COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Tome IV

(Série A — Fasc. 2)

İSTANBUL

ŞİRKETİ MÜRETTİBİYE BASIMEVİ

1952

COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A : Mathématiques-Physique

Tome IV, Fasc. 2 1952

Über die Zerlegung des Hilbertschen Raumes durch vollstetige lineare Transformationen allgemeinster Art.

von

Berki YURTSEVER

(Mathematisches Institut der naturwissenschaflichen Fakultät in Ankara)

Özet : C, çok katlı eigen değerlere fakat basit elemanter bölenlere malik total sürekli bir lineer transformasyon, C nin λ_ν eigen değerlerine tekabül eden asli varyete $\mathfrak{P}_\nu$, C^* ın $\bar{\lambda}_\nu$ eigen değerlerine tekabül eden asli varyete $\mathfrak{P}^*_\nu$ olsun.

$$\mathfrak{S} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu \oplus$$

$$\mathfrak{S}^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}^*_\nu \oplus$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{S}^{*\perp} \qquad \mathfrak{N}^* = \mathfrak{S}^{\perp}$$

diyelim. Şu teoremler ispat edilmektedir :

Teorem 1. $C(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{N}$, $C^*(\mathfrak{N}^*) \subseteq \mathfrak{N}^*$ dir. Bundan daşka C transformasyonu $\mathfrak{N}$ de ve C^* transformasyonu da $\mathfrak{N}^*$ da quasinilpotenttir.

Eğer $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = 0$, $\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{S}^* = 0$ ise

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{S}^*)^{\perp} = \mathfrak{N}^{*\perp} \oplus \mathfrak{S}^{*\perp} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{N}$$

ve

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S})^{\perp} = \mathfrak{N}^{\perp} \oplus \mathfrak{S}^{\perp} = \mathfrak{S}^* \oplus \mathfrak{N}^*$$

dir. Demek ki Hilbert uzayının $\mathfrak{N}$ ve $\mathfrak{S}$ gibi, ortak elemanları olmıyan iki alt uzaya ayrılması için gerek ve yeter şart, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = 0$ olmasıdır. $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = 0$ olması için gerek ve yeter şart da şu teoremden elde edilmektedir:

Teorem 2. $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = 0$ olması için gerek ve yeter şart, $\left[\varphi_\nu^{ik}\right]$ sisteminin $\mathfrak{S}$ deki $\left[\psi_\nu'^{\alpha\beta}\right]$ biortogonal mütemmiminin, tıbkı $\left[\varphi_\nu^{ik}\right]$ sistemi gibi aynı $\mathfrak{S}$ alt uzayını germesidir.

Burada $\left[\varphi_\nu^{ik}\right]$, $\mathfrak{P}_\nu$ esas varyetesinin bir bazıdır ve $\left[\varphi_\nu^{ik}\right]$ nın $\mathfrak{S}$ deki

$[\psi'^{\alpha\beta}_{\nu}]$ biortogonal mütemmimi de şu iki şartla tesbit edilmiş bulunmaktadır :

$$\psi'^{\alpha\beta}_{\nu} \in \mathfrak{S}, \qquad (\varphi^{ik}_{\nu}, \psi'^{\alpha\beta}_{\nu}) = \delta_{ik,\alpha\beta}.$$

Bundan sonra şu son teorem ispat edilmektedir :

Teorem 3. $\omega_{\nu\mu} \neq 0$ eigen değerleri sonlu merteben olan ve basit elemanter bölenleri bulunan total sürekli bir lineer transformasyon daima öyle tarif edilebilir ki, her $x \in \mathfrak{H}$ için şu şartlar sağlanır :

$$B(\mathfrak{R}) = 0, \quad BCx = CBx.$$

Einleitung.

Wir benutzen die in Untersuchungen über lineare Transformationen in Hilbert-Raum üblichen Bezeichnungen*). Verstehen wir unter $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ lineare Mannigfaltigkeiten im Hilbertschen Raume $\mathfrak{H}$, so schreiben wir $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ für den Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$,

$\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ für die kleinste lineare Mannigfaltigkeit, die sowohl $\mathfrak{A}$ als auch $\mathfrak{B}$ enthält,

$\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ für die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$.

Ist $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, so bezeichne $\mathfrak{A} \ominus \mathfrak{B}$ die Menge aller Elemente von $\mathfrak{A}$, die auf sämtlichen Elemente von $\mathfrak{B}$ senkrecht stehen. Für $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{B}$ schreiben wir kurz $\mathfrak{B}^{\perp}$.

Eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit nennen wir auch einen Unterraum von $\mathfrak{H}$. Mit O bezeichnen wir den Unterraum, der nur das Nullelement enthält.

Ist A eine beschränkte lineare Transformation in $\mathfrak{H}$, so bezeichne A^* die zu A adjungierte lineare Transformation, $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{R}^*$ die Wertebereiche von A bzw. A^*. Ferner schreiben wir $A_\lambda = A - \lambda I$, $A^*_\lambda = A^* - \lambda I$ wobei unter I die identische Transformation verstanden sein soll.

