Sur des familles de courbes attachées aux corps élastiques ou plastiques plans

S. Süray

(Institut de Mathématiques de l'Université d'Ankara)

Nous nous proposons d'étudier dans cette note un cas particulier remarquable d'état d'équilibre d'un corps élastique ou plastique à deux dimensions, c'est celui où les lignes principales ou les lignes de glissement forment un réseau de courbes isotherme.

Le fait qu'il est possible de trouver pour un corps élastique plan un état d'équilibre où la famille des lignes principales est isotherme est connu depuis la publication d'un article de Neméniyi[1]).

Le procédé que nous allons employer s'applique aussi bien pour les corps élastiques que pour les corps plastiques et conduit tout directement à la résolution du problème.

Nous partons des équations d'équilibre bien connues

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0\ , \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

auxquelles il faut adjoindre l'une ou l'autre des deux conditions

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \tag{2}$$

1) Zeits. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 13, p. 64 (1933).

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}} = C = constante, \tag{3}$$

selon que le corps envisagé est élastique ou plastique, Δ désignant le Laplacien

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot$$

Lorqu'on passe à un système de coordonnées curvilignes $u = C^{te}.$, $v = C^{te}.$, les nouvelles projections des tensions sont liées aux anciennes par les relations

$$\sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y \ , \quad \left(\frac{\sigma_u - \sigma_v}{2} + i\,\tau_{uv}\right) e^{2i\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + i\,\tau_{xy} \ , \tag{4}$$

où σ_u, σ_v sont les tensions normales suivant les directions $u\,(v = C^{te})$, $v\,(u = C^{te}.)$ respectivement, τ_{uv} la tension tangentielle, θ l'angle de la direction u avec l'axe des x positifs, et $i = \sqrt{-1}$.

Les valeurs de θ qui rendent σ_u maximum ou minimum sont données par

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \tag{5}$$

et les valeurs correspondant des tensions sont

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}} \ , \qquad \tau = 0. \tag{6}$$

De même, les valeurs de θ donnant à τ_{uv} ses valeurs extrêmes sont fournies par

$$\operatorname{tg} 2\,\beta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\,\tau_{xy}}, \tag{7}$$

et les valeurs correspondant de τ_{uv} sont

$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{8}$$

Les directions définies par (5) et (7), c'est-à-dire les directions faisant l'angle α et β avec l'axe des x positifs sont appelées *directions principales* et *directions de glissement*, et les courbes qui sont tangentes en chaque point à ces directions portent respectivement le nom de *lignes principales* et *lignes de glissement.*

Remarquons, enfin, que de (5) et (7) on déduit la relation évidente

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{4} \cdot$$

Nous poserons

$$\frac{\sigma_x + \sigma_q}{2} = P, \quad \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}} = Q. \tag{9}$$

Tenant compte de (4), (5) et (9), les équations (1) s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + 2Q\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\cos 2\alpha + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - 2Q\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)\sin 2\alpha + \frac{\partial P}{\partial x} = 0,\\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + 2Q\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\sin 2\alpha - \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - 2Q\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)\cos 2\alpha + \frac{\partial P}{\partial y} = 0;\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

on peut remplacer ces équations par une seule équation vectorielle; en effet, désignons par $\vec{a}$ le vecteur unité qui fait l'angle 2α avec l'axe des x positifs et par $\vec{b}$ le vecteur unité directement perpenticulair à $\vec{a}$, on a alors

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + 2Q\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\vec{a} - \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - 2Q\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)\vec{b} + \overrightarrow{\text{grad}}\, P = 0, \tag{1.2}$$

Soit, d'autre part,

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

l'élément d'arc en coordonnés curvilignes (u, v); l'équation (1.2), projetée sur les directions u ve v, donne les suivantes[1]):

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial Q}{\partial u} + 2\frac{Q}{\sqrt{G}}\frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0,\\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial Q}{\partial v} + 2\frac{Q}{\sqrt{E}}\frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

[1]) A. Chatelet et J. Kampé de Fériet, *Calcul vectoriel*, p. 376

Telles sont les équations d'équilibre du corps rapporté à ses lignes principales.

