Die unbeschränkten Hartogsschen Körper

von

E. EGESOY

(Mathematisches Institut der Universität Ankara)

Özet: Bu makalenin birinci paragrafında sınırsız Hartogs bölgeleri tarif ve tasnif edilmiştir. 2. de teklik teoreminden faydalanarak H bölgelerinin otomorfizmleri hesaplanmaktadır. 3. de H_3 bölgelerinde genel olarak eksenlerin otomorfizmlere karşı invaryant olduğu ispatlanmış ve ayni problem Hartogs bölgelerinin G izdüşümlerinin iki hususi halinde de tetkik edilmiştir.

In der F. Th. einer komplexen Veränderlichen wird die Frage nach den eineindeutigen und analytischen Abbildungen einfach -zusammenhängender Bereiche der z- Ebene durch den Riemannschen Abbildungssatz gelöst. Nach diesem lässt sich jeder einfach-zusammenhängender Bereich eineindeutig und analytisch auf den Einheitskreis abbilden, dessen Abbildungen in sich ja sämtlich bekannt sind.

Ein entsprechender Satz gilt in der F. Th. mehrerer Veränderlichen nicht. Hier liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Aus der Kenntnis der Automorphismen folgen natürlich sofort notwendige Bedingungen für die Abbildbarkeit verschiedener Bereiche aufeinander, denn offenbar können nur dann zwei Bereiche aufeinander abbildbar sein, wenn ihre Automorphismengruppen isomorph sind.

H. Poincaré hatte schon gezeigt, dass die beiden einfachsten Bereiche des R_4, der Dizylinder

$$T(\vartheta, \varphi): \quad \begin{aligned} w' &= w\, e^{i\vartheta} \\ z' &= z\, e^{i\varphi} \end{aligned}$$

und die Hyperkugel

$$S: \quad \begin{aligned} w' &= a\, w + b\, z \\ z' &= c\, w + d\, z \end{aligned} \quad (a, b, c, d, \text{ sind kompl.})$$

analytisch sich nicht aufeinander abbilden lassen.

Die Gruppe S ist vierparametrig und deshalb sicher nicht isomorph zu $T(\vartheta, \varphi)$. Also gibt es keine analytische Abbildung des Dizylinders auf die Hyperkugel. Als Repräsentant der einfach—zusammenhängenden, beschränkten Bereiche des (w, z)-Raumes kann nicht analog zum Kreis der K. F. Th. nur die Hyperkugel gewählt werden. Vielmehr gibt es unendlich viele verschiedene Klassen solcher Bereiche, derart, dass Bereiche ein und derselben Klasse aufeinander abbildbar sind, dies dagegen nicht für Bereiche verschiedener Klassen gilt.

Während nun in der K. F. Th. die Automorphismen aller einfach zusammenhängenden Bereiche—abgesehen von der Volleebene und der einmal punktierten Ebene—sich einfach aus den Automorphismen ihres gemeinsamen Repräsentanten, des Kreises, ergeben, muss in den unendlich vielen verschiedenen Klassen von Bereichen über dem (w, z)-Raume die Automorphismengruppe jedesmal getrent untersucht werden.

Bei den analytischen Abbildungen von Bereichen im Raume der beiden komplexen Veränderlichen spielen die kreissymmetrischen Körper [3] eine wichtige Rolle, weil die in ihnen regulären Funktionen stets dort eine Art Potenzreihenentwicklung zulassen. H. Cartan hat ein grundlegende Ergebnis der Abbildungstheorie für die kreissymmetrischen Körper angegeben.

Abbildungssatz von Cartan: Besitzt ein beschränkter Bereich B eine unendliche Automorphismengruppe G mit dem Fixpunkt O und ist B in O nicht verzweigt, so lässt sich B eineindeutig und analytisch auf einen beschränkten eigentlichen kreissymetrischen Körper B* abbilden. O geht dabei in den Mittelpunkt von B* über [4].

Die Automorphismen der beschränkter Bereiche sind durch eine grössere Reihe von Untersuchungen verschiedener Autoren bekannt geworden (Es sei etwa nur an die Arbeiten von H. Cartan, C. Carathéodory, H. Behnke, P. Thullen usw. erinnert). Doch ist für alle diese Resultate bisher die Voraussetzung wesentlich, dass die Bereiche beschränkt sind.