Es sei jetzt C eine vollstetige lineare Transformation in $\mathfrak{H}$. In seiner unter [1] im Literaturverzeichnis zitierten Arbeit betrachtet Herr Hamburger Trasformationen C, deren Eigenwerte, soweit sie von 0 verschieden sind, sämtlich einfach sind und beweist für sie die folgenden Sätze**):

*) Vgl. M. H. Stone [4], H. L. Hamburger [1].
**) [1] S. 58-59.

Satz 1. Es bezeichne φ_ν das zum einfachen Eigenwert $\lambda_\nu \neq 0$ gehörige Eigenelement von C, ψ_ν das zum Eigenwert $\bar{\lambda}_\nu$ gehörige Eigenelement der adjungierten Transformation C^*. Unter $\mathfrak{S}$ bzw $\mathfrak{S}^*$ verstehe man die von den Systemen $[\varphi_\nu]$ bzw. $[\psi_\nu]$ aufgespannten Unterräume. Ferner setze man $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}^{*\perp}$, $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{S}^\perp$.

Dann ist $C(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{S}$, $C(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{N}$.

Offenbar ist $\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{S} = \mathfrak{H}$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{S}^* = 0$. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = 0$ werden in Satz 2 angegeben.

Satz 2. Es ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = 0$ dann und nur dann, wenn das biorthogonale Komplement des Systems $[\varphi_\nu]$ in $\mathfrak{S}$ den Unterraum $\mathfrak{S}$ aufspannt.

Dabei werde unter dem biorthogonalen Komplement des Systems $[\varphi_\nu]$ in $\mathfrak{S}$ ein System $[\psi'_\nu]$ verstanden, welches durch die Bedingungen

$$\text{(I)} \quad \psi'_\nu \in \mathfrak{S}, \qquad \text{(II)} \quad (\varphi_\nu, \psi'_\mu) = \delta_{\nu\mu}$$

eindeutig bestimmt ist.

Nach dem Fall $\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{S}^* = 0$ verdient der Fall $C^*(\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{S}^*) = 0$ besonderes Interesse, da aus $C^*(\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{S}^*) = 0$ folgt dass $C(\mathfrak{H}) = \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{N}^* \oplus \mathfrak{S}^*$ ist. Mit diesem Fall beschäftigt sich der in [1] mit Satz 4, hier mit Satz 3 bezeichnete

Satz 3. Zu jedem C lässt sich immer eine vollstetige Transformation B bestimmen derart das

$$B(\mathfrak{N}) = 0, \quad BCx = CBx \quad \textit{für jedes} \quad x \in \mathfrak{H}.$$

In der vorliegenden Note wird gezeigt, dass wenn die Definitionen der Unterräume $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^*$ sinngemäs verallgemeinert werden, diese drei Sätze auch noch für die allgemeinsten vollstetigen linearen Transformationen C in $\mathfrak{H}$ gelten, d.h. auch für Transformationen C mit mehrfachen Eigenwerten und nicht-einfachen Elementarteilern*). Diese Verallgemeinerung gelingt auf

*) Diese Untersuchung wurde auf Anregung von Herrn Hamburger vorgenommen, dessen fördernde Ratschläge dem Verfasser auch weiterhin eine wertvolle Hilfe waren. Verfasser spricht Herrn Hamburger dafür seinen Dank aus.

Grund der schönen Sätze, die Herr Friedrich Riesz in einer berühmten Arbeit [3] bewiesen hat. Soweit wir diese Sätze im folgenden benutzen, sind sie im § 1 dieser Note zusammengestellt. In § 2 erinnern wir an die wesentlichen Eigenschaften der Weyr'schen kanonischen Basen $[\varphi_\nu^{\mu\varkappa}]$ der zu den Eigenwerten λ_ν gehörigen «Hauptmannigfaltigkeiten $\mathfrak{P}_\nu$» (siehe die Definition von $\mathfrak{P}_\nu$ in § 1. S. 5).

Die verallgemeinerten Sätze 1 und 2 werden nunmehr in § 4 bewiesen; hierbei ergibt sich

$$\mathfrak{S} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu \oplus , \qquad \mathfrak{S}^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu^* \oplus$$

unter $\mathfrak{P}_\nu^*$ die zum Eigenwerte $\bar{\lambda}_\nu$ gehörige Hauptmannigfaltigkeit von C^* verstanden.

Die Existenz der vollstetigen Transformation B aus Satz wird in § 5 bewiesen. Die Konstruktion von B erfordert die Konstruktion des biorthogonalen Komplements $[\psi_\nu^{\mu\varkappa}]$ in $\mathfrak{S}^*$ der kanonischen Basis $[\varphi_\nu^{\mu\varkappa}]$, welche bereits in § 3 beschrieben wird.

