COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Tome V

(Série A — Fasc. 2)

İSTANBUL

ŞİRKETİ MÜRETTİBİYE BASIMEVİ

1 9 5 3

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara" est une publication englobant toutes les disciplines scientifiques représentées à la Faculté : Mathématiques pures et appliquées, Astronomie, Physique et Chimie théoriques, expérimentales et techniques, Géologie, Botanique et Zoologie.

La Revue, les tomes I, II, III exceptés, comprend trois séries :

Série A : Mathématiques-Physique
Série B : Chimie
Série C : Sciences naturelles.

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible, les communications des savants étrangers. Les langues allemande, anglaise et française sont admises indifféremment. Les articles devront être accompagnés d'un bref sommaire en langue turque.

Adresse :

Fen Fakültesi Mecmuası, Fen Fakültesi, Ankara.

COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A : Mathématique Physique

Tome V. 1953

Über die C — Summierbarkeit der unendlichen Reihen

von

Berki YURTSEVER

(Mathematisches Institut der Universität Ankara)

Özet: Bu tezde (C, 1) toplanabilen seriler incelenmekte ve şu teoremler ispatlanmaktadır :

Teorem. 1. *Σa_ν serisi verilmiş olsun. Eğer*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_0^k s_\nu \, b_{\nu+1}$$

limiti mevcut ve

$$\Sigma s_\nu \left(b_\nu - b_{\nu+1} \right)$$

serisi (C, 1) *toplanabilirse, $\Sigma a_\nu \, b_\nu$ serisi de* (C, 1) *toplanabilirdir.*

Teorem 2. *Eğer* (C, 1) *toplanabilen her seri (b_ν) dizisi tarafından yine* (C, 1) *toplanabilen bir $\Sigma a_\nu \, b_\nu$ serisine dönüştürülüyorsa,* (C, 1) *toplanabilen bütün serilerden kısmi toplamları sınırlı olanların teşkil ettikleri cümleyi $\mathfrak{M}_1$ ile gösterdiğimizc göre, $\mathfrak{M}_1$ e ait* (C, 1) *toplanabilen Σa_ν serileri için teorem* 1 *deki şartlar zarurî olarak sağlanırlar.*

Teorem 3. *Σa_ν serisi sınırlı kısmi toplamlara malik bulunsun ve* (C, 1) *toplanabilir olsun. Eğer (b_n) dizisi monoton ve sınırlı ise, $\Sigma a_\nu \, b_\nu$ serisi de* (C, 1) *toplanabilir.*

Teorem 4. $B_n^{(1)} = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$
$$B_n^{(m)} = B_1^{(m-1)} + \cdots + B_n^{(m-1)}$$
olduğuna göre, eğer sonlu bir m tam sayısı için
$$\sum_1^\infty B_\nu^{(m)}$$
serisi (C, 1) *toplanabilirse,* Σa_ν *serisi de* (C, 1) *toplanabilirlidir.*

Son paragrafta teorem 3 ve teorem 4 bir misale uygulanmaktadır.

Einleitung

In dieser Note werden wir die (C, 1) — Summierbarkeit einer Reihe der Form $\Sigma a_\nu . b_\nu$ untersuchen. Ausserdem geben wir im § 2 einen Satz, welcher bei der Feststellung der (C, 1) Summierbarkeit mancher unendlicher Reihen vielleicht nützlich sein könnte. Einige der Sätze des § 2 wollen wir später auf die (C, k) — Summierbarkeit verallgemeinern.

Bekanntlich ist eine unendliche Reihe Σa_ν (C, k) — summierbar zum Werte s, wenn bei festem k die Folge $C_n^{(k)} \to s$ strebt, wobei
$$C_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}},$$
und
$$S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)} = S_n^{(k)}, \quad s_n \equiv S_n^{(0)}$$
ist*). Oder, da
$$\binom{n+k}{k} = \frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+1)}$$
ist, so ist der gesuchte Grenzwert äquivalent für ein festes k dem Grenzwert von
$$\Gamma(k+1)\frac{S_n^{(k)}}{(n+1)^k},$$
so dass wir sagen können:

Die notwendige und hinreichende Bedingung fir die (C, k) — Summierbarkeit einer unendlichen Reihe ist die Existenz des

*) Vgl. [1] Seite 483.