Grundlegend für die Auffindung der Automorphismen ist nun der Eindeutigkeitssatz[4] von H. Cartan. Eine wesentliche Voraussetzung dieses Satzes ist die Beschränktheit des Bereiches. Nun kommen jedoch schon unter den Konvergenzbereichen der wichtigsten Reihenentwicklungen unbeschränkte kreissymmetrische Körper vor.

Zum ersten Male haben H. Behnke und E. Peschl die einfachste Klasse unbeschränkter Bereiche, die unbeschränkten Reinhardtschen Körper [1], behandelt. Nach ein Jahr (1936) hat H. Zumbusch ein Artikel, die Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper [9], herausgegeben.

In der vorliegenden Arbeit werden wir die Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Hartogsschen Körper behandeln, und dann werden wir in einigen besonderen Fälle zeigen, dass die Automorphismen Achsen wieder in Achsen überführen.

§ 1. Einteilung der Hartogsschen Bereiche

Als Repräsentant der einfach zusammenhängenden Bereiche des (w, z) - Raumes kann nicht analog zum Kreis der K. F. Th. nur die Hyperkugel gevählt werden. Die Rolle des Kreises im R_4 wird im allgemeinen von den Kreissymmetrischen Körper übernommen. Die Hartogssche Körper gehören zu dieser Klasse an.

Definition: Unter einem Hartogsschen Körper [3] verstehen wir einen 4—dimensionalen Gebiet, das durch sämtliche Transformationen der Gruppe:

$$w' = w$$
$$z' = (z - z_0)\, z^{i\vartheta} + z_0 \qquad (\vartheta \text{ reel})$$

auf sich abgebildet wird.

Bei allen diesen Transformationen bleibt die Ebene $z = z_0$ punktweise fest. Diese Ebene wird die Symmetrieebene des Körpers genannt. Wir werden meist die Ebene $z = 0$ zur Symmetrieebene wählen

$$T_z(\vartheta): \quad \begin{aligned} w' &= w \\ z' &= z\, e^{i\vartheta} \end{aligned}$$

Definition: Ein Hartogsscher Körper heisst eigentlich wenn es auf der Symmetrieebene innere Punkte gibt.

Definition: Ein Hartogsscher Körper heisst vollkommen wenn jede den Körper überhaupt schneidende Ebene $w = c$ eine volle Kreisscheibe herauschneidet. Ein volkommener Hartogssche Körper enthält mit einem Punkte (w^*, z^*) auch alle Runkte $(w^*, k\, z^*)$ mit $|\, k \,| \leqq 1$.

Das Gebiet der gleichmässigen Konvergenz einer Reihe $\Sigma f_\nu(w)\, z^\nu$ ist ein vollkommener Hartogsscher Körper H mit der

Symmetrieebene $z = o$. In seiner grundlegender Arbeit in den Mathematischen Annalen Bd. 62 (1906) hat Herr Hartogs die Konvergenzgebiete der Reihen $\Sigma f_\nu(w)z^\nu$ untersucht. Er hat den Rand von H durch eine positive Funktion $| z | = R(w)$, das Innere durch $| z | < R(w)$ angegeben. Diese Gebiete sind offenbar invariant gegenüber den Transformationen $T_z(\vartheta)$.

Wir können so erklären eine geometrische Veranschaulichung der Definitionen, die wir bisher angegeben haben: Wir betrachten ein Gebiet G in der w—Ebene. Zu jedem inneren Punk w des Gebietes G ordnen wir ein schlichtes Gebiet $g(w)$, das aus konzentrischen Kreise der z—Ebene besteht. Sind w und z innere Punkte des Gebietes G und $g(w)$, so heissen wir die Gesamtheit der Punkte (w, z) ein Hartogssche Körper (*).

Ein Hartogsscher Körper H heisst eigentlich, wenn das Gebiet $g(w)$ stets eine Kreisscheibe mit o als Mittelpunkt enthält.

Wenn das Gebiet $g(w)$ stets aus einer vollen Kreisschreibe besteht, so nennt man H vollkomene Hartogsschen Körper. Zu dem Gebiet G in der w-Ebene nennen wir die Projektion des Hartogsschen Körpes H mit der Symmetriebene $z = o$.