§ 1. Die Sätze von F. Riesz über vollstetige Transformationen. Es sei eine vollstetige lineare Transformation C allgemeinster Art in $\mathfrak{H}$ vorgelegt, d.h. es seien auch mehrfache eigenwerte von C mit nichteinfachen Elementarteilern zugelassen. C^* sei die zu C adjungierte lineare Transformation. Die Eigenwerte von C seien λ_ν, $(\nu = 1, 2, \cdots)$. Dann sind die Eigenwerte von C^* gleich den konjugiert komplexen Zahlen $\bar{\lambda}_\nu$. F. Riesz hat in einer grundlegenden Arbeit*) bewiesen:

*) Vgl. [3]. Da die Transformation C als vollstetig vorausgesetzt wird, so hat die Transformation $C_{\lambda_\nu} = C - \lambda_\nu I = -\lambda_\nu \left(I - \frac{1}{\lambda_\nu} C\right)$ offenbar dieselben Eigenschaften wie die dortige Transformation $B = I - A$, unter A eine vollstetige Transformation verstanden (Seite 79). Als Nullmannigfaltigkeit von $(C_{\lambda_\nu})^m$ für $m \geq j_\nu$ ist ausserdem $\mathfrak{P}_\nu$ von endlicher Dimensionszahl (Seite 80, Satz 1'). Die Existenz von $\mathfrak{P}_\nu$ als Hauptmannigfaltigkeit mit dem sie bestimmenden Exponenten j_ν ist durch die Sätze 6 (Seite 85) und 2 (Seite 81) gesichert.

Erstens **die Existenz einer Zahl** j_ν *mit der Eigenschaft, dass für* $m \geqq j_\nu$ *jede Lösung der Cleichung*

$$(C_{\lambda_\nu})^m \varphi = 0, \qquad (\varphi \in \mathfrak{H})$$

bereits die Gleichung

$$(C_{\lambda_\nu})^{j_\nu} \varphi = 0$$

befriedigt, während für $m < j_\nu$ *die Gleichung*

$$(C_{\lambda_\nu})^{m+1} \varphi = 0$$

auch Lösungen besitzt, welche die Gleichung

$$(C_{\lambda_\nu})^m \varphi = 0$$

nicht befriedigen.

Zweitens zeigt F. Riesz l.c. dass **die Lösungen der Gleichung**

$$(C_{\lambda_\nu})^m \varphi = 0$$

für jedes m, also insbesondere auch für $m = j_\nu$ *eine lineare Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionszahl bilden.*

Wir nennen die Mannigfaltigkeit aller Lösungen von

$$(C_{\lambda_\nu})^{j_\nu} \varphi = 0$$

die zum Eigenwerte λ_ν **gehörige Hauptmannigfaltigkeit der Transformation** C und bezeichnen sie mit $\mathfrak{P}_\nu$; die Dimensionszahl k_ν von $\mathfrak{P}_\nu$ nennen wir **die Vielfachheit des Eigenwertes** λ_ν und die Zahl j_ν den zu λ_ν gehörigen **Index der Transformation** *). C_{λ_ν} ist somit nilpotent vom Index j_ν in $\mathfrak{P}_\nu$.

Drittens, **sei** $\mathfrak{R}_\nu$ **der Wertebereich von** $(C_{\lambda_\nu})^{j_\nu}$ **in** $\mathfrak{H}$, *d.h.*

$$\mathfrak{R}_\nu = (C_{\lambda_\nu})^{j_\nu} (\mathfrak{H}),$$

*dann ist***)

$$\mathfrak{P}_\nu \dot{+} \mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{H}.$$

Setzen wir nunmehr

*) Vgl. [2] S. 97-99.
**) [3] Satz 8, S. 87. Vgl. auch [2] S. 100-101.

$$\mathfrak{P}_\nu^* = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{R}_\nu^\perp$$
$$\mathfrak{R}_\nu^* = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{P}_\nu^\perp$$

so ist nach bekannten Sätzen $\mathfrak{P}_\nu^*$ die Nullmannigfaltigkeit von $(C^*_{\bar{\lambda}_\nu})^m$ für $m \geqq j_\nu$, mithin die zum Eigenwerte $\bar{\lambda}_\nu$ gehörige Hauptmannigfaltigkeit von C^*, während

(1) $$\mathfrak{R}_\nu^* = (C^*_{\bar{\lambda}_\nu})^m (\mathfrak{H}) \qquad (m \geqq j_\nu)$$

d.h. gleich dem Wertebereich von $(C^*_{\bar{\lambda}_\nu})^m$ für $m \geqq j_\nu$ wird. Ausserdem folgt aus

$$\mathfrak{R}_\nu \dot{+} \mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{R}_\nu^* \dot{+} \mathfrak{P}_\nu^* = \mathfrak{H},$$

dass zu $\mathfrak{P}_\nu$ und $\mathfrak{P}_\nu^*$ die gleiche Dimensionszahl k_ν gehört.