Grenzwertes von $\frac{S_n^{(k)}}{(n+1)^k}$ für ein festes k. Der Wert der Reihe wird dann erhalten durch Multiplication dieses Grenzwertes mit $\Gamma(k+1)$ *). Die Reihe Σa_ν ist also dann und nur dann (C, 1) — summierbar zum Werte s, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}$$

existiert und gleich s ist.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die die Folge (b_ν) erfüllen muss, damit jede (C, l) — summierbare Reihe Σa_ν in die (C, k) — summierbare Reihe $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ überführt wird sind schon bekannt $(0 \leqq k \leqq l)$. Und zwar wurden diese Bedingungen für den Fall $k=l=0$, also für die gewöhnliche Konvergenz, von J. Hadamard [3] gegeben. Für den allgemeinen Fall, d. h. also für die (C, K) — Summierbarkeit der Reihe $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ sind diese Bedingungen zuerst von I. Schur [4] als ein Satz ausgesprochen worden, der dann durch L. S. Bosanquet [5] und K. Knopp [6] bewiesen wurde.

§ 1. Einige Hilfsmittel.

Als Hilfsmittel stellen wir zunächst einige Sätze aus der Theorie der C — Summierbarkeit zusammen. Wenn man mit Schur und Knopp eine Folge (b_ν) vom Typus (C_l, C_k) nennt, die jede (C, l) summierbare Reihe Σa_ν in eine (C, k) summierbare Reihe $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ überführt, so lautet der von Knopp [6] bewiesene Satz wie folgt:

Satz A. Die Faktorenfolge (b_ν) ist dann und nur dann vom Typus (C_l, C_k), $(0 \leqq k \leqq l$, k beliebig reel, l ganz) wenn

$$b_\nu = O\left(\nu^{k-l}\right)$$

und

$$\sum_\nu \nu^l \mid \Delta^{l+1} b_\nu \mid < +\infty$$

ist.

Nun formulieren wir unseren zweiten Hilfssatz. Wir setzen

*) Vgl. [2] Seite 97.

$c_n = na_n$ und bilden $B_n^{(1)} \cdots B_n^{(k)}$ aus c_n, wie $S_n^{(1)} \cdots S_n^{(k)}$ aus a_n. Dann gilt

Satz B). Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die $(C, r+1)$ — Summierbarkeit der Reihe Σa_ν, wo $r+1 > -1$, bestehet darin, dass die Reihe*

$$\Sigma \binom{n+r+1}{r+1}^{-1} \frac{B_n^{(r)}}{n} = \Sigma \frac{(n-1)!}{(r+2)(r+3)\cdots(n+r+1)} B_n^{(r)}$$

konvergiert, oder, was dasselbe ist, dass die Reihe $\Sigma n^{-r-2} B_n^{(r)}$ konvergiert.

Endlich brauchen wir noch den

*Satz C**). Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die $(C, 1)$ — Summierbarkeit der Reihe Σa_ν mit den Teilsummen s_n zur Summe s besteht darin, dass die Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu}$$

konvergiert und dass, wenn mit σ_n und σ die Teilsummen und die Summe dieser Reihe bezeichnet werden, die Beziehung

$$s - s_n = n(\sigma - \sigma_n) + o(1)$$

oder also

$$s_n + (n+1) \cdot \left[\frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+2} + \cdots\right] \to s$$

besteht.

§ 2. Die Sätze.

Nun Beweisen wir den folgenden

Satz 1. Es sei die Reihe Σa_ν gegeben. Wenn der Grenzwert

(1) $$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{0}^{k} s_\nu b_{\nu+1}$$

existiert und die unendliche Reihe

(2) $$\Sigma s_\nu \left(b_\nu - b_{\nu+1}\right)$$

*) Vgl. [7] Seite 122.