Nach diesen Erklärungen is es klar, dass jede in H reguläre Funktion $f_\nu(w)$ auch in G regulär ist.

Die Projektion G eines Hartogsschen Körpers ist funktionentheoretisch von wichtigkeit. Ein volkommener Hartogsscher Körper H ist dann und nur dann schlicht, wenn seine Projektion G schlicht ist. Andererseits braucht die Projektion eines schlichten, nicht vollkommenen Hartgosschen Körpers keineswegs schlicht zu sein. Ein vollkomener schlichter Hartogsscher Körper besitzt dagegen stets eine schlichte Projection [3].

Satz. [7], [5] Wird eine analytische Transformation ein Bereich B_1 eindeutig auf einen Bereich B_2 abgebildet, so bildet dieselbe Transformation auch die zugehörigen Regularitätshüllen $\mathfrak{H}(B_1)$ und $\mathfrak{H}(B_2)$ eineindeutig und analytisch aufeinander ab.

Für die Automorphismen heisst dies insbesondere: B hat nur solche Automorphismen, die auch $\mathfrak{H}(B)$ aufweist. Wir kennen also die Automorphismen aller Gebiete, wenn wir die Automorphismen aller Regülaritätshüllen, *d. h.* aller Regülaritätsgebiete kennen.

(*). Imfolgenden werden wir den Hartogsschen Körper durch die Buchstabe H bezeichnen.

Satz[3]. Die Regülaritätshülle eines eigentlichen Hartogsschen Körpers ist ein vollkommener Hartogsscher Körper.

Aus diesem Satze ergibt sich, dass ein eigentlicher Hartogsscher Körper somit nur dann Regularitätsgebiet sein kann, wenn er volkommen ist.

Entwicklungssatz [4]. Ist eine Funktion $f(w, z)$ in einem eigentlichen (nicht notwendig vollkommen oder schlichten) Hartogsschen Körper B mit der Symmetrieebene $z = o$ regulär, so lässt sich $f(w, z)$ in eine im ganzen inneren von B und damit auch im Inneren des kleinsten B umfassenden vollkommenen Hartogsschen Körper $\breve{B}$ gleichmässig konvergente Reihe entwickeln:

$$f(w,z) = \sum_0^\infty f_\nu(w)\, z^\nu$$

Satz 1. Ist $f(w,z) = \sum_0^\infty f_\nu(w)\, z^\nu$, so gilt für die $f_n(w)\, z^n$ die Integraldarstellung:

$$f_n(w)\, z^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\vartheta} f(w, ze^{i\vartheta}) d\vartheta.$$

Beweis. Durch Ausrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\vartheta} f(w, ze^{i\vartheta})\, d\vartheta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\vartheta} \sum_0^\infty f_\nu(w) z^\nu e^{i\nu\vartheta}\, d\vartheta \\ &= \sum_0^\infty f_\nu(w) z^\nu \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-\nu)\vartheta}\, d\vartheta \\ &= \sum_0^\infty f_\nu(w)\, z^\nu\, \delta_{n\nu} \\ &= f_n(w)\, z^n \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort eine wichtige Folgerung:

Folgerung 1. Ist $f(w, z) = \sum_0^\infty f_\nu(w)\, z^\nu$ regulär und beschränkt im Hartogsschen Körper H, so ist jede der Funktionen $f_n(w)\, z^n$ regulär und beschränkt in H.

Durch Abschätzung von eben erwähnten Satz ergibt sich für die $f_n(w)\, z^n$:

$$| f_n(w)\, z^n | \leqq \mathrm{Max}\, | f(w, ze^{i\vartheta}) | \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$$

Die $f_n(w)\, z^n$ sind also in jedem inneren Punkte aus H gleichmässig für alle n beschränkt.

Definition 1. Wenn ein Hartgosscher Körper

$$\mathrm{H} = [\boldsymbol{w} \in G, \; | z | < R(w)]$$

wenigstens einen Punkt der unendlich fernen Ebene (des komplex-projektiv abgeschlossenen R_4) im Inneren oder auf dem Rande enthält, so nennen wir ihn einen unbeschränkten Hartogsschen Körper.