Es sei endlich Q_ν der Projektor, der $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{P}_\nu$ abbildet und in $\mathfrak{R}_\nu$ verschwindet, d.h. es sei

$$Q_\nu(\mathfrak{H}) = \mathfrak{P}_\nu$$
$$Q_\nu(\mathfrak{R}_\nu) = 0.$$

Da Q_ν^* die zu Q_ν adjungierte lineare Transformation ist, so ist Q_ν^* der Projektor von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{R}_\nu^\perp = \mathfrak{P}_\nu^*$ der in $\mathfrak{P}_\nu^\perp = \mathfrak{R}_\nu^*$ verschwindet, sodass olso

(2) $$Q_\nu^*(\mathfrak{H}) = \mathfrak{P}_\nu^*, \quad Q_\nu^*(\mathfrak{R}_\nu^*) = 0.$$

§ 2. Die kanonische Basis der Hauptmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_\nu$. Wir betrachten jetzt C_{λ_ν} als nilpotente Transformation in $\mathfrak{P}_\nu$. Da $\mathfrak{P}_\nu$ von endlicher Dimensionszahl ist, kann C_{λ_ν} bezüglich $\mathfrak{P}_\nu$ als eine lineare Transformation der Ordnung k_ν angesehen werden, und wir können daher auf die gewöhnliche Theorie der Elementarteiler nilpotenter Transformationen endlicher Ordnung zurückgreifen. Es sei $(j_{\nu 1}, j_{\nu 2}, \cdots, j_{\nu s_\nu})$ die Segre Charakteristik von C_{λ_ν} bezüglich $\mathfrak{P}_\nu$, sodass also

$$\sum_{\mu=1}^{s_\nu} j^{\nu\mu} = k_\nu$$

ist. Nach bekannten Sätzen hat dann die lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_\nu$ eine Basis $[\varphi_\nu^{\mu\varkappa}]$, $(1 \leq \mu \leq s_\nu, 1 \leq \varkappa \leq j_{\nu\mu})$ mit der Eigenschaft

$$(3) \qquad \begin{cases} C_{\lambda_\nu} \varphi_\nu^{\mu\varkappa} = \varphi_\nu^{\mu,\varkappa-1} & (1 \leq \mu \leq s_\nu, 2 \leq \varkappa \leq j_{\nu\mu}) \\ C_{\lambda_\nu} \varphi_\nu^{\mu 1} = 0, & (1 \leq \mu \leq s_\nu). \end{cases}$$

Eine solche Basis nennt man nach Ed. Weyr **kanonische Basis***). Sie kann auf unendlich viele Weise bestimmt werden.

§ 3. **Konstruktion des zum System $[\varphi_\nu^{\mu\varkappa}]$ gehörigen biorthogonalen Komplements.** Wir verstehen unter dem biorthogonalen Komplement $\chi_\nu^{\alpha\beta}$ der $\varphi_\nu^{\mu\iota}$ in $\mathfrak{P}_\nu$ ein System von k_ν Vektoren derart dass

$$(4) \qquad \chi_\nu^{\alpha\beta} \in \mathfrak{P}_\nu, \quad (\varphi_\nu^{\mu\varkappa}, \chi_\nu^{\alpha\beta}) = \delta_{\mu\varkappa,\alpha\beta} \qquad \begin{cases} 1 \leq \alpha \leq s_\nu \\ 1 \leq \mu \leq s_\nu \\ 1 \leq \varkappa \leq j_{\nu\mu} \\ 1 \leq \beta \leq j_{\nu\alpha} \end{cases}$$

Da $\mathfrak{P}_\nu$ von der Dimensionszahl k_ν ist und die $[\varphi_\nu^{\mu\varkappa}]$ bei festem ν ein System von k_ν linear unabhängigen Vektoren bilden, ist es offensichtlich dass das biorthogonale Komplement in $\mathfrak{P}_\nu$ durch (4) eindeutig bestimmt ist.

Nunmehr nehmen wir den Projektor Q_ν nach $\mathfrak{P}_\nu$ der in $\mathfrak{R}_\nu$ verschwindet. Dann erhält man

$$(5) \qquad \begin{aligned} (\varphi_\nu^{\iota\varkappa}, \chi_\nu^{\alpha\beta}) &= (Q_\nu \varphi_\nu^{\iota\varkappa}, \chi_\nu^{\alpha\beta}) \\ &= (\varphi_\nu^{\iota\varkappa}, Q_\nu^* \chi_\nu^{\alpha\beta}) = \delta_{\iota\varkappa,\alpha\beta}. \end{aligned}$$

*) Vgl. [5] S. 190-196. Führt man die zu einer nilpotenter linearen Transformation gehörige kanonische Basis als Koordinatensystem ein, so nimmt die nilpotente Transformation Jordans kanonische Form an. Die Konstruktion einer kanonischen Basis ist in [5] l.c. angegeben. Vgl. auch [2] Seite 117-122.