Pour les corps élastiques il faut ajouter à ces équations la *condition d'élasticité* (2) qui prend maintenant la forme

$$\Delta^* P = 0, \tag{2.1}$$

où Δ^* représente le second opérateur différentiel de Beltrami[1]

$$\Delta^* \equiv \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial}{\partial u} \right) \right].$$

D'autre part, les quantités E, G et α sont liées par les relations

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial v}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u}, \tag{10}$$

pour qu'elles soient compatibles, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial v} \right) = 0, \tag{11}$$

équation qui exprime la nullité de la courbure totale de la surface représentative du corps.

Ainsi la determination de l'état d'équilibre du corps élastique dépend de la résolution du système formé par quatre équations, savoir (1.3), (2.1) et (11).

On peut intégrer ces équations lorsque les deux famille de courbes $u = C^{te}.$, $v = C^{te}.$ forment un résau isotherme, et la propriété mentionnée au début en résulte; c'est ce que nous allons faire maintenant.

Intégration dans le cas isotherme. — Si on fait $E = G$ dans les équations (1.3) (2.1), (11) et si on tient compte de (10), ces équations deviennent respectivement

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{Q}{E} \frac{\partial E}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{Q}{E} \frac{\partial E}{\partial v} = 0, \end{aligned} \right| \tag{1.4}$$

[1]) W. Blaschke, Differentialgeometrie, Vol. I, p. 173.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}=0, \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log E=0. \tag{11.1}$$

Si nous posons

$$u+iv=w, \quad u-iv=\overline{w},$$

les équations (2.2) et (11.1) donnent immédiatement

$$P=\varphi(w)+\overline{\varphi}(\overline{w}), \tag{12}$$

$$E=\Phi'(w)+\overline{\Phi}'(\overline{w}), \tag{13}$$

où φ est une fonction comlexe arbitraire de son argument, et $\overline{\varphi}(\overline{w})$ la conjuguée de φ; Φ' est la derivée d'une fonction complexe arbitraire Φ; $\overline{\Phi}'$ la conjugée de Φ'.

Multipliant la seconde équation de (1.4) par i et ajoutant le résultat à la première, il vient

$$\frac{\partial(EQ)}{\partial u}-i\frac{\partial(EQ)}{\partial v}+E\left(\frac{\partial P}{\partial u}+i\frac{\partial P}{\partial v}\right)=0; \tag{14}$$

d'autre part, on établit aisément les relations

$$\frac{\partial}{\partial w}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}-i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{w}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

par suite, l'équation (14) prend la forme

$$\frac{\partial(EQ)}{\partial w}+E\frac{\partial P}{\partial \overline{w}}=0,$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial P}{\partial \overline{w}}$ par sa valeur fournie par (12)

$$\frac{\partial(EQ)}{\partial w}+E\overline{\varphi}'(\overline{w})=0;$$

remplaçons maintenant E dans cette équation par sa valeur (13), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial w}[Q\,\Phi'(w)]+\Phi'(w)\cdot\overline{\varphi}'(\overline{w})=0,$$

d'où, en intégrant,

$$Q\,\Phi'(w)+\Phi(w)\,\overline{\varphi}'(\overline{w})=-\overline{h}\,(\overline{w}),$$

$\overline{h}$ désignant une fonction arbitraire de $\overline{w}$; on a donc

$$Q=-\frac{\overline{h}\,(\overline{w})+\overline{\varphi}'(\overline{w})\,\Phi(w)}{\Phi'\,(w)},$$

ou encore

$$Q=\frac{\overline{H}\,(\overline{w})+\overline{F}\,(\overline{w})\,\Phi(w)}{\Phi'\,(w)},\tag{15}$$

où nous avons posé $\overline{h}=-\overline{H},\quad \overline{\varphi}'=-\overline{F}.$

Comme Q est une quantité reelle, il doit en être de même du second membre de (15), pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$\overline{H}(\overline{w})\,\overline{\Phi}'(\overline{w})=F\,(w)\,\overline{\Phi}(\overline{w})\,\Phi'\,(w),$$

et, par conséquent,

$$Q=\frac{F(w)\,\overline{\Phi}\,(\overline{w})\,\Phi'(w)+\overline{F}\,(\overline{w})\,\Phi\,(w)\,\overline{\Phi}'\,(\overline{w})}{\Phi'\,(w)\,\overline{\Phi}'\,(\overline{w})}.\tag{16}$$

L'intégraton étant ainsi achevée, les relations (12) et (16) déterminent l'état des tensions du corps élastique en équilibre, où les lignes principales forment un réseau isotherme quelconque.

