# Sur les Fonctions de Bloch de la première et de la seconde espèce

par Cengiz ULUÇAY

*(Institut de Mathématiques de l'Université d'Ankara)*

**Özet:** Birinci ve İkinci nevi Bloch Fonksiyonları hakkında. Birinci ve İkinci nevi Bloch Fonksiyonları ilk defa olarak R. M. Robinson tarafından [1] tarif edilmiştir. Bu fonksiyonlar hakkında Teorem 1 [1] i ispat etmiştir. İspatsız olarak ta burada (§ 3) ispatını vermiş olduğumuz neticeyi söylemiştir. § 4 te Teorem 1 [1] hakkında bir incelemede bulunuyoruz.

**Résumé:** Les Fonctions de Bloch de la première et de la seconde espèce ont été introduites par R. M. Robinson [1] qui a établi à leur sujet le Théorème 1 [1]. Il a annoncé le résultat (§ 3 de cette note) que nous nous proposons de démontrer. Nous terminons la note avec une Remarque sur le Théorème 1 [1] (§ 4 de cette note).

1. Soit $f(z) = z + \cdots$ une fonction de Bloch de la première espèce donnant la représentation conforme du cercle unité K: $|z| < 1$ sur une surface de Riemann R. Le Théorème 1 [1] montre que la frontière de R ne peut contenir d'arc analytique (voir cependant la remarque du § 4).

D'un autre côté la frontière de R ne peut contenir d'arc qui n'est pas suffisamment régulier de façon à permettre à un cercle $\mathfrak{B}$ de rouler le long de l'arc à l'intérieur de R. Car dans ce cas il y'aurait un point P sur cet arc et un voisinage $N_i$ de P dans R qui n'est pas coupé par un cercle $\mathfrak{B}$. On peut alors prolonger R au delà de P comme suit.

Traçons un cercle $\gamma$ de centre P tel qu'une partie de ce cercle soit $N_i$. La frontière de $N_i$ sera donc formée par l'arc de cercle $A_0MB_0$ et par une partie de la frontière de R. Une des branches de la fonction inverse est analytique dans $N_i$. Nous allons construire une Surface de Riemann $R^* \supset R$ qui sera la Surface R prolongée au delà du feuillet contenant $N_i$.

La fonction $f(z)$ représente $R - \overline{N}_i = R_1$ conformément sur une partie $(z')$ du cercle unité K. En représentant conformément

$(z')$ sur K au moyen de la fonction $z' = \varphi(z)$, $0 = \varphi(0)$, on obtiendra la fonction $f(\varphi(z)) = f_1(z)$ subordonnée à $f(z)$ et donnant la représentation conforme de $|z| < 1$ sur $R_1$. Il éxiste sur $|z| = 1$ un arc fermé amb qui est l'image de l'arc fermé $AMB \subset A_0MB_0$ et à travers lequel $f_1(z)$ peut être continuée analytiquement dans la région $\varepsilon$ déterminée par le cercle passant par $a, b$ et orthogonal à $|z| = 1$. À l'arc de cercle extérieur à $|z| = 1$ correspondra un arc analytique passant par A, B et que l'on pourra supposer confondu avec un arc de cercle, $AM'_1B$ orthogonal à AMB en choisissant $\gamma$ suffisamment petit. Autrement dit nous appliquons le principe de symétrie de Schwarz à un petit domaine circulaire de K. Désignons par $R'_2$ la surface de Riemann ainsi obtenue à savoir la surface de Riemann obtenue de $R_1$ en remplaçant AMB par $AM'_1B$. $f_1(z)$ représente $K + \varepsilon$ conformément sur $R'_2$. En représentant conformément $K + \varepsilon$ sur le cercle unité K on obtiendra la fonction $f'_2(z)$ qui représente conformément K sur $R'_2$. À la limite, c'est à dire lorsque $AMB \rightarrow A_0MB_0$ on aura simultanément $AM'_1B \rightarrow A_0M_1B_0$, $f'_2(z) \rightarrow f_2(z)$, $R'_2 \rightarrow R_2$ où $A_0M_1B_0$ est l'arc de cercle orthogonal à $A_0MB_0$ et $R_2$ est la surface de Riemann obtenue de $R_1$ en remplaçant $A_0MB_0$ par $A_0M_1B_0$. Il existe sur $|z| = 1$ un arc de cercle $a_1m_1b_1$ qui est l'image de l'arc fermé $A_1M_1B_1 \subset A_0M_1B_0$. En répétant le raisonnement ci-dessus on obtiendra après passage à la limite, lorsque $A_1M_1B_1 \rightarrow A_0M_1B_0$ la fonction finale $f^*(z) = \alpha z + \cdots$ qui représente conformément K sur $R^* = R + N_e$ où $N_e = \gamma - \overline{N}_i$. Or la fonction $f^*(z)$ est superordonnée à $f(z)$. Donc $|\alpha| > 1$. D'un autre côté on n'a pas changé ni la grandeur ni la position des cercles $\mathfrak{B}$. Ce qui démontre la proposition par l'absurde.