Im folgenden sollen die unbeschränkten, eigentlichen Hartogsschen Körper H betrachtet werden.

Aus den eben erwähnten Sätzen und Definitionen ergibt sich nun unmittelbar ein Satz.

Satz 2. In einem unbeschränkten, eigentlichen Hartogsschen Körper H, der Regularitätsgebiet ist, gibt es wenigstens eine analytische ebene $w = c$, die ganz oder bis auf den unendlich fernen Punkt in H liegt.

Wir können nun im folgenden Definition angeben.

Definition 2. Die analytische Ebene $w = c$, die bis auf den unendlich fernen Punkt in H liegen, nennen wir die Achsen von H.

Auf Grund der letzten Definition wollen wir noch den folgenden aussprechen:

Satz 3. Ein unbeschränkter, eigentlicher Hartogsscher Körper H ist nie auf einen beschränkten Gebiet eineindeutig und analytisch abbildbar.

Beweis. Wäre nämlich

$$w' = f(w,z)$$
$$w' = g(w,z)$$

eine Abbildung, die dies leistete, so wären $f(w,z)$ und $g(w,z)$ auf den Achsen $w = c$ wenigstens in allen endlichen Punkten regulär und beschränkt, also konstant. Das würde aber bedeuten, dass alle Punkte der Achsen $w = c$ auf einen einzigen Punkt abgebildet würden.

Im folgenden sollen die zu behandelnden Hartogsschen Körper in drei Klassen eingeteilt werden. Es ist zweckmässig, zunächst ein Hilfssatz vorauszuschicken.

Satz 4. Seien

$$P(w,z) = \sum_0^\infty p_\nu(w,z)$$

$$Q(w,z) = \sum_0^\infty q_\mu(w,z)$$

zwei im Punkte (w,z) reguläre Funktionen, deren Funktional determinante nicht identisch verschwindet. Dann gibt es zwei Funktionen $p(w, z)$ und $q(w,z)$ der zugehörigen Reihen, deren Funktionaldeterminante ebenfalls nicht identisch verschwindet.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} P'_w & P'_z \\ Q'_w & Q'_z \end{vmatrix} &= P'_w Q'_z - P'_z Q'_w \\ &= \Sigma p_{\nu,w} \Sigma q_{\mu,z} - \Sigma p_{\nu,z} \Sigma q_{\mu,w} \\ &= \Sigma p_{\nu,w}\, q_{\mu,z} - \Sigma p_{\nu,z}\, q_{\mu,w} \\ &= \Sigma (p_{\nu,w}\, q_{\mu,z} - p_{\nu,z}\, q_{\mu,w}) \\ &= \Sigma \begin{vmatrix} p_{\nu,w} & p_{\nu,z} \\ q_{\mu,w} & q_{\mu,z} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Wären alle hier stehenden Funktionaldeterminante identisch null, so wäre $D = 0$, was nicht sein kann. Also muss es zwei Funktionen $p_\nu(w, z)$ und $q_\mu(w,z)$ behaupteten Art geben.

Folgerung 2. Gibt es im Hartogsschen Körper H zwei beschränkte, reguläre Funktionen $f(w,z)$ und $g(w,z)$, deren Funktionaldeterminante nicht identisch verschwindet, so gibt es auch zwei beschränkte, reguläre Funktionen $f_\nu(w)z^\nu$ und $g_\mu(w)z^\mu$ in H mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante.

Nunmehr wird definitiert :

(a) Die Klasse H_1 besteht aus allen Hartogsschen Körpern, in denen jede reguläre und beschränkte Funktion konstant ist.

(b) Die Klasse H_2 besteht aus allen Hartogsschen Körpern, in denen es nichtkonstante regüläre und beschränkte Funktionen gibt, jedoch besitzen je zwei solche Funktionen eine identisch verschwindende Funktionaldeterminante.

(c) Die Klasse H_3 besteht aus allen Hartogsschen Körpern, in denen es wenigstens zwei reguläre, beschränkte Funktionen gibt, deren Funktionaldeterminante nicht identisch verschwindet.