Setzt man jetzt

$$Q_\nu^* \chi_\nu^{\alpha\beta} = \psi_\nu^{\alpha\beta},$$

so folgt aus (2) und (5)

$$(6) \qquad \begin{aligned} \psi_\nu^{\alpha\beta} &\in \mathfrak{N}_\nu^\perp = \mathfrak{P}_\nu^* \\ (\varphi_\nu^{\iota\varkappa}, \psi_\nu^{\alpha\beta}) &= \delta_{\iota\varkappa,\,\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Da, wie man sich leicht überzeugt, die $\psi_\nu^{\alpha\beta}$ für $1 \leqq \alpha \leqq s_\nu$, $1 \leqq \beta \leqq j_{\nu\alpha}$ linear unabhängig sind, ferner ihre Anzahl gleich $\sum\limits_{\alpha=1}^{s_\nu} j_{\nu\alpha} = k_\nu$, d. h. gleich der Dimensionszahl von $\mathfrak{P}_\nu^*$ ist, so bildet das **System der $\psi_\nu^{\alpha\beta}$ eine Basis von $\mathfrak{P}_\nu^*$.**

Wir behaupten ferner dass für $\nu \neq \mu$

$$(\varphi_\nu^{\iota\varkappa}, \psi_\mu^{\alpha\beta}) = 0$$

ist. Mit Rücksicht auf

$$\psi_\mu^{\iota\varkappa} \in \mathfrak{P}_\mu^*$$

haben wir nur zu zeigen, dass

$$\mathfrak{P}_\mu^* \subset \mathfrak{N}_\nu^* = \mathfrak{P}_\nu^\perp \qquad (\mu \neq \nu)$$

ist. Das sieht man nun aber folgendermassen ein: Man erhält aus (3) und (5) für $2 < \varkappa < j_{\nu\iota}$

$$\begin{aligned} \delta_{\iota\varkappa;\,\alpha,\beta+1} = \delta_{\iota,\varkappa-1;\,\alpha\beta} = (\varphi_\nu^{\iota,\varkappa-1}, \psi_\nu^{\alpha\beta}) &= (C_{\lambda_\nu} \varphi_\nu^{\iota\varkappa}, \psi_\nu^{\alpha\beta}) \\ &= (\varphi_\nu^{\iota\varkappa}, C_{\bar\lambda_\nu}^* \psi_\nu^{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

und ferner für $\varkappa = 1$

$$0 = (C_{\lambda_\nu} \varphi_\nu^{\iota 1}, \psi_\nu^{\alpha\beta}) = (\varphi_\nu^{\iota 1}, C_{\bar\lambda_\nu}^* \psi_\nu^{\alpha\beta})$$

sodass für $1 \leqq \iota \leqq s_\nu$, $1 \leqq \alpha \leqq s_\nu$, $1 \leqq \varkappa \leqq j_{\nu\iota}$, $1 \leqq \beta \leqq j_{\nu\alpha}$

$$(\varphi_\nu^{\iota\varkappa}, C_{\bar\lambda_\nu}^* \psi_\nu^{\alpha\beta}) = \delta_{\iota\varkappa;\,\alpha,\beta+1}.$$

Hieraus ergibt sich aber mit Rücksicht auf (6)

$$(7) \qquad \begin{cases} C_{\bar\lambda_\nu}^* \psi_\nu^{\alpha\beta} = \psi_\nu^{\alpha,\beta+1} & (\beta = 1, 2, \cdots, j_{\nu\alpha} - 1) \\ C_{\bar\lambda_\nu}^* \psi_\nu^{\alpha j_{\nu\alpha}} = 0, \end{cases}$$

d. h. aber nach § 2, **dass die $\psi_\nu^{\alpha\beta}$ eine zu C^* gehörige kanonische Basis der Hauptmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_\nu^*$ bilden.**

Andererseits folgt aus (7)

$$\begin{aligned} C^*_{\bar\lambda_\nu} \psi_\mu^{\alpha\beta} &= C^*_{\bar\lambda_\mu} \psi_\mu^{\alpha\beta} + (\bar\lambda_\mu - \bar\lambda_\nu)\psi_\mu^{\alpha\beta} \\ &= \psi_\mu^{\alpha,\beta+1} + (\bar\lambda_\mu - \bar\lambda_\nu)\psi_\mu^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

und mithin, da die $\psi_\mu^{\alpha\beta}$ eine Basis von $\mathfrak{P}_\mu^*$ bilden,

$$C^*_{\bar\lambda_\nu}(\mathfrak{P}_\mu^*) \subseteq \mathfrak{P}_\mu^*,$$

also umso mehr

$$(C^*_{\bar\lambda_\nu})^{j_\nu}(\mathfrak{P}_\mu^*) \subseteq \mathfrak{P}_\mu^*.$$