**) Vgl. [1] Seite 504.

(C, 1) — *summierbar ist, so ist auch die Reihe* $\Sigma a_\nu b_\nu$ (C, 1) — *summierbar, wobei*

$$s_\nu = a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu \,, \quad s_{-1} = 0$$

gesetzt ist.

B e w e i s. Wir betrachten die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^{k} s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + s_k b_{k+1} \,,$$

die man übrigens aus der Abelschen partiellen Summation mit Rücksicht auf $s_{-1} = 0$ sehr leicht ableiten kann*). Wenn man jetzt die Teilsummen der Reihe $\Sigma a_\nu b_\nu$ mit t_ν bezeichnet, so ist

$$t_0 = a_0 b_0 = s_0 (b_0 - b_1) + s_0 b_1 \,,$$

$$t_1 = \sum_0^1 a_\nu b_\nu = \sum_0^1 s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + s_1 b_2 \,,$$

$$t_2 = \sum_0^2 a_\nu b_\nu = \sum_0^2 s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + s_2 b_3 \,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_k = \sum_0^k a_\nu b_\nu = \sum_0^k s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + s_k b_{k+1} \,.$$

Wenn wir nun diese Gleichungen addieren, durch $k+1$ dividieren und dann für $k \to \infty$ zur Grenze übergehen, erhalten wir

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_0 + t_1 + \cdots t_k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{s_0(b_0 - b_1) + \cdots + \sum\limits_{\nu=0}^{k} s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1})}{k+1}$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_0^k s_\nu b_{\nu+1} \,. \tag{3}$$

Ist jetzt der $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k+1} \sum\limits_0^k s_\nu b_{\nu+1}$ vorhanden und die Reihe $\sum\limits_0^\infty s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1})$ (C, 1) — summierbar, so ist nach (3) auch die Reihe $\Sigma a_\nu b_\nu$ (C, 1) — summierbar. Die Bedingungen des Satzes sind also hinreichend für die (C, 1) — Summierbarkeit der Reihe $\Sigma a_\nu \cdot b_\nu$. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

*) Vgl. z. B. [1] Seite 328.

Nun fassen wir die Menge aller(C, 1)—summierbaren Reihen ins Auge. Diese Menge bezeichen wir mit $\mathfrak{M}$. In dieser Menge gibt es natürlicht auch Reihen mit unbeschränkten Teilsummen, z. B. die gegen $+\infty$ bestimmt divergenten Reihen, die auch (C, 1) — summierbar sind*). Es sei jetzt $\mathfrak{M}_1$ die Untermenge von $\mathfrak{M}$, die nur Reihen enthält, welche (C, 1) — summierbar sind und beschränkte Teilsummen haben. Dann werden die Bedingungen (1) und (2) des Satzes 1 für die (C, 1) — Summierbarkeit der Reihe $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ auch notwendig, wenn die Reihen Σa_ν der Menge $\mathfrak{M}_1$ angehören. Das zeigen wir durch den folgenden

Satz 2. Wenn jede (C, 1) — *summierbare Reihe* Σa_ν *durch die Folge* (b_ν) *in eine* (C, 1) — *summierbare Reihe* $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ *überführt wird, so werden für die der Menge* $\mathfrak{M}_1$ *angehörenden* (C, 1) — *summierbaren Reihen* Σa_ν *die Bedingungen* (1) *und* (2) *des Satzes* 1 *notwendig erfüllt.*

B e w e i s: Es sei $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ (C, 1) — summierbar. Da jetzt die Faktoren b_ν notwendig vom Typus (C_1, C_1) sein müssen, so ist nach dem Satz von Schur — Knopp $b_\nu = O(1)$ und
$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \mid \Delta^2 b_\nu \mid < +\infty\cdot$ Es existiert also $\lim b_n = b$**). Nun betrachten wir von der Menge aller solchen (C, 1) — summierbaren Reihen $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ die Untermange, die von den Reihen der Menge $\mathfrak{M}_1$ und von den selben Faktoren b_ν gebildet wird. Nach Voraussetzung haben die Reihen Σa_ν beschränkte Teilsummen und sind (C, 1) — summierbar. Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{0}^{k} s_\nu = \mathrm{A}(a)\cdot$$