Anmerkung. Wesentlich für die folgenden Überlegungen ist, dass man in den Klassen H_2 und H_3 Funktionen spezieller Struktur besitzt, welche ebenfalls die postulierten Eigenschaften haben, nämlich Funktionen der Form $f(w)z^n$.

Dass in der Klasse H_2 eine solche Funktion liegt, besagt Folgerung 1 nebst Anmerung. Dass in der Klasse H_3 zwei solche Funktionen liegen, folgt sofort aus Hilfsatz (Satz 4)

Wir können schliesslich noch den folgenden Satz beweisen.

Satz 5. Besitz ein Hartogsscher Körper unendlich viele Achsen, deren w-Koordinaten sich im Inneren von G häufen, so gehört er sicher zur Klasse H_1.

Beveis. $f(w)z^m$ sei ein bliebige Funktion. Mann kann nun aber stets eine Achse

$$E: \qquad w = c$$

angeben, derart, dass $f(c) = C \neq 0$. Dann wird aber $f(w)\, z^m$ auf E von der form $C.\, z^m$ also beliebig gross.

§ 2. Eindeutigkeitssatz in Unbeschränkten Hartogsschen Körper H_3 [1], [2], [6], [9]

Eindeutigkeitssatz 6. B sei ein beliebiges unbeschränktes Gebiet, der im inneren Punkte O (0,0) nicht verzweigt ist. Ferner gebe es zwei in B reguläre und beschränkte Funktionen $F(w,z) = f(w)\, z^\beta$ und $G(w,z) = g(w)\, z^\delta$ mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante. Jede innere Abbildung

$$S: \quad \begin{aligned} w_1 &= w + Q(w)\, z^a + \cdots \quad (Q(w) \neq 0) \\ z_1 &= z + R(w)\, z^b + \cdots \quad (R(w) \neq 0) \end{aligned}$$

ist dann die Identität.

Beweis. Für die Iterierten S_n von S gilt dann:

$$S_n: \quad \begin{aligned} w_n &= w + n\, Q(w)\, z^a + \cdots \\ z_n &= z + n\, R(w)\, z^b + \cdots \end{aligned}$$

Es ist also

$$H(w,z)_{\mathrm{Def}} = w_n - w = n\,Q(w)\,z^a + \cdots$$
$$H(w,z)_{\mathrm{Def}} = z_n - z = n\,R(w)\,z^b + \cdots.$$

In die Funktionen $F(w,z)$ und $G(w,z)$ setzen wir nun die Funktionen w_n und z_n der Transformationen S_n ein.

Wir bilden also

$$F_n(w, z)_{\mathrm{Def}} = F(w_n, z_n)$$
$$G_n(w\ z)_{\mathrm{Def}} = G(w_n\ z_n).$$

Diese Funktionen sind alle in B regülär und beschränkt. Die beiden Funktionen entwickeln wir nach Taylor:

$$F_n(w, z) = F(w + H_1, z + H_2) = F(w, z) + F'_w(w, z)\,H_1 + F'_z(w, z)\,H_2 + \text{höhere Potenzen in } H_1, H_2$$

$$G_n(w, z) = G(w + H_1, z + H_2) = G(w, z) + G'_w(w, z)\,H_1 + G'_z(w, z)\,H_2 + \text{höhere Potenzen in } H_1, H_2.$$

$$F_n(w, z) = f(w)\,z^\beta + f'_w(w)\,z^\beta\,[n\,Q(w)\,z^a + \cdots] + \beta\,f(w)\,z^{\beta-1}\,[n\,R(w)\,z^b + \cdots] + \cdots$$

$$G_n(w, z) = g(w)\,z^\delta + g'_w(w)z^\delta\,[nQ(w)\,z^a + \cdots] + \delta\,g(w)\,z^{\delta-1}\,[nR(w)\,z^b + \cdots] + \cdots$$

oder

$$F_n(w, z) = f(w)z^\beta + nf'_w(w)Q(w)z^{a+b} + n\beta f(w)R(w)z^{b+\beta-1} + \cdots$$

$$G_n(w, z) = g(w)z^\delta + ng'_w(w)Q(w)z^{a+\delta} + n\delta g(w)R(w)z^{b+\delta-1} + \cdots$$

