Das Koeffizientenproblem Der Gleichmässig Schlichten Funktionen

von

Orhan H. ALİSBAH

(Mathematisches Institut der naturwissenschaftlichen Fakultät in Ankara)

Özet: Düzgün Ayrıkdeğer Fonksiyonların Katsayılar Teorisi. — Birim dairesi içerisinde düzgün ayrıkdeğer fonksiyonlar, bundan önce 1943 yılında hazırlanıp 1945 de basılan (Istanbul Fen Fakültesi yayını) bir makalemizde tarif edilmişti. Bu araştırma ise bilâhare E. Egesoy tarafından da incelenen katsayılar teorisini, I. Schur metodunun tatbiki sırası rastlanan duraklamaları da izah etmek ve genişletmek suretiyle bu fonksiyon sınıfının katsayısı teorisini tamamlamış olmaktadır. Kullanılan metot birim dairesini kendisine değiştiren Möbius transformasyonu, Schwarz lemması ve Maksimum Prensibinin sistemli bir şekilde tatbikine dayanmaktadır.

§ 3 de görülen ve Fourier serilerine benzeyen $\Sigma a_k\,(1+\zeta+\ldots+\zeta^{k-1})z^{k-1}$ serilerine ait bir incelemeyi ayrıca neşredeceğiz.

* * *

In dieser Arbeit wird das Koeffizientenproblem der gleichmässig schlichten Funktionen behandelt. Das sind diejenigen schlichten Funktionen, für die das Differenzenquotient, dem absoluten Betrage nach eine von Null verschiedene untere Grenze besitzt.

Andererseits dies ist eine allgemeingültige Eigenschaft, für die im Kreise $|z| < R$ schlichten Funktionen. D. h. jede für $|z| < R$ schlichte Funktion, ist für $|z| \leqq r < R$ gleichmässig schlicht. Die hier untersuchten gleichmässig schlichten Funktionen unterscheiden sich von den letzteren, nur dadurch, dass man sie, als statt im geschlossenen r-Kreis im offenen Einheitskreise definiert betrachtet.

§ 1.

Es sei nun $f(z)$ eine Schlichte Funktion für $|z| < 1$, dann ist

$$(1.1) \qquad |D(\zeta, z)| = \left| \frac{f(z) - f(\zeta z)}{z - \zeta z} \right| \geqq m(\rho) > 0$$

für $|z| \leqq \rho < 1, \quad |\zeta| \leqq 1, \quad (D(1, z) = f'(z) \neq 0)$.

Wir sprechen diese Eigenschaft einer jeden, im Inneren des Einheitskreises schlichten Funktion durch folgenden Satz aus:

Eine jede im Inneren des Einheitskreises schlichte analytische Funktion, ist im Inneren und auf der Grenze eines jeden mit dem Einheitskreise konzentrischen Kreises vom Radius $\rho (< 1)$ gleichmässig (oder auch stark) schlicht.

Diese Tatsache führt uns dazu, um eine Klasse von Funktionen zu studieren, welche für $|z| < 1$ der folgenden Bedingung genügen:

$$(1.2) \qquad |D(\zeta, z)| > 1.$$

Hieraus folgt zuerst, dass dann notwendig

$$(1.3) \qquad |f'(z)| \geqq 1$$

ist.

Diese Funktionen nennen wir, gleichmässig (oder auch stark) schlicht. Die gleichmässig schlichten Funktionen stehen in enger Beziehung mit den beschränkten Funktionen. Nämlich, bilden wir den Ausdruck

$$(1.4) \qquad F(\zeta, z) = \frac{1}{D(\zeta, z)}$$

so ist

$$(1.5) \qquad |F(\zeta, z)| < 1 \text{ in } |z| < 1, \text{ für jedes feste } |\zeta| \leqq 1.$$

Insbesonere es ist $\frac{1}{|f'(z)|} \leqq 1$. Machen wir nun die weitere Annahme, dass $f(z)$ mit $f(0) = 0$, ausserdem in $|z| < 1$ regulär sein soll, so sind wir dann im Stande, das sogenannte Koeffizientenproblem dieser Klasse zu behandeln. Aus der Ungleichung (1.1) folgt, für $\zeta = 0$, notwendig, dass für $|z| < 1$,

$$(1.6) \qquad |f(z)| \geqq |z|$$

sein muss. In dieser Ungleichung, das Gleichheitszeichen, kann nur für $f(z) = \varepsilon z$, mit $|\varepsilon| = 1$ stehen,