Wir können aber sogar

$$(C^*_{\bar\lambda_\nu})^{j_\nu}(\mathfrak{P}_\mu^*) = \mathfrak{P}_\mu^* \qquad (\nu \neq \mu)$$

schliessen. Da nämlich $\mathfrak{P}_\nu^*$ die Nullmannigfaltigkeit von $(C^*_{\bar\lambda_\nu})^{j_\nu}$ ist und $\mathfrak{P}_\nu^* \cap \mathfrak{P}_\mu^* = 0$, bleibt nach einem elementaren Satze*) bei der Abbildung von $\mathfrak{P}_\mu^*$ durch $(C^*_{\bar\lambda_\nu})^{j_\nu}$ seine Dimensionszahl ungeändert. Daher kann $(C^*_{\bar\lambda_\nu})^{j_\nu}(\mathfrak{P}_\mu^*)$ keine echte Teilmenge von $\mathfrak{P}_\mu^*$ sein.

Die Behauptung $\mathfrak{P}_\mu^* \subset \mathfrak{R}_\nu^*$ folgt nunmehr mit Rücksicht auf (1) aus

$$\mathfrak{P}_\mu^* = (C^*_{\bar\lambda_\nu})^{j_\nu}(\mathfrak{P}_\mu^*) \subset (C^*_{\bar\lambda_\nu})^{j_\nu}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{R}_\nu^*.$$

§ 4. Die Unterräume $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$. Wir setzen

$$\mathfrak{S} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu \oplus$$

$$\mathfrak{S}^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu^* \oplus$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{S}^{*\perp}, \qquad \mathfrak{N}^* = \mathfrak{S}^{\perp}.$$

Dan folgt aus

*) Vgl. z. B. [2] S. 28 Satz 6.2.

$$C(\mathfrak{P}_\nu) = \mathfrak{P}\nu, \qquad C^*(\mathfrak{P}_\nu^*) = \overset{*}{\mathfrak{P}}\nu,$$

dass

$$C(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{S}$$
$$C^*(\mathfrak{S}^*) \subseteq \mathfrak{S}^*$$

ist, wobei offenbar $C(\mathfrak{S})$ in $\mathfrak{S}$ und $C^*(\mathfrak{S}^*)$ in $\mathfrak{S}^*$ überall dicht ist, sodass

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} C(\mathfrak{S})^{\perp} &= \mathfrak{S}^{\perp} \\ C^*(\mathfrak{S}^*)^{\perp} &= \mathfrak{S}^{*\perp}. \end{aligned}$$

Die weiteren Überlegungen stützen sich auf den folgenden einfachen Hilfssatz:

L e m m a*). **Sei $\mathfrak{M}$ eine lineare Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{H}$ und A eine in $\mathfrak{H}$ definierte beschränkte lineare Transformation. Man setze $A(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$. Dann ist**

$$A^*(\mathfrak{N}^{\perp}) = \mathfrak{M}^{\perp} \cap \mathfrak{R}^*$$

wobei $\mathfrak{R}^* = A^*(\mathfrak{H})$.

Wenn wir dieses Lemma auf $C^{**} = C$ anwenden, so ergibt sich mit Rücksicht auf (8)

$$C(\mathfrak{S}^{*\perp}) = \mathfrak{S}^{*\perp} \cap \mathfrak{R}$$

d.h. wegen $\mathfrak{S}^{*\perp} = \mathfrak{N}$

$$C(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{N}.$$

Ebenso findet man

$$C^*(\mathfrak{N}^*) \subseteq \mathfrak{N}^*.$$

Wenn man nun C als vollstetige Transformation des Unterraumes $\mathfrak{N}$ betrachtet, so muss C_λ für jedes $\lambda \neq 0$ regulär sein; denn als vollstetige Transformation in $\mathfrak{N}$ könnte C höchstens Eigenwerte besitzen, zu denen Elemente aus $\mathfrak{N}$ als Eigenlösungen gehören. Nun erhält aber das System $[\varphi_\nu^{\iota\varkappa}]$ bereits sämtliche Eigenlösungen von C, nämlich die $\varphi_\nu^{\mu 1}$ (vgl. (3)), und wegen $(\varphi_\nu^{\mu 1}, \psi_\nu^{\mu 1}) = 1$ und $\psi_\nu^{\mu 1} \in \mathfrak{S}^*$, ist $\varphi_\nu^{\mu 1}$ nicht Element von $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}^{*\perp}$. $\mathfrak{N}$ enthält somit keine Eigenlösungen von C und C_λ^{-1}

*) **Siehs [1], Lemma, S. 59.**

ist mithin für jedes $\lambda \neq 0$ eine beschränkte lineare Transformation in $\mathfrak{N}$, d.h. C ist quasinilpotent in $\mathfrak{N}$.