Mit der Bezeichung $\mathrm{A}(a)$ wollen wir andeuten, dass dieser Grenzwert von der Reihe Σa_ν abhängt. Andererseites stehen in der Schema

*) Mit der Summe $+\infty$ natürlich.
**) Vgl. [6] Seite 72.

$$
\begin{array}{lllll}
\frac{s_0}{1} & & & & \\
\frac{s_0}{2} & \frac{s_1}{2} & & & \\
\frac{s_0}{3} & \frac{s_1}{3} & \frac{s_2}{3} & & \\
\frac{s_0}{4} & \frac{s_1}{4} & \frac{s_2}{4} & \frac{s_3}{4} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\frac{s_0}{n+1} & \frac{s_1}{n+1} & \cdots & & \frac{s_n}{n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

a) In jeder Spalte Nullfolgen.

b) Da s_n nach Voraussetzung beschränkt, also für jedes n, $|s_n| < K$ ist, so gibt es eine Konstante (nämlich die Konstante K), so dass die Summe der Beträge der Glieder einer jeden Zeile, also für jedes n die Summe

$$\frac{|s_0|}{n+1} + \frac{|s_1|}{n+1} + \cdots + \frac{|s_n|}{n+1} < K$$

bleibt. Daher existiert nach dem Cauchy—Toeplitzschem Satze der Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} s_\nu \, b_{\nu+1} \, .$$

Nach (3) ist also auch die Reihe $\sum_0^\infty s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1})$ (C, 1)—summierbar, w. z. b. w.

Nun können wir mit Hilfe dieser beiden Sätze den folgenden Satz aussprechen:

Satz 3. Die Reihe Σa_ν habe beschränkte Teilsummen und sei (C, 1)—summierbar. Ist dann die Folge (b_n) monoton und beschränkt, so ist auch die Reihe $\Sigma a_\nu b_\nu$ summierbar.

Denn, die Reihe $\Sigma (b_\nu - b_{\nu+1})$ ist jetzt absolut konvergent, also die Reihe $\Sigma s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1})$ sogar absolut konvergent. Nach den Ausführungen des Satzes 2 ist der

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_0^k s_\nu\, b_{\nu+1}$$

vorhanden. Mit Rücksicht auf Satz 1 folgt die Behauptung.

Auch dieser Satz könnte, wie im § 3 mit einem Beispiel gezeigt wird, bei der Feststellung der (C, 1) — Summierbarkeit der unendlichen Reihen nützlich sein.

Zum Schluss betrachten wir in diesem Paragraph die Reihen der Form Σa_ν und wollen mit Hilfe der Reihen deren (C, 1) — Summierbarkeit schon bekannt sind, die (C, 1) Summierbarkeit der gegebenen Reihe feststellen. Zu diesem Zweck beweisen wir den

Satz 4. Wenn die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{B_\nu^{(m)}}{\nu}$$

für ein endliches ganzes m (C, 1) — summierbar ist, so ist auch die Reihe Σa_ν (C, 1) — summierbar.

B e w e i s. Es ist

$$B_\nu^{(m)} = B_1^{(m-1)} + \cdots + B_\nu^{(m-1)}$$
$$= \frac{B_1^{(m-1)}}{1} + \frac{2B_2^{(m-1)}}{2} + \cdots + \frac{\nu B_\nu^{(m-1)}}{\nu}$$

Es sei jetzt $\sum_1^\infty \frac{B_\nu^{(m)}}{\nu}$ (C, 1) — summierbar. Dann ist nach Satz C in § 1 die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{B_\nu^{(m)}}{\nu \cdot \nu}$$

also auch die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{B_\nu^{(m)}}{\nu(\nu+1)}$$

konvergent*). Daher ist nach Satz B in § 1 die Reihe

*) Denn da

$$\frac{B_\nu^{(m)}}{\nu(\nu+1)} = \frac{B_\nu^{(m)}}{\nu \cdot \nu} \cdot \frac{\nu}{\nu+1}$$

ist und die Reihe $\Sigma(b_\nu - b_{\nu+1})$ mit $b_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}$ absolut konvergiert so ist nach dem Kriterium von Du Bois—Raymond auch die Reihe $\Sigma \frac{B_\nu^{(m)}}{\nu(\nu+1)}$ konvergent. Vgl. auch [8].