§ 2. Das Koeffizientenproblem

Um das Koeffizientenproblem der gleichmässig schlichten Funktionen zu studieren, sind wir nun im Stande die Schurschen Algorithmen zu benutzen. Das ist also die gleiche Methode, welche man für das Studium der analogen Fragestellung für die Beschränkten Funktionen sich bedient. Also, d.h. ist eine analytische Funktion gegeben, welche für $|z| < 1$, der Ungleichung

$$|f(z)| \leqq 1 \tag{2.1}$$

genügt, so folgt hieraus zuerst, dass $|f(0)| < 1$ ist, im Falle des Gleichheitszeichens, die Funktion $f(z)$ reduziert sich auf eine Konstante, d.h. es ist dann $f(z) = \varepsilon$, mit $|\varepsilon| = 1$. Im anderen Fall kann man den folgenden Ausdruck bilden:

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}\, f(z)}. \tag{2.2}$$

$f_1(z)$, genügt dann seinerseits der Bedingung $|f_1(z)| \leqq 1$ für $|z| < 1$. Das ist eine leichte Folgerung auf Grund des Schwarzschen Lemma's. Es ist wiederum $f_1(z) = \varepsilon_1$ mit $|\varepsilon_1| = 1$, falls $|f_1(0)| = 1$. Dann ist aber

$$f(z) = \frac{\varepsilon_1 z + f(0)}{1 + \overline{f(0)}\, \varepsilon_1 z} \tag{2.3}$$

also die Anfangsfunktion $f(z)$ hat eine wohlbestimmte Gestalt. Ist aber, $|f_1(0)| < 1$, so kann dieses Verfahren wiederholt werden. Also es unterscheiden sich zwei Fälle, nämlich: a) Entweder nach endlich vielen Schritten, stiesst man dem obengenannten Fall, d.h. $f_n(z)$ reduziert sich auf eine Konstante ε_n ($|\varepsilon_n| = 1$), d h.

$$f(z) = f_0(z),\ |f_0(0)| < 1,\ |f_1(0)| < 1, \ldots, |f_{n-1}(0)| < 1,\ |f_n(0)| = 1 \tag{2.4}$$

b) Oder das Verfahren ist ununterbrochen fortsetzbar, nämlich

$$|f_\lambda(0)| < 1 \quad \text{für} \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

Im Falle a) haben die Funktionen, wie zuerst I. Schur gezeigt hat eine wohlbestimmte Gestalt. Es ist nämlich, falls

$$|f_0(0)| < 1, \ldots, |f_{n-1}(0)| < 1, \quad |f_n(0)| = 1,$$

$$f(z) = \varepsilon \prod_{\nu=1}^{n} \frac{z + \omega_\nu}{1 + \overline{\omega}_\nu z} = \varepsilon \frac{z^n + \overline{k}_1 z^{n-1} + \ldots + \overline{k}_n}{1 + k_1 z + \ldots + k_n z^n} = \varepsilon z^n \frac{\overline{P(z^{-1})}}{P(z)} \tag{2.6}$$

mit $|\omega_\nu| < 1$, $|\varepsilon| = 1$.

Es seien $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ und $f_\nu(z) = a_{\nu 0} + a_{\nu 1} z + \ldots + a_{\nu_n} z^n + \ldots$ die Taylor Entwickelungen für $f(z)$ bzw. $f_\nu(z)$. Dann ist $f_\nu(0) = a_{\nu 0}$ eine wohlbestimmte Funktion von $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$ d.h.

$$f_\nu(0) = a_{\nu 0} = \Phi_\nu (a_0, \ldots, a_\nu)$$

und umgekehrt

$$a_\nu = \Psi_\nu(a_{00}, a_{10}, \ldots, a_{\nu 0}).$$

Die Bedingungen (2.4) und (2.5) stellen also die notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingungen für die Taylor Koeffizienten der analytishen Funktionen, welche für $| z | < 1$, der Ungleichung $| f(z) | \leqq 1$ genügen. Die Schursche Methode geht also aus, von der Möbiusschen Transformation, welche den Einheitskreis in sich abbildet und benutzt systematisch das Schwarzsche Lemma. Durch die Konstrucktion der succesiven Koeffiziententenräume, wird aber, das sogenannte Koeffizientenproblem derjenigen analytischen Funktionen, welche im Einheitskreise beschränkt sind, gelöst.