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. **Es is $C(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{N}$ und $C^*(\mathfrak{N}^*) \subseteq \mathfrak{N}^*$. Ausserdem sind C in $\mathfrak{N}$ und C^* in $\mathfrak{N}^*$ quasinilpotent.**

Wenn $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = 0, \quad \mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{S}^* = 0$ ist, so ist

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{S}^*)^{\perp} = \mathfrak{N}^{*\perp} \oplus \mathfrak{S}^{*\perp} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{N}$$

und

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S})^{\perp} = \mathfrak{N}^{\perp} \oplus \mathfrak{S}^{\perp} = \mathfrak{S}^* \oplus \mathfrak{N}^*$$

Dann und nur dann wenn $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = 0$ ist, wird also der Hilbertsche Raum in zwei elementenfremde Unterräume $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}$ zerlegt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = 0$ ist, ergibt sich aus

Satz 2. **Es ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = 0$ dann und nur dann, wenn dass biorthogonale Komplement $[\psi_\nu'^{\alpha\beta}]$ der $[\varphi_\nu^{\iota\varkappa}]$ innergalb $\mathfrak{S}$ denselben Unterraum $\mathfrak{S}$ aufspannt wie das System $[\varphi_\nu^{\iota\varkappa}]$.**

Hierbei ist das biorthogonale Komplement $[\psi_\nu'^{\alpha\beta}]$ der $[\varphi_\nu^{\iota\varkappa}]$ innerhalb $\mathfrak{S}$ durch die beiden Bedingungen

$$\psi_\nu'^{\alpha\beta} \in \mathfrak{S}, \quad (\varphi_\nu^{\iota\varkappa}, \psi_\nu'^{\alpha\beta}) = \delta_{\iota\varkappa,\, \alpha\beta}$$

bestimmt.

Der Beweis ist fast wörtlich derselbe wie der des entsprechenden Satzes in [1]*): Es sei $P_{\mathfrak{S}}$ der orthogonale Projektor von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{S}$. Dann erhält man aus (5)

$$(\varphi_\nu^{\iota\varkappa}, \psi_\nu^{\alpha\beta}) = (P_{\mathfrak{S}} \varphi_\nu^{\iota\varkappa}, \psi_\nu^{\alpha\beta}) = (\varphi_\nu^{\iota\varkappa}, P_{\mathfrak{S}} \psi_\nu^{\alpha\beta})$$
$$= \delta_{\iota\varkappa,\, \alpha\beta}.$$

Setzt man $\psi_\nu'^{\alpha\beta} = P_{\mathfrak{S}} \psi_\nu^{\alpha\beta}$, so ist $[\psi_\nu'^{\alpha\beta}]$ das biorthogonale Komplement des Systems $[\varphi_\nu^{\iota\varkappa}]$ in $\mathfrak{S}$.

Nun sei $\mathfrak{S}_1^*$ der Unterraum den das System $[\psi_\nu'^{\alpha\beta}]$ aufspannt. Wir wollen beweisen dass

*) [1], S. 60, Beweis von Satz 2.

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S} \ominus \mathfrak{S}_1^*$$

ist. Es sei $z \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}$. Dann erhält man

$$0 = (z, \psi_\nu^{\alpha\beta}) = (P_{\mathfrak{S}} z, \psi_\nu^{\alpha\beta}) = (z, \psi_\nu^{\prime\alpha\beta})$$

d.h. $z \in \mathfrak{S} \ominus \mathfrak{S}_1^*$ und $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S} \ominus \mathfrak{S}_1^*$.

Andererseits folgt, wenn $z', \in \mathfrak{S} \ominus \mathfrak{S}_1^*$, aus

$$0 = (z', \psi_\nu^{\prime\alpha\beta}) = (P_{\mathfrak{S}} z', \psi_\nu^{\alpha\beta}) = (z', \psi_\nu^{\alpha\beta}),$$

dass $z' \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^{*\perp} = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{S} \ominus \mathfrak{S}_1^{*\perp} \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}$. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

§ 5. Die Verallgemeinerung von Satz 3. Wir beweisen den folgenden

Satz 3. **Es lässt sich immer eine vollstetige lineare Transformation mit Eigenwerten $\omega_{\nu\mu} \neq 0$ endlicher Ordnung und mit einfachen Elementarteilern definieren, derart dass**

$$B(\mathfrak{N}) = 0, \quad BC\,x = C\,B\,x \quad \textbf{für jedes } x \in \mathfrak{H}.$$