Aber andererseits ist

$$F_n(w, z) = f(w)z^\beta + X_1^{(n)}(w)\,z^{\beta+1} + \cdots + X_j^{(n)}(w)\,z^{\beta+j} + \cdots$$
$$G_n(w, z) = g(w)z^\delta + Y_1^{(n)}(w)\,z^{\delta+1} + \cdots + Y_j^{(n)}(w)\,z^{\delta+j} + \cdots$$

Da die Funktionen $|F_n(w, z)|$ und $|G_n(w, z)|$ im Gebiete B gleichmässig beschränkt sind, gilt dies auch für $|X_j^{(n)}(w)z^{\beta+j}|$ und ebenso für $|Y_j^{(n)}(w)z^{\delta+j}|$ (Folgerung 1).

Wir behaupten $Q(w) \equiv R(w) \equiv 0$, woraus dann unmittelbar die Behauptung des Satzes folgt.

I. Fall : $a < b-1$.

Es ist

$$X_a^{(n)}(w) z^{a+b} = n f'_w(w) Q(w) z^{a+\beta}$$

folglich wegen der beschränktheit $Q(w) \equiv 0$ und ebenso $R(w) \equiv 0$.

II. Fall: $b-1 < a$.

Hier folgt zuerst $R(w) \equiv 0$ und dann $Q(w) \equiv 0$.

III. Fall: $a = b-1$.

Jetzt ist

$$X_a^{(n)}(w) = n[f'_w(w)\; Q(w) + \beta f(w)\, R(w)]$$
$$Y_a^{(n)}(w) = n[g'_w(w)\; Q(w) + \delta g(w)\, R(w)]$$

Da $\dfrac{D(F, G)}{D(w, z)} \not\equiv 0$, folgt wieder Behauptung

Da wir wissen, dass die Hartogssche Körper H_3 Gebiete B sind, die den Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatz es genügen, so gilt derselbe also in all diesen Hartogsschen Körpern.

Aus der Gültigkeit des Eindeutigkeitssatzes in den Gebieten H_3 können wir jetzt den folgenden aussprechen:

Satz 7[8]. Wird ein Hartogsscher Körper H_3 durch eine Transformation:

$$A: \quad \begin{aligned} w' &= f(w,z) = aw + \cdots && (a \neq 0) \\ z' &= g(w,z) = bz + \cdots && (b \neq 0) \end{aligned}$$

eineindeutig auf sich abgebildet, so ist

$$w' = f(w,z) = f_1(w)$$
$$z' = g(w,z) = g_1(w) z.$$

Beweis.

Ist nämlich $T_z(\vartheta)$ eine beliebige Hartogsscherdrehung, so hat für alle ϑ die Transformation

$$S = T_z(-\vartheta)\, A^{-1} T_z(\vartheta)\, A \qquad (\vartheta \text{ beliebig reell})$$ die

Entwicklung:

$$w' = w + \cdots$$
$$z' = z + \cdots$$

ist also die Identität. Somit gilt:

$$A T_z(\vartheta) = T_z(\vartheta)\, A$$

d. h.

$$f(w,z) = f(w,ze^{i\vartheta})$$
$$g(w,z)\, e^{i\vartheta} = g(w,ze^{i\vartheta}) \qquad \text{(für alle } \vartheta \text{ reell)}$$

Durch Differentieren ergibt sich:

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f(0,0)}{\partial w^\mu\, \partial z^\nu} = e^{i\nu\vartheta} \frac{\partial^{\mu+\nu} f(0,0)}{\partial w^\mu\, \partial z^\nu}$$
$$e^{i\vartheta} \frac{\partial^{\mu+\lambda} g(0,0)}{\partial w^\mu\, \partial z^\lambda} = e^{i\lambda\vartheta} \frac{\partial^{\mu+\lambda} g(0,0)}{\partial w^\mu\, \partial z^\lambda}.$$

Da diese Gleichungen für jedes ϑ gelten, muss entweder

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f(0,0)}{\partial w^\mu\, \partial z^\nu} \equiv \frac{\partial^{\mu+\lambda} g(0,0)}{\partial w^\mu\, \partial z^\lambda} \equiv 0$$

sein, oder es ist $\nu = 0$, $\lambda = 1$.