§ 3

Es sei nun $f(z)$ die in § 1 definierte, im Einheitskreise gleichmässig schlichte und reguläre, analytische Funktion und

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots = \Sigma a_k z^k \tag{3.1}$$

sei ihre Taylor Entwicklung. Es ist dann

$$| D(\zeta, z) | > 1 \quad \text{für} \quad | z | < 1, \quad \text{wo} \tag{3.2}$$

$$D(\zeta, z) = \frac{f(z) - f(\zeta z)}{z - \zeta z} = \Sigma a_k \left(\frac{1-\zeta^k}{1-\zeta}\right) z^{k-1} = a_1 + a_2(1+\zeta)z + \ldots + a_n(1+\zeta+\ldots+\zeta^{n-1}) z^{n-1} + \ldots \tag{3.3}$$

bedeutet. Bezeichnen wir nun

$$a_n (1 + \zeta + \ldots + \zeta^{n-1}) = \varphi_n (\zeta), \qquad \varphi_1 = a_1$$

und bilden wir

$$\frac{1}{D(\zeta, z)} = F(\zeta, z) = \frac{1}{\Sigma \varphi_\lambda(\zeta) z^{\lambda-1}} = \Sigma \Psi_k(\zeta) z^{k-1} \tag{3.4}$$

so lassen sich die Koeffizienten $\Psi_k(\zeta)$ folgendermassen ausdrücken:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{a_1}, \qquad \Psi_2 = \frac{-\varphi_2(\zeta)}{a_1^2} \tag{3.5}$$

und für $n > 2$

$$\Psi_n(\zeta) = \frac{(-1)^{n-1}}{a_1{}^n} \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \varphi_{n-1} & \varphi_{n-2} & \cdots & \cdots & \varphi_1 \\ \varphi_n & \varphi_{n-1} & \varphi_{n-2} & \cdots & \varphi_2 \end{vmatrix}$$

also sowohl φ_λ als auch Ψ_k sind wohlbestimmte von ζ abhängige Polynome. Es folgt aber nun aus (3.4) wegen (3.2), dass für $|z| < 1$ und für ein festes $|\zeta| \leqq 1$

(3.6) $$|F(\zeta, z)| < 1$$

ist. Demnach können wir wegen (3.5) und (1.1) folgenden Satz aussprechen:

Damit, eine im Einheitskreise reguläre analytische Funktion ebendort gleichmässig schlicht sein soll, ist notwendig und hinreichend, dass die Ausdrücke $\Phi_n(\Psi_1(\zeta),\ldots, \Psi_n(\zeta))$ sämtlich (d.h. für $n = 1, 2, \ldots\ldots$) der Ungleichung

(3.7) $$|\Phi_n(\zeta)| < 1, \quad |\zeta| < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

genügen. Wenn man die Ausführungen des § 2 verfolgt, so kann man leicht sehen, dass wegen Maximumprinzips, nur für bestimmte aber dann isolierte ζ-Werte, mit $|\zeta| = 1$ irgend ein $|\Phi_n(\zeta)| = 1$ sein kann. Das hängt natürlich von der besonderen Beschaffenheit der Anfangsfunktion ab. Das hindert uns aber nicht um das Verfahren fortzusetzen, falls wir uns der einschränkenden Bedingung $|\zeta| < 1$, anhalten. Das zutreffen dieses Verhaltens für $\zeta = 1$ verdient besondere Beachtung, da ja dann $D(1, z) = f'(z)$ ist. Es sei nun zum Beispiel $|\Phi_n(1)| = 1$, dann folgt aber wegen (2.6), dass $f'(z)$ folgende Gestalt haben muss, nämlich:

$$f'(z) = \varepsilon \prod \frac{z + \omega_k}{1 + \bar{\omega}_k z}, \quad |\varepsilon| = 1, \quad |\omega_k| < 1$$

Durch einfache Integration erhält man hieraus für $f(z)$ folgenden Ausdruck:

$$f(z) = \varepsilon\Big(k_0 z + \sum_{\mu=1}^{n} k_\mu \log(z + \omega_\mu)\Big), \text{ mit } k_0 = \prod_{\mu=1}^{n} \bar{\omega}_\mu \quad \text{und}$$

$$k_\lambda = \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \omega_\lambda \bar{\omega}_\mu}{-\omega_\lambda + \omega_\mu}; \quad \mu \neq \lambda.$$

Allein die Feststellung, dass diese Funktion im Inneren des Einheitskreises logaritmische Pole besitzt, genügt zu sehen, dass sie nicht von gewünschter Art ist. Dieser Umstand ist aber nicht unerwartet, weil ja die Bedingung wie wir am Anfang erwähnt haben ist nur eine notwendige.

(Eingegangen am 18.5.1953)