Beweis. Wir bestimmen eine unendliche Folge untereinander verschiedener komplexer Zahlen $\omega_{\nu\mu}$ so dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{s_\nu} |\omega_{\nu\mu}| \sum_{\varkappa=1}^{j_{\nu\mu}} \|\psi_\nu^{\mu\varkappa}\| \, \|\varphi_\nu^{\mu\varkappa}\| < \infty$$

ist. Dann ist

$$Bx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{s_\nu} \omega_{\nu\mu} \sum_{\varkappa=1}^{j_{\nu\mu}} (x, \psi_\nu^{\mu\varkappa})\, \varphi_\nu^{\mu\varkappa} \tag{9}$$

eine vollstetige lineare Transformation in $\mathfrak{H}$*). Die $\omega_{\nu\mu}$ liefern sämtliche Eigenwerte von B, und die $\varphi_\nu^{\mu\varkappa}$ $(1 \leqq \varkappa \leqq j_{\nu\mu})$ bilden ein vollständiges System von $j_{\nu\mu}$ zum Eigenwert $\omega_{\nu\mu}$ gehörigen linear unabhängigen Eigenlösungen, sodass $\omega_{\nu\mu}$ ein Eigenwert der Ordnung $j_{\nu\mu}$ mit einfachen Elementarteilern ist. Offensichtlich ist $B(\mathfrak{N}) = 0$, da für $x \in \mathfrak{S}^{*\perp} = \mathfrak{N}$, $(x, \psi_\nu^{\mu\varkappa}) = 0$ wird. Aus (9) ergibt sich für jedes $x \in \mathfrak{H}$, da nach (3)

*) Siehe [1], Lemma 3.1. S. 60-61.

$C\,\varphi_\nu^{\mu\varkappa} = \lambda_\nu\,\varphi_\nu^{\mu\varkappa} + \varphi_\nu^{\mu,\varkappa-1}$ (für $\varkappa = 1$ ist $\varphi_\nu^{\mu,\varkappa-1} = 0$ zu setzen)
und wegen (7)
$C^*\,\psi_\nu^{\mu\varkappa} = \bar{\lambda}_\nu\,\psi_\nu^{\mu\varkappa} + \psi_\nu^{\mu,\varkappa+1}$ (für $\varkappa = j_{\nu\mu}$ ist $\psi_\nu^{\mu,\varkappa+1} = 0$ zu setzen)
ist,

$$\begin{aligned} C B x &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{s_\nu} \omega_{\nu\mu} \sum_{\varkappa=1}^{j_{\nu\mu}} (x,\, \psi_\nu^{\mu\varkappa})\; C\,\varphi_\nu^{\mu\varkappa} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{s_\nu} \omega_{\nu\mu} \sum_{\varkappa=1}^{j_{\nu\mu}} (x,\, \psi_\nu^{\mu\varkappa})\,(\lambda_\nu\,\varphi_\nu^{\mu\varkappa} + \varphi_\nu^{\mu,\varkappa-1}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{s_\nu} \omega_{\nu\mu} \sum_{\varkappa=1}^{j_{\nu\mu}} [\,\lambda_\nu\,(x,\, \psi_\nu^{\mu\varkappa}) + (x,\, \psi_\nu^{\mu,\varkappa+1})\,]\,\varphi_\nu^{\mu\varkappa}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} B C x &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{s_\nu} \omega_{\nu\mu} \sum_{\varkappa=1}^{j_{\nu\mu}} (C x,\, \psi_\nu^{\mu\varkappa})\;\varphi_\nu^{\mu\varkappa} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{s_\nu} \omega_{\nu\mu} \sum_{\varkappa=1}^{j_{\nu\mu}} (x,\, C^*\,\psi_\nu^{\mu\varkappa})\;\varphi_\nu^{\mu\varkappa} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{s_\nu} \omega_{\nu\mu} \sum_{\varkappa=1}^{j_{\nu\mu}} (x,\, \bar{\lambda}_\nu\,\psi_\nu^{\mu\varkappa} + \psi_\nu^{\mu,\varkappa+1})\;\varphi_\nu^{\mu\varkappa} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{s_\nu} \omega_{\nu\mu} \sum_{\varkappa=1}^{j_{\nu\mu}} [\,(x,\, \bar{\lambda}_\nu\,\psi_\nu^{\mu\varkappa}) + (x,\, \psi_\nu^{\mu,\varkappa+1})\,]\,\varphi_\nu^{\mu\varkappa} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{s_\nu} \omega_{\nu\mu} \sum_{\varkappa=1}^{j_{\nu\mu}} [\,\lambda_\nu\,(x,\, \psi_\nu^{\mu\varkappa}) + (x,\, \psi_\nu^{\mu,\varkappa+1})\,]\,\varphi_\nu^{\mu\varkappa}, \end{aligned}$$

mithin

$$C B x = B C x,$$

w. z. b. w.

(Eingegangen im November 1952)

Literatur

[1] H. L. Hamburger, Über die Zerlegung des Hilbertschen Raumes durch vollstetige lineare Transformationen. Mathematische Nachrichten Bd. 4 (1950/51) S. 56 - 68.

[2] H. L. Hamburger and M. E. Grimshaw, Linear transformations in n-dimensional vector space. Cambridge 1950.

[3] F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta mathematica 41, (1916) S. 71 - 98.

[4] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space. (American Mathematical Society Colloquim Publications, Vol. 15). New York 1932.

[5] Ed. Weyr, zur Theorie der bilinearen Formen. Monatshefte für Math. und Phys. I (1890) 163 - 236.