# COMMUNICATIONS

## DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

**Tome VI**

**(Série A — Fasc. 1)**

İSTANBUL

ŞİRKETİ MÜRETTİBİYE BASIMEVİ

1954

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara„ est une publication englobant toutes les disciplines scientifiques représentées à la Faculté : Mathématiques pures et appliquées, Astronomie, Physique et Chimie théoriques, expérimentales et techniques, Géologie, Botanique et Zoologie.

La Revue, les tomes I, II, III exceptés, comprend trois séries :

Série A : Mathématiques-Physique.
Série B : Chimie.
Série C : Sciences naturelles.

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible, les communications des savants étrangers. Les langues allemande, anglaise et française sont admises indifféremment. Les articles devront être accompagnés d'un bref sommaire en langue turque.

**Adresse :**

*Fen Fakültesi Mecmuası, Fen Fakültesi, Ankara.*

# COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A: Mathématiques-Physique

Tome VI, Fasc. 1 1954

# Eine Note über divergente Reihen

von

B. YURTSEVER

*(Mathematisches Institut der Universität Ankara)*

**Özet:** Bu notumuzda şunlar gösterilmektedir:

*Bir $\Sigma a_\nu$ serisi verildiğine göre, eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{k-1} s_\nu \, b_{\nu+1}$$

*limiti mevcut ($k \geqq 1$, tam) ve*

$$\sum s_\nu \, (b_\nu - b_{\nu+1})$$

*serisi* (C, $k$) *toplanabilirse, $\Sigma a_\nu \, b_\nu$ serisi de* (C, $k$) *toplanabilirdir.*

*($b_\nu$) dizisi* ($C_k$, $C_k$) *tipinde olsun, yani* (C, $k$) *toplanabilen $\Sigma a_\nu$ serisi ($b_\nu$) dizisi yardımiyle yine* (C, $k$) *toplanabilen bir $\Sigma a_\nu \, b_\nu$ serisine dönüştürülsün. Bu takdirde yukarki şartlar zaruri olarak sağlanırlar.*

Wir hatten in [2] einige einfache Sätze über die (C, 1) — Summierbarkeit angegeben. Es handelt sich hier um die Verallgemeinerung der Sätze 1 und 2 der genannten Arbeit auf die (C, $k$) — Summierbarkeit. Man kann sie so formulieren:

*Es sei die Reihe $\Sigma a_\nu$ gegeben. Wenn der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{k-1} s_\nu \, b_{\nu+1} \tag{1}$$

*existiert ($k \geqq 1$, ganz), und die unendliche Reihe*

$$\Sigma s_\nu \, (b_\nu - b_{\nu+1}) \tag{2}$$

(C, $k$) — *summierbar ist, so ist auch die Reihe $\Sigma a_\nu \, b_\nu$* (C, $k$) — *summierbar.*

Wir benutzen die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + s_n b_{n+1}$$

und bilden für ein festes $n > 0$ und $k \geqq 1$

$$\binom{n+k-1}{k-1} t_0 = \binom{n+k-1}{k-1} a_0 b_0$$
$$= \binom{n+k-1}{k-1} s_0(b_0 - b_1) + \binom{n+k-1}{k-1} s_0 b_1$$

$$\binom{n+k-2}{k-1} t_1 = \binom{n+k-2}{k-1} \sum_0^1 a_\nu b_\nu$$
$$= \binom{n+k-2}{k-1} \sum_0^1 s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + \binom{n+k-2}{k-1} s_1 b_2$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\binom{k-1}{k-1} t_n = \binom{k-1}{k-1} \sum_0^n a_\nu b_\nu$$
$$= \binom{k-1}{k-1} \sum_0^n s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + \binom{k-1}{k-1} s_n b_{n+1} \cdot$$

Wenn man diese Gleichungen addiert, durch $\binom{n+k}{k}$ dividiert und dann für $n \to \infty$ zur Grenze übergeht, wobei natürlich $t_n$ die $n$ te Teilsumme der Reihe $\Sigma a_\nu b_\nu$ bedeutet, so erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n+k-1}{k-1} t_0 + \binom{n+k-2}{k-1} t_1 + \cdots + \binom{k-1}{k-1} t_n}{\binom{n+k}{k}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n+k-1}{k-1} s_0(b_0 - b_1) + \binom{n+k-2}{k-1} \sum_0 s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + \cdots + \binom{k-1}{k-1} \sum_0^n s_\nu (b_\nu - b_{\nu+1})}{\binom{n+k}{k}}$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{k-1} s_\nu b_{\nu+1} \cdot$$

Ist nun die unendliche Reihe $\Sigma s_\nu\,(b_\nu - b_{\nu+1})$ (C, $k$) — summierbar, so existiert der erste Grenzwert auf der rechten Seite von (3). Ist auch der

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{k-1} s_\nu\, b_{\nu+1}$$

vorhanden, so muss auch der Grenzwert auf der linken Seite von (3) existieren, d.h. die unendliche Reihe $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ ist (C, $k$)— summierbar. Also sind die Bedingungen hinreichend für die (C, $k$) — summierbarkeit der Reihe $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ .

Nun suchen wir nach den notwendigen Bedingungen für die (C, $k$) — summierbarkeit der Reihe $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ . Dabei werden wir im wesentlichen einen Satz von Schur-Knopp benutzen [1]. Wir können hier als die Verallgemeinerung von Satz 2 in [2] folgendes aussprechen:

*Die Folge ($b_\nu$) sei vom Typus ($C_k$, $C_k$), d. h. jede (C, $k$) — summierbare Reihe $\Sigma a_\nu$ soll durch die Folge ($b_\nu$) wieder in eine (C, $k$) — summierbare Reihe $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ übergeführt werden. Dann werden die Bedingungen von seite 1 notwending erfüllt.*

Denn, nach unserer Voraussetzung ist jetzt in (3)

a) die Reihe $\Sigma a_\nu\, b_\nu$ (C, $k$) — summierbar,

b) die Reihe $\Sigma a_\nu$ (C, $k$) — summierbar,

c) die Folge ($b_\nu$) ist vom Typus ($C_k$, $C_k$).

Wegen a) existiert der Grenzwert auf der linken Seite von (3). Wir brauchen also nur zu zeigen, dass der zweite Grenzwert auf der rechten Seite von (3) auch vorhanden ist. Nach b) ist aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{k-1}}{\binom{n+k}{k}} s_\nu$$

vorhanden. Da die Faktoren $b_\nu$ wegen c) vom Typus ($C_k$, $C_k$) sind, so mus anch

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\binom{n-\nu+k-1}{k-1}}{\binom{n+k}{k}} s_\nu \, b_{\nu+1}$$

vorhanden sein, d. h. der zweite Grenzwert auf der rechten Seite von (3) existiert.

## Literatur


[1] K. Knopp. Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C—Summierbarkeit aufgestellten Satzes. Journal für die reine und angewandte Mathematik 187 (1950), 70-74.

[2] B. Yurtsever. Über die C—Summierbarkeit der unendlichen Reihen. Communications de la faculté des sciences de l'université d'Ankara, tome V (1953) 1—11.


*(Eingegangen am 9.12.1953)*