Über den Schlichtheitskern einer Potenzreihe und die Schlichtheitsdichte einer analytischen Funktion

Orhan H. ALİSBAH

(Mathematisches Institut der Üniversität Ankara)

(z. Zt. Institute for Advanced Study, Princeton N. J.)

Özet : Bu araştırmada ayrıkdeğerli (schlicht) fonksiyonların genel teorisiyle ilgili olarak bir üstel serinin ayrık değerlilik karakteri, ayrıkdeğer çekirdeği ve analitik bir fonksiyonun ayrıkdeğerlilik yoğunluğu gibi üç yeni kavram tarif olunmaktadır. § 1 de Bieberbach teoremine dayanarak, verilen bir üstel serinin r ayrıkdeğerlilik karakteri için yalnız a_1 ve a_2 ye tabi ve $r \leqq 2 \left| \frac{a_1}{a_2} \right|$ şeklinde bir eşitsizlik elde olunmaktadır. § 2 de ise ayrıkdeğerlilik yoğunluğu $d(z) = z - \frac{1}{z}$ ile verilen özel bir fonksiyon sınıfı incelenmektedir. Klâsik teoride mühim bir rol oynayan $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ fonksiyonu bu sınıfın tabiî bir elemanıdır.

* * *

Einleitung:

In der vorliegenden Arbeit werden als neue Begriffe, der Schlichtheitscharakter und der Schlichtheitskern einer Potenzreihe definiert und die Schlichtheitsdichte $d(z)$ einer analytischen Funktion eingeführt.

Im § 1 erhält man auf Grund des Bieberbach'schen Koeffizientensatzes eine Abschätzung für Schlichtheitscharakter einer Potenzreihe, welche nur von a_1 und a_2 abhängt. Sie sieht folgendermassen aus: $r \leqq 2 \left| \frac{a_1}{a_2} \right|$.

Im § 2 wird eine spezielle Klasse von Funktionen studiert, für die $d(z) = z - \frac{1}{z}$ ist. In dieser Klasse befindet sich auch die spezielle Funktion

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

die in der klassischen Theorie der Schlichten Funktionen eine besondere Rolle spielt.

§ 1.

Es sei nun $P(z)=a_0+a_1 z+\cdots\cdot$ eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius gleich R ist. Es soll weiter $a_1\neq 0$ sein. Dann behaupten wir, dass es eine von Null verschiedene Zahl $r\leqq R$ gibt, von der Art, dass für z-Werte, welche der Bedingung $|z|<r$ genügen $P(z)$ Werte annimmt, die nicht wiederholt werden. Denn, sonst gäbe es in jedem noch so kleinen Kreise um den Nullpunkt, mindestens ein Punktepaar wo $P(z)$ den gleichen Wert annimmt. Hieraus folgt aber, dass es mindestens zwei Punktfolgen gäbe, welche gegen den Nullpunkt konvergieren, so dass auf den die sich entsprechenden Stellenpaare dieser Folgen, $P(z)$ den gleichen Wert annimmt. z_k und z_k^* $(z_k\neq z_k^*)$ sollen die entsprechenden Elemente zweier solcher Folgen repräsentieren, bilden wir nun den Ausdruck $D(z_k, z_k^*)=\dfrac{P(z_k)-P(z_k^*)}{z_k-z_k^*}$, so ist er ständig Null. Das führt aber dazu, dass $P'(0)=a_1=0$ sein muss. Da dieses Ergebnis mit der am Anfang gemachten Annahme $a_1\neq 0$ im Widerspruch steht, so folgt hieraus die Richtigkeit unserer Behauptung. Wir nennen die positive Zahl r den Schlichtheitscharakter der Potenzreihe $P(z)$ in Bezug auf den Punkt $z=0$ und den Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r\,(\leqq R)$ Schlichtheitskern der genannten Potenzreihe.

Nun betrachten wir den Ausdruck $P_0(\zeta)=\dfrac{P(\zeta)-a_0}{a_1 r}=\zeta+\dfrac{a_2}{a_1}r\,\zeta^2+\cdots$, wo $\zeta=\dfrac{z}{r}$ ist. Konvergenzradius dieser transformierten Reihe ist dann gleich $\dfrac{R}{r}$ $(\geqq 1)$. Andererseits stellt aber $P_0(\zeta)$ eine für $|\zeta|<1$ schlichte Funktion dar, für die ausserdem $P_0(0)=0$ und $P'(0)=1$ ist. Demnach erhalten wir nach dem Bieberbach'schen Koeffizientensatz die folgende Ungleichung: $\left|\dfrac{a_2}{a_1}r\right|\leqq 2.$

Und hieraus :

$$r \leqq 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|,$$

wo das Gleichheitszeichen nur für

$$P_0(\zeta) = \frac{\zeta}{(\varepsilon\zeta - 1)^2}, \qquad |\varepsilon| = 1,$$

d.h.

$$P(z) = a_0 + \frac{z}{\left(\varepsilon\frac{z}{r} - 1\right)^2}$$

(Theorem 1).