Il ne nous reste plus qu'à considérer le cas intermédiaire, en fait il s'agit de faire voir que la frontière de R ne peut pas non plus contenir d'arc de frontière admissible (pour les termes qui ne sont pas définis dans cette note se rapporter à ma première note publiée dans les communications de l'Université d'Ankara).

Pour ce cas on pourrait être tenté à appliquer la méthode ci-dessus. Mais alors finalement on doit introduire une coupure de manière à ce que le rayon des cercles contenus dans R ne dépasse pas $\mathfrak{B}$ sans cesser de garantir cependant que la fonction finale soit superordonnée à $f(z)$. Il semble douteux de satisfaire à la fois à ces deux conditions, car en général la coupure pénétrera dans R ce qui empêchera de satisfaire en général à la dernière condition.

Le succès de la méthode pour le cas précédent était du à ce qu' on n'avait pas à se préoccuper de ces deux conditions.

2. Rappelons tout d'abord les deux lemmes de R M. Robinson.

Lemme 1. Le rayon intérieur par rapport à l'origine, de la région déduite de $|u| < 1$ en supprimant les points $r \leqq u < 1$, $0 < r \leqq 1$, d'un segment I, est

$$p = \frac{4r}{(1+r)^2}$$

Lemme 2. Le rayon intérieur, par rapport à l'origine, de la région $R(\theta)$ déduite du cercle unité en ajoutant l'intérieur du cercle passant par les points $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ et orthogonal au cercle unité est

$$q = \frac{3\sin(2\theta/3)}{2\sin\theta}$$

Rappelons enfin le résultat suivant de Julia-Carathéodory [2]

Lemme 3. Soit $f(z)$ la fonction qui donne la représentation conforme de $|z| < 1$ sur une région R. Soit P un point de la frontière par lequel peuvent passer deux cercles tels que l'un des deux cercles soit situé complètement à l'intérieur de R et l'autre complètement à l'extérieur. Dans ces conditions il éxiste un point A sur $|z| = 1$, tel que, si $z$ est un point quelconque à l'intérieur d'un triangle ABC lui-même à l'intérieur du cercle unité et tendant vers A, le point correspondant $f(z)$ dans R tendra vers P, en plus de cela $f'(z)$ aura pour limite une valeur unique, finie et différente de zéro. On dira encore que la représentation est conforme en ces points frontières.

3. Soit $f(z) = z + \cdots$ une fonction de Bloch de la première espèce donnant la représentation conforme de $|z| < 1$ sur une surface de Riemann R. Soit $\gamma$ un arc de frontière admissible et P un point choisi sur $\gamma$ tel que les conditions du Lemme 3 soient satisfaites. Il éxiste alors un point A sur $|z| = 1$ tel que, à un petit segment de droite I de longueur $2\varepsilon > 0$ intérieur et orthogonal au cercle unité et se terminant en A, correspond

dans R un petit arc analytique, qui pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit peut être confondu avec un petit segment de droite J se terminant en P. Enfin une rotation du cercle unité autour de son centre amène A au point $z = 1$ sans changer la valeur absolue du coéfficient de $z$ dans le développement de $f(z)$.

Le Lemme 1 montre que le cercle $|x| < 1$ peut être représenté sur la région déduite de $|z| < 1$ en supprimant les points $r \leq z < 1$, au moyen d'une transformation de la forme

$$z = px + \ldots = (1 - \varepsilon^2) x + \ldots \quad .$$

Donc la transformation

$$g_1(x) = (1 - \varepsilon^2) x + \ldots$$

représente $|x| < 1$ sur la région R′ dèduite de R après avoir supprimés les points de J. J est maintenant l'image d'un arc de cercle unité lelong duquel $g_1(x)$ est holomorphe et $g'_1(x) \neq 0$. Supposons pour fixer les idées que $g_1(x)$ est holomorphe dans le voisinage du point $x = 1$. Soit $g_1(1)$ sur J, l'image du point $x = 1$. Pour $\theta_1$ suffisamment petit, l'image du demi cercle $(D_x)$ orthogonal à $|x| = 1$, centré sur l'axe réel, vu de $x = 0$ sous l'angle $2\theta_1$ et à l'extérieur du cercle unité, peut être confondue avec un demi cercle $(D_w)_1$ centré sur J au point $g_1(1)$ et complètement intérieur à R.

Comme R se trouve des deux côtés de J au voisinage de $g_1(1)$, la région $R(\theta_1)$ du Lemme 2 sera représentée par $g_1(x)$ sur une région $R_1$ qui se recouvrira une fois de plus au voisinage de $g_1(1)$ après avoir ajouté à R′ la région $(D_w)_1$. Soient $2e$ le diamètre de $(D_w)_1$, auquel correspond sur I un segment de longueur $2\varepsilon_1 = 2k\varepsilon$, $0 < k < 1$, et $z_0$ l'image de $g_1(1)$.