Die Transformation A hat also die behauptete Form:

$$w' = f_1(w)$$
$$z' = z g_1(w),$$

führt also insbesondere die Symmetrieebene in sich über.

§ 3. Achseninvarianz gegenüber Automorphismen.

Satz 8. Ist H ein unbeschränkter, eigentlicher Hartogsscher Körper der Klasse H_3, so führen alle Automorphismen Achsen in Achsen über.

Es ist zweckmässig zunächst ein Hilfssatz vorauszuschicken.

Satz 9. Die Projektion G eines Körpers H der Klasse H_3 kann nicht die offene w-Ebene sein.

Beweis. Dann wären nämlich in den Funktionen

$$a(w)\, z^n, \qquad b(w)\, z^m,$$

die nach Voraussetzung in G regulär und beschränkt sind und dort eine nicht identisch verschwindende Funktionaldeterminante haben, die Funktionen

$$a(w), \quad b(w)$$

in der offenen w-Ebene regulär und beschränkt und also konstant:

$$a(w) \equiv a_0$$
$$b(w) \equiv b_0$$

Dann verschwindet aber die Funktionaldeterminante von $a_0 z^n$ und $b_0 z^m$ identisch. Widerspruch!

Beweis von Satz 8. Sei

$$\begin{aligned} w' &= f(w, z) \\ z' &= g(w, z) \end{aligned}$$

ein Automorphismus von H, $w = s$ eine Achse von H. Wir müssen zeigen

$$w' = f(s, z) =_{\text{Def}} \varphi(z)$$

ist ebenfalls eine Achse von H d.h. $\varphi(z) = \text{const.}$

Angenommen: $\varphi(z) \neq \text{const.}$

Neben $\varphi(z)$ betrachten wir

$$z' = g(s, z) =_{\text{Def}} \psi(z).$$

φ und ψ sind in der offenen z—Ebene regulär, da $w = s$ Achse ist.

Daher sind auch die Funktionen

$$a(\varphi(z))\,(\psi(z))^n, \qquad b(\varphi(z))\,(\psi(z))^m$$

in der ganzen z—Ebene regulär, und da sie dort beschränkt sind, gilt nach Liouville:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} a(\varphi)\,\psi^n &= \text{const.} \\ b(\varphi)\,\psi^m &= \text{const.} \end{aligned}$$

Aus (1) folgt durch Differentiation nach z:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} a'(\varphi)\,\varphi'\,\psi^n + a(\varphi)\,n\psi^{n-1}\,\psi' &= 0 \\ b'(\varphi)\,\varphi'\,\psi^m + b(\varphi)m\psi^{m-1}\psi' &= 0. \end{aligned}$$

Es kann nicht gelten $\psi(z) \equiv 0$, denn dann müsste (auf Grund des Riemannschen Abbildungssatzes) die Ebene $w = s$ (z bel.) auf die Ebene $z = 0$ (w bel.) abgebildet werden. Das würde aber bedeuten, dass die offene w-Ebene zu H gehöre, was nach Satz 9 nicht sein kann. In (2) darf also durch ψ^{n-1} bzw. ψ^{m-1} dividiert werden. Man erhält:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} a'(\varphi)\,\varphi'\psi + na(\varphi)\psi' &= 0 \\ b'(\varphi)\,\varphi'\psi + mb(\varphi)\psi' &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können als lineares Gleichungssystem in den Unbekanten $\varphi'\psi$ und ψ' aufgefasst werden. Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{vmatrix} a'(\varphi) & na(\varphi) \\ b'(\varphi) & mb(\varphi) \end{vmatrix} \neq 0,$$

denn φ ist nicht konstant.

Daher hat (3) nur die triviale Lösung

$$\varphi'\psi \equiv 0 \ , \qquad \psi' \equiv 0.$$

Da $\psi \equiv 0$ nicht gelten kann, muss $\varphi' = 0$, d.h. $\varphi = \text{const.}$ sein im Widerspruch zur Annahme.