Dieser Fall bedingt aber, wie leicht zu sehen ist, dass dann $r = R$ ist. Für die überigen Fälle gilt danach

$$O < r < 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$$

Ein leichtes Beispiel zeigt, dass der eigentliche Wert von r von $2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$ wesentlich abweichen kann. Betrachten wir z.B. die Funktion $\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ welche als eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R = \infty$ und $a_k = 0$ für $k \geqq 3$ aufgefasst werden darf, so erhalten wir als Schlichtheitskern dieser Reihe den Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius

$$\left|\frac{a_1}{2\,a_2}\right|\left(< 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|\right)$$

Wir finden es nützlich, hier einen Begriff einzuführen, welcher für die Betrachtung des Schlichtheitscharakters von Bedeutung zu sein scheint. Es sei nämlich $w = f(z)$ eine eindeutige analytische Funktion, welche in einem Bereiche B definiert ist. Wir gehen nun von einem inneren Punkte z_0 des Bereiches B aus und fragen nach der nächstgelegenen Wiederholungsstelle z_0^* — d.h. $f(z_0) = f(z_0^*)$ —, falls eine solche existiert und bilden den Ausdruck $d(z_0) = z_0 - z_0^*$. Wir nennen $d(z_0)$ lokale Schlichteitsdichte der Funktion $f(z)$ in Bezug auf B. Für jeden abgeschlossenen Teilbereich B^* von B, welcher keine **Nullstelle** der Ableitung $f'(z)$ von $f(z)$ enthält, gibt es eine positive Zahl d^*, so dass für jeden Punkt P von B^*, im Kreise vom Radius d^* um P keine Wiederholungsstelle vorkommt. Es ist demnach $d^* < r(z)$ wo r Radius des Schlichtheitskern des bezüglichen Funktionselementes bedeutet. d^* ist nämlich Minimum des Absoluten Betrages der Schlichtheitsdichte in dem abgeschlossenen Teilbereich B^* von B. Dieses Minimum existiert sicher, falls überhaupt eine Schlichtheitsdichte existiert. Sie ist nämlich dann wie leicht ersichtlich eine stetige Ortsfunktion.

Für unser obiges Beispiel, ist $d(z) = 2z - \frac{a_1}{a_2}$, Für die Linearen Funktionen $w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ mit $\Delta \neq 0$, existiert keine Schlichtheitsdichte, weil sie ja eine umkehrbar eindeutige Abbildung der vollen Ebene auf sich ausführen d.h. überall schlicht sind.

Sowohl der Schlichtheitskern als auch Schlichtheitsdichte sind invariant gegenüber linearen Transformationen $w^* = \frac{aw+b}{cw+d}$ mit $\delta \neq 0$.

Die obige Abschätzung für r erhält eine besondere Bedeutung, falls $2\left|\frac{a_1}{a_2}\right| < R$ (R ist Konvergenzradius von $P(z)$) ist. Denn in diesem Falle enthält der Kreisring $2\left|\frac{a_1}{a_2}\right| < |z| < R$ notwendigerweise Wiederholungsstellen **(Theorem 2).**

Man nehme an, es gäbe ein Punkt z_0 von B, so dass bei beliebiger Annäherung zu diesem $d(z)$ von $f(z)$ gegen Null konvergiert, dann ist $f'(z_0) = 0$ **(Theorem 3).**

Da die Existenz der Schlichtheitsdichte mit dem Vorhandensein der Wiederholungsstellen verknüpft ist, so folgt der Beweis wie oben.

Ist aber das Funktionselement der Ausgangsfunktion durchweg schlicht oder die Funktion selbst, schlicht in einem grösseren Bereiche, welcher den Konvergenzkreis des betrachteten Funktionselements enthält, so muss natürlich $R \leqq 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|$ sein.

§ 2.

In diesem Abschnitt, wollen wir als ein spezielles Beispiel eine Klasse von Fonktionen studieren, für die $d(z) = z - \frac{1}{z}$ ist. Mit anderen Worten für jeden Wert von $f(z)$ soll die nächstgelegene Wiederholungsstelle im Punkte $\frac{1}{z}$ liegen, *d. h.* $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$. Geht man *z.* Beispiel von einer linearen Funktion $\varphi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ mit $\Delta \neq 0$ aus und bildet man den Ausdruck

$$f(z) = \varphi(z) . \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$$

so erhält man eine auf der Vollebene definierte meromorphe Funktion, welche für die Erläuterung bisher eingeführter Begriffe einen nützlichen Dienst leistet.

Diese Funktionen sind nämlich im Inneren des Einheitskreises schlicht, so dass der Einheitskreis für sie eine natürliche Schlichtheitsgrenze bildet. Sie sind schlicht und meromorph für $|z| < 1$, falls $\left|\frac{\delta}{\gamma}\right| \neq 1$ und schlicht und regulär ebendort falls $\left|\frac{\delta}{\gamma}\right| = 1$. Macht man noch im letzteren Falle die folgenden zwei Voraussetzungen $f(o) = 0$, $f'(o) = -1$, welche der Normierung dienen, so bekommt man die Funktion

$$f(z) = \frac{-z}{(z-1)^2} \text{ mit } \varphi(z) = \frac{1}{z-1},$$

welche in der klassischen Theorie der Schlichten Funktionen eine besondere Rolle spielt.

(Eingegangen am 28. 6. 1953)