On a

$$e = \varepsilon_1 \, | f'(z_0) | \,, \quad \theta_1 = e / | g'_1(1) | \,, \quad \theta_1 = k\varepsilon \, | f'(z_0) | \, / \, | g'_1(1) |$$

Le Lemme 2 montre qu'il $y$ a une fonction de la forme

$$x = q_1 y + \ldots$$

où

$$q_1 = \frac{3 \sin 2\theta_1/3}{2 \sin \theta_1} = 1 + \frac{5\theta^2_1}{54}$$

est plus grand que 1, de sorte que la fonction

$$g_2(y) = pq_1 y + \ldots$$

représente conformément $|y| < 1$ sur $R_1$. La fonction $g_2(y)$ est maintenant holomorphe au voisinage d'un certain point $|y| = 1$, que nous pouvons prendre $y = 1$. On choisira $\theta_2$ de telle façon que l'image de $(D_y)$ pourra être confondue avec la région $(D_w)_2$ d'un petit cercle orthogonal à $(D_w)_1$ et que

$$e = | g'_2(1) | \theta_2$$

Au bout de $n$ opérations on obtiendra la fonction

$$w = ((1-\varepsilon^2)\prod_{i=1}^{i=n}(1+\frac{5k^2}{54}\cdot\frac{|f'(z_0)|}{|g'_i(1)|^2}\cdot\varepsilon^2))\,\xi + \ldots$$

qui représente conformément $|\xi| < 1$ sur une région $R_n$ obtenue à partir de R en coupant un feuillet de R suivant le segment J et en ajoutant une petite région schématisée comme suit. On imaginera le feuillet en question comme constitué d'une substance élastique. On allongera l'une des deux parties du feuillet au voisinage de $g_1(1)$ en tirant sur l'un des bords de J de manière à couvrir l'autre partie du feuillet dans le voisinage de $g_1(1)$ sur une étendue précisée comme suit.

Lorsque $\varepsilon$ est très petit la parenthèse dans le produit peut être en vertue de la dernière partie du Lemme 3 remplacée par

$$1 + 5k^2\varepsilon^2/54$$

pour chaque $i$ de sorte que l'on pourra ecrire

$$w = (1-\varepsilon^2)(1 + 5nk^2\varepsilon^2/54)\,\xi + \ldots$$

On voit que le rayon intérieur par rapport à l'origine de $R_n$ sera plus grand que 1 si le coéfficient de $\xi$ est plus grand que 1. Ce qui éxige

$$n > 54/5k^2$$

En prenant $k$ assez voisin de 1 on aura $n = 11$.

Donc $R_{11}$ doit contenir des cercles de rayon plus grand que $\mathfrak{B}$. D'un autre côté le changement de R en $R_{11}$ ne peut augmenter le rayon des cercles contenus dans R lorsque les quantités $\varepsilon$ et $\theta$ sont choisies suffisamment petites. Le Théorème en question se trouve ainsi démontré par l'absurde.

Comme la méthode précédente s'applique également pour les fonctions de Bloch de la seconde espèce on peut énoncer le résultat général suivant.

**Théorème.** Toute fonction de Bloch de la première ou de la seconde espèce représente le cercle unité sur une surface ouverte de Riemann sans frontière.

4. REMARQUE. Il est clair que notre démonstration est valable indépendamment du Théorème 1 de R. M. Robinson. A. savoir, elle est valable pour tous les arcs $\gamma$ suffisamment réguliers, analytiques ou non. A titre d'exemple considérons le cas où R pourrait avoir des points frontières qui ne sont pas accessibles par l'extérieur. La fonction considérée par nous[3] est un exemple de ce genre.

Désignons encore par $\gamma$ l'arc de frontière analitique en question. $\gamma$ est tel qu'il ya des points de R de chaque côté de $\gamma$ dans le voisinage de tout point de $\gamma$. Soit P un point sur $\gamma$ tel que les points d'une coupure J se terminant en P et orthogonale à $\gamma$ sont tous des points intérieurs. En choisissant J suffisamment petite le raisonnement et par conséquent la formule du § 3 s'applique.

Ainsi le théorème de R. M. Robinson se trouve inclus dans le résultat général du § 3.

## Littérature

[1] R. M. Robinson, Bloch functions, Duke Math. Journal. vol. 2, 1936.

[2] C. Carathéodory, Conformal representation, Cambridge University Press, reprinted 1941; p. 57 et p. 96

C. Uluçay, Konform Tasvir, Publications de L'Université d'Ankara, à paraitre.

[3] C. Uluçay, On the value of the Bloch-Landau Constants $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$. Bulletin of the Amer. Math. Soc. vol. 54, N. 9, 395t. 1948.

*(Manuscrit reçu le 8.2.1954)*