muhakeme yeteneğine ve matematik dersinde gösterilen* çabaya *etkisi.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Kırıkkale.

Zazkis, R. Liljedahl, P. ve Chernoff, E. (2007). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 131-141.

EXTENDED SUMMARY

Introduction

Reasoning is expressed as a way of thinking that is used to produce assumptions and to reach relationships, rules or formulas based on these assumptions (Lithner, 2008). As a matter of fact, as a result of this thinking process, there is a reasoned decision that is logical, does not contradict itself, and is in accordance with procedures and rules (Umay, 2003). Being able to answer questions such as why, why and how, to provide justifications, to make verification, that is to make reasoning, are among the most important goals of mathematics education. In parallel with this importance, reasoning has become the subject of many studies in recent years. Mathematical reasoning, on the other hand, includes many arguments, and understanding such arguments is necessary for understanding mathematics (Selden & Selden, 1978). Inductive reasoning plays a complementary role in mathematical reasoning. Inductive reasoning is accepted as a fundamental component of thinking, and one of the most studied cognition procedures (Csapó, 1997) is even the highest level cognitive skill characterizing learning potential (Papageorgiou, 2009). Without inductive reasoning, generalizations cannot be made from one situation to another, and scientific hypotheses cannot be produced (Feeney & Heit, 2007). It is more important to reveal the nature, functioning, and cognitive process of mathematics education of inductive reasoning than to describe it. For this reason, the focus of this study is to examine students' thinking processes in the inductive reasoning process. In this context, it is aimed to reveal how the inductive reasoning process takes place in the dimension of Science High School students in given problem solving situations. With the prediction that science high school students were determined according to a selection exam and had higher level thinking skills, the inductive reasoning processes of Science High School students were discussed.

Method

The case study, which is one of the qualitative research methods, was used in the study. Case study is used to describe and examine the process that brought about an event, to develop and evaluate the understanding of the event. The fact that the case study is not valid for all situations and is suitable for generalizations only for the specified situation / situations is compatible with the nature of this study in terms of considering each of the problems addressed in the study as a situation, and understanding how the thinking processes in each of these situations differ from each other. Indeed, the inductive reasoning process varies from student to student, depending on the problem situation being addressed, and this diversity, which can be observed with case study, allows research problems to be answered. Study data were collected in writing with the "Matchstick Question" and "Hanoi Tower" problems, which required inductive reasoning. In both problems, they observe given immediate situations, which are the stages of inductive thinking processes, organize their observations, put forward assumptions based on relationships in special situations, verify their assumptions, make inferences for distant situations, they are expected to put forward a rule, that is, to make generalizations. Collected data were analyzed using descriptive analysis technique.

Conclusions

It is to examine in the context of matchstick and Hanoi tower problems. The reasoning processes in the two problems are different from each other. In the matchstick problem, there is an assumption about the new situation by adding a matchstick over the previous situation, while in the Hanoi tower problem, there is an assumption by taking the previous situation into account. The findings showed that in the matchstick problem, in each level, the students tried to reach the result by adding three for each square to the four matchsticks in the first frame in the highest counting category. In the Hanoi problem, most of the students tried to solve it by drawing a shape. Some students even stated that after a place that they could not draw until the last move, "My teacher, I visualized the rest from here". This shows that drawing is an effective strategy for near situations but not a useful strategy for far situations. When the findings obtained from both problems are compared, although the thinking approaches in the inductive reasoning process differ, the categories of drawing figures and reaching conclusions from the mind are common. This study has not been examined based on academic achievement. In future studies, the reasoning processes of students at different grade levels can be examined in the same context according to their academic achievement, and their approaches and difficulties in the inductive reasoning process can be revealed. On the other hand, in this study, data were collected in writing. For this reason, in the process of inductive thinking, data such as which stages were carried out, how they organized their observations in each case in the problems, what their assumptions were, how they realized the correctness of their assumptions could not be understood from the solutions they made. In future studies, interviews involving drilling questions with written data can be made and studies in which these stages can be revealed can be proposed. In addition, long-term longitudinal studies can be conducted to cover the learning processes of students. In this way, data regarding the development of thinking processes can be obtained.