On pourrait également montrer la possibilité de déterminer des états d'équilibre d'un corps élastique avec des lignes de glissement isothermes; mais on peut affirmer sans calcul qu'il peut exister de tels états d'équilibre, car puisque les lignes principales peuvent constituer un réseau isotherme, et que les lignes de glissement font en chaque point avec les précédentes un angle de 45°, elles peuvent donc, d'après une propriété classique des réseaux isothermes, former aussi un réseau isotherme.

Cas des corps plastiques. — Dans le cas de la plasticité plane, la simplicité relative des équations a permis pour les lignes de glissement des études plus avancées que dans le cas des corps élastiques; parmi les travaux consacrés à l'étude de ces courbes on peut citer principalement les recherches de H.

H e n c k y [1]), de C. C a r a t h e o d o r y - E. S c h m i d t [2]), et de W. P r a g e r [3]).

Pour les lignes principale les équations ne présentent pas la même maniabilité; mais dans le cas où l'on suppose que ces lignes forment un réseau isotherme, les équations s'intégrent sans difficulté. C'est ce que nous allons montrer dans ce qui suit.

Pour un corps plastique, il faut ajouter aux équation (1.3), au lieu de $\Delta^* P=0$, la *condition de plasticité* $Q=C=$ *constante;* tenant compte aussi de (10), les équations (1.3) deviennent

$$\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{C}{G}\,\frac{\partial G}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial v}-\frac{C}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v}=0\,, \tag{17}$$

et nous avons encore la condition

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right)=0. \tag{11}$$

Telles sont les équations dont dépend l'ètat d'équilibre du corps plastique rapporté à ses lignes principales.

Intégration dans le cas isotherme.— Faisons $E=G$ dans (17) et (11), il vient

$$\frac{\partial P}{\partial u}+C\,\frac{\partial}{\partial u}(\log\ E)=0,\frac{\partial P}{\partial v}-C\frac{\partial}{\partial v}(\log\ E)=0, \tag{17.1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\ E=0. \tag{11.1}$$

En éliminant P entre les deux équations (13), on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(\log E)=0. \tag{18}$$

De (11.1) et (18) on tire pour E la valeur

$$E=e^{a\,(u^2-v^2)+bu+cv+d}\,, \tag{19}$$

[1]) H. H e n c k y, *Zeits. f. angew. Math. u. Mech. Vol.* 3 (1923) *p.* 241.

[2]) C. C a r a t h e o d o r y - E. S c h m i d t, *Zeits. f. angew. Math. u. Mech. Vol.* 3 (1932) p. 468.

[3]) W. P r a g e r, *Revue de la Fac. des Sc. de l'Université d'Istanbul, T.* IV (1938) p. 22.

où a, b, c, d sont des constantes artibraires. Avec cette valeur de E les équations (17.1) donnent

$$\frac{P}{C} = -a(u^2 + v^2) - bu + cv + d_1, \tag{20}$$

d_1 étant une nouvelle constante arbitraire.

On voit que si les lignes principales constituent un réseau isotherme, elle seront caractérisées par l'équation (19), et la tension P aura la valeur fournie par (20). Ici on peut signaler le fait suivant: les lignes principales d'un milieu plastique plan, même dans le cas où elles forment un réseau isotherme, ne constituent pas en général un rèseau de Hencky-Prandtl, c'est-à-dire un réseau de courbes caractérisé par la relation

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \, \partial v} = 0$$

qui exprime la propriété principale des lignes de glissement; car pour un réseau de lignes principales isotherme, l'équation (19), combinée avec (10), donne

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \, \partial v} = a \neq 0.$$

On peut encore remarquer que, lorsque le réseau des lignes principales est isotherme, il en sera de même, d'après la propriété déjà signalée, du réseau des lignes de glissement dont la détermination effective ne présente pas de difficulté; en effet, l'angle β que fait alors la direction de glissement $u_1 = C^{te}$ avec l'axe des x positifs doit satisfaire aux équations

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial u_1 \, \partial v_1} = 0 , \qquad \frac{\partial^2 \beta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial v_1^2} = 0,$$

lesquelles donnent pour E correspondant la valeur

$$E_1 = e^{a_1 u_1 v_1 + b_1 u_1 + c_1 v_1 + d_2}$$

a_1, b_1, c_1, d_2 désignant des constantes arbitraires.

(Manuscrit reçu le 15 Mars 1948)