(4) $$\sum_1^\infty \frac{B_\nu^{(m-1)}}{\nu}$$

(C, 1) — summierbar. Nun gehen wir einen Schritt weiter: Da die Reihe (4) (C, 1) — summierbar ist, so ist nach Satz C die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{B_\nu^{(m-1)}}{\nu \cdot \nu}$$

also auch die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{B_\nu^{(m-1)}}{\nu \cdot (\nu+1)}$$

konvergent. Es ist aber

$$B_\nu^{(m-1)} = B_1^{(m-2)} + \cdots + B_\nu^{(m-2)}$$
$$= \frac{B_1^{(m-2)}}{1} + \frac{2\,B_2^{(m-2)}}{2} + \cdots + \frac{\nu B_\nu^{(m-2)}}{\nu}$$

Also ist die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{B_\nu^{(m-2)}}{\nu}$$

(C, 1) — summierbar. So fahren wir fort. Schliesslich erhalten wir, dass die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{B_\nu}{\nu}$$

(C, 1) — summierbar ist. Dann ist nach Satz C

$$\sum_1^\infty \frac{B_\nu}{\nu \cdot \nu}$$

also auch die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{B_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)}$$

konvergent. Daher ist nach Satz B die Reihe

$$\sum a_\nu$$

(C, 1) — summierbar.

§3. Anwendung

Wir betrachten die Reihe

$$\Sigma a_\nu\, b_\nu = \sum_1^\infty (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{2\nu-1}{\nu}$$

$$\equiv 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{3} - \frac{7}{4} + \frac{9}{5} - \frac{11}{6} + - \cdots \tag{5}$$

Diese Reihe ist sicher divergent, da das allgemeine Glied nicht gegen Null strebt. Um zu zeigen dass sie (C, 1) — summierbar ist, wenden wir zunächst den Satz 3 an. Hier ist

$$\Sigma a_\nu = \sum_1^\infty (-1)^{\nu-1}, \qquad b_\nu = \frac{2\nu-1}{\nu}.$$

Da die Reihe Σa_ν (C, 1) summierbar ist und beschränkte Teilsummen hat, und die b_ν monoton und beschränkt sind, so ist nach Satz 3 auch die Reihe (5) (C, 1) — summierbar.

Auf das selbe Beispiel wollen wir endlich den Satz 3 anwenden. Wir betrachten also wieder die Reihe

$$\Sigma a_\nu \equiv 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{3} - \frac{7}{4} + - \cdots (-1)^{\nu-1} \frac{2\nu-1}{\nu} + \cdots \tag{5}$$

Hier ist

$$B_1 = 1,$$

$$B_2 = 1 - 2 \cdot \frac{3}{2} = -2,$$

$$B_3 = 1 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{5}{3} = 3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \nu \cdot$$

Die Reihe $\sum \frac{B_\nu^{(1)}}{\nu} \equiv 1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots$ ist aber (C, 1)—summierbar. Nach Satz 4 ist also auch die Reihe (5) (C, 1) — summierbar.

Literatur

[1] K. Knopp. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin 1931.
[2] E. Borel. Leçons sur les séries diveregentes. Paris 1928.
[3] J. Hadamard. Deux théorèmes d'Abel sur la convergence des séries. Acta Mathematica 27 (1903), 177 — 183.
[4] I. Schur. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 151 (1921), 79 — 111
[5] L. S. Bosanquet. Note on convergence and summability factors. The journal of the London mathematical society 20 (1945), 39 — 48.
[6] K. Knopp. Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C — Summierbarkeit aufgestellten Satzes. Journal für die reine und angewandte Mathematik 187 (1950), 70 — 74.
[7] G. H. Hardy. Divergent series. Oxford 1949.

(Eingegangen am 12.10.1953)