Satz 10. Es sei

$$H = \{w \in G, \qquad |z| < R(w)\}$$

ein Hartogsscher Körper mit beschränkter Projektion G.

$$A: \quad \begin{aligned} w' &= f(w, z) \\ z' &= g(w, z) \end{aligned}$$

sei ein Automorphismus von H. Wenn $w = s$ eine Achse von H ist, so führt der Automorphismus A die Achse $w = s$ wieder in Achse über.

Beweis.

Die Funktionen $f(w, z)$ und $g(w, z)$ wollen wir für $w = s$ definieren :

$$\begin{aligned} w' &= f(s, z) = \varphi(z) \\ z' &= g(s, z) = \psi(z). \end{aligned}$$

Da die Funktionen f und g im H regulär sind, sind auch φ und ψ über der Achse $w = s$ d.h. in der offenen z-Ebene E_s regulär. Diese sind also in der Ebene E_s ganze Funktionen. Die Werte von $\varphi(z)$ müssen wieder in G liegen. Dann ist also $\varphi(z)$ beschränkt, also nach Liouville

$$w' = \varphi(z) = c_1.$$

Die Funktion $z' = g(s, z) = \psi(z)$ kann nicht konstant sein, wegen Eineindeutigkeit.

$\psi(z)$ ist also eine ganze Funktion, und zwar wegen der Eineindeutigkeit eine lineare Funktion :

$$z' = a_0 + a_1 z^{(*)}$$

D.h. aber mit z durchläuft z' alle Werte $\neq \infty$. D.h. das Bild der

(*) K. Knopp : Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II § 10,S: 24

Punktmenge $\{w = s, |z| < \infty\}$ ist die Punktmenge $\{w' = c_1, |z'| < \infty\}$. Also ist die Achse $w = s$ in eine andere Achse übergeführt.

Satz 11. Es sei H ein Hartogsscher Körper mit der Projektion G, die mindestens drei Randpunkte (also sicher zwei endliche Randpunkte) besitzt.

$$A: \quad \begin{aligned} w' &= f(w, z) \\ z' &= g(w, z) \end{aligned}$$

sei ein Automorphismus von H. Wenn $w = s$ eine Achse von H ist, so führt der Automorphismus A Die Achse $w = s$ wieder in Achse über.

Beweis.

Wir hatten schon angenommen, dass die Funktionen f und g für $w = s$

$$\begin{aligned} w &= f(s, z) = \varphi(z) \\ z &= g(s, z) = \psi(z) \end{aligned}$$

sind. Angenommen $\varphi(z) \neq$ const. Dann ist $\varphi(z)$ eine ganze Funktion. Da nach Picard eine ganze Funktion $\varphi(z)$ (die nicht konstant ist) alle endlichen Werte bis auf höchstens eine Ausnahme annimt, liegt einer der beiden endlichen Randpunkte im Wertevorrat von $\varphi(z)$. Das ist aber unmöglich, da die Werte von $\varphi(z)$ innere Punkte von G sein müssen. Also ist wiederum $\varphi(z) \equiv c$ und weitere Schluss wie oben.

Literatur

[1] Behnke-Peschl. Die unbeschränkten Reinhardtschen Körper. Math. Ann. 112 (1939).

[2] Behnke-Peschl. Der Cartansche Eineindeutigkeitssatz in unbeschränkten Körpern. Math. Ann. 114 (1937)

[3] Behnke-Thullen. Theorie der Funktionen mehrer komplexer veränderlichen Erg. Math. Grenzgeb. III 3. (1934).

[4] Cartan, H.. Les fonktions de deux variables complexes et le problèmes de la representation analytique. Journ. d. M. 10 (1931).

[5] Cartan-Thullen. Regularitäts — und Konvergenzbereiche. Math. Ann. Bd. 106 (1932).

[6] Peschl, E.. Über den Cartan — Caratheodoryschen Eindeutigkeitssatz. Math. Ann. 119 (1934).
[7] Thullen, P.. Die Regularitätshüllen. Math. Ann. 106 (1932).
[8] Welke, H.. Über die anal. Abbild. von Kreiskörpern und Hartogsschen Berreichen. Math. Ann, Bd. 103 (1930).
[9] Zumbusch, H.. Die Automorphismen der unbeschränkten, eigentlichen Kreiskörper. Math. Zeitschr. 41 (1936).

(Eingegangen am 9. 4. 1954)