Analytische Behandlung und Berechnung von Hypoidrädern

von E. EGESOY

(*Mathematisches Institut der Universität Ankara*)

Özet : Bu araştırmada, hipoid çarkların hesabına geçmeden önce, uzayda Φ ve Φ' zarf yüzeylerinin diferensiyel denklemi (§ 1) ve onların genel çözümüne (§ 2) gidilmiştir. (§ 3) de küre üzerinde tarif edilen kapalı D dönme hareketinden (§ 4) de çizgiler uzayına geçilmiş ve diferensiyel denklemin genel bir çözümü verilmiştir (§ 5). Φ' zarf yüzeyinin denklemi de dual birim vektörlerin karşılaştırılmasından faydalanarak hesaplanmıştır.

* * *

I. Wie in der ebenen und sphärischen Kinematik, gilt auch im Raum das Gesetz von der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_f + \vec{V}_r$$

Es sei ϕ eine Fläche mit der Gleichung

$$x_i = x_i\,(t,\ u) \qquad i = 1,\ 2,\ 3\ ,$$

die im Gangraum R ruhe. Bei einem ein-gliedrigen Bewegungsvorgang B_I nimmt sie ∞^1 verschiedene Lagen im Rastraum R′ ein, die im allgemeinen eine Einhüllende ϕ', mit der Gleichung

$$x_i' = x_i'\,(t,\ u) \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

besitzen. Wir bezeichnen diese Fläche ϕ' als die Hüllbahnfläche oder kurz Hüllbahn von ϕ bei B_I. Die beiden werden sich zu einem Zeitpunkt t längs einer Kurve k berühren, die man Charakteristik nennt (k.. t = konst., u = veränd).

Wir betrachten einen Punkt X dieser Kurve. Im Verlaufe von B_I bewegt sich dieser Punkt X von ϕ und ϕ' sowohl auf der Fläche ϕ (C... $u =$ konst., $t =$ veränd.), wie auch auf der Fläche ϕ' (C' ... $u =$ konst., $t =$ veränd.). Die Kurve C wird hierbei mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{V}_r = \vec{X}_t$ durchlaufen, die auch die vektorielle Änderung (nach der Zeit t) von X gegenüber R bedeutet. Ebenso wird die Bahnkurve auf ϕ' mit der Absolutgeschwindigkeit $\vec{V}_a$, der Geschwindigkeit von X gegen R' beschrieben. Die drei Vektoren $\vec{V}_a$, $\vec{V}_r$ und $\vec{X}_u$ fallen in die gemeinsame Tangentialebene von ϕ und ϕ':

(1) $$\vec{X}_t = \lambda \vec{V}_a + \mu \vec{X}_u$$

Da

$$\vec{V}_f = \vec{\overline{\Omega}} + \vec{\Omega} \times \vec{X}$$

ist, so ist

$$\vec{V}_a = \vec{X}_t + \vec{\overline{\Omega}} + \vec{\Omega} \times \vec{X}$$

$\vec{\overline{\Omega}}$, $\vec{\Omega}$ bestimmt hierbei die Momentan Schraube. Nach (1) haben wir somit

$$\vec{X}_t = \lambda \left[\vec{X}_t + \vec{\overline{\Omega}} + \vec{\Omega} \times \vec{X}\right] + \mu \vec{X}_u$$

oder

(2) $$\boxed{P\vec{X}_t + Q\vec{X}_u = \vec{\overline{\Omega}} + \vec{\Omega} \times \vec{X}}$$

mit

$$P = \frac{1-\lambda}{\lambda}, \qquad Q = -\frac{\mu}{\lambda}$$

Die Hüllbahnflächen ϕ und ϕ' sind also bei einem beliebigen Bewegungsvorgang im Raum durch die Differentialgleichung (2) gekennzeichnet.

II. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2) unterscheidet sich von der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung nur durch eine additiv hinzutretende Funktion, die selbst eine beliebige partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Wenn wir beide Seiten dieser homogenen Gleichung

$$(3) \qquad P\,\vec{X}_t + Q\,\vec{X}_u = \vec{\Omega} \times \vec{X}$$

mit $\vec{X}$ skalar multiplizieren, so erhalten wir:

$$P\left(\vec{X}\,\vec{X}_t\right) + Q\left(\vec{X}\,\vec{X}_u\right) = 0$$

Wegen
$$X = \sqrt{\vec{X}^2} \quad \text{und}$$

$$X_t = \frac{\left(\vec{X}\,\vec{X}_t\right)}{\sqrt{\vec{X}^2}}, \qquad X_u = \frac{\left(\vec{X}\,\vec{X}_u\right)}{\sqrt{\vec{X}^2}}$$

finden wir

$$(4) \qquad PX_t + QX_u = 0$$

Nehmen wir im besonderen an, P *und* Q *sei fest* und suchen wir das allgemeine Integral von (4):

$$\left.\begin{aligned} dt : du &= P : Q \\ dX &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Charakteristik}$$

$$Pu - Qt = c_1$$

$$X = c_2$$

Also ist das Allgemeine Integral von (4):

$$X = X\,(Pu - Qt)$$

Hier ist X eine willkürliche Funktion von $(Pu - Qt)$.

Um die Natur der Differentialgleichung (3) zu entersuchen setzen wir

$$(5) \qquad \xi = \frac{x_1 + ix_2}{X - x_3} \qquad \text{und} \qquad \eta = \frac{x_1 - ix_2}{X - x_3}$$

ein. Durch Umkehrung erhalten wir:

$$x_1 = \frac{\xi + \eta}{\xi\eta + 1}\,X, \qquad x_2 = -i\,\frac{\xi - \eta}{\xi\eta + 1}\,X, \qquad x_3 = \frac{\xi\eta - 1}{\xi\eta + 1}\,X$$

Um nun unsere vektorielle Differentialgleichung (3) in diese neuen Koordinaten zu übertragen, leiten wir (5) nach t *ab*, bilden also

$$P\,\xi_t + Q\,\xi_u \qquad \text{und} \qquad P\,\eta_t + Q\,\eta_u\,.$$

Wir finden so die beiden konjugierten Differentialgleichungen:

$$(6) \qquad P\,\xi_t + Q\,\xi_u = \frac{1}{2}\left[-(\Omega_2 + i\,\Omega_1)\xi^2 + 2i\Omega_3\xi - (\Omega_2 - i\,\Omega_1)\right] = R(t, u)$$

$$(7) \qquad P\,\eta_t + Q\eta_u = \frac{1}{2}\left[-(\Omega_2 - i\,\Omega_1)\eta^2 - 2i\Omega_3\eta - (\Omega_2 + i\Omega_1)\right] = T(t, u)$$

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung (6) führt uns auf die Lösung der folgenden RICCATIschen Differentialgleichung:

$$(8) \qquad \dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2p}\left[-(\Omega_2 + i\,\Omega_1)\,\xi^2 + 2\,i\,\Omega_3\,\xi - (\Omega_2 - i\,\Omega_1)\right]$$

III. Als ein Beispiel betrachten wir zuerst den geschlossenen Drehvorgang D auf der Kugel, dessen Polbahnen K reise mit rationalem Umfangverhältnis sind. Bei geeigneter Wahl der Achsenkreuze können wir für die Polbahnen setzen [1].

$$\vec{P} = \vec{E}_1 \sin P \cos nt + \vec{E}_2 \sin P \sin nt + \vec{E}_3 \cos P$$

$$\vec{P'} = -\vec{E'}_1 \sin P' \cos nt - \vec{E'}_2 \sin P' \sin nt\, \vec{E'}_3 \cos P'$$

P und P′ sind die spharischen Radien.

Der Zusammenhang zwischen Gang-und Rastkreuz sei durch

$$\vec{E'}_j = A_{jk}\,\vec{E}_k \qquad (j = 1,\ 2,\ 3)$$

gegeben, wobei die A_{jk} eine orthogonale Matrix bilden und differenzierbare Funktionen eines reellen Parameters t (Zeit) sein mögen. Für den so erklärten eingliedrigen Drehvorang D berechnen wir zuerat die A_{jk}, dann den Drehvektor $\vec{\Omega}$. Nach der Definition unseres Bewegungsvorgangs können wir sofort

$$A_{33} = \cos(P + P')$$

schreiben

Da

$$\vec{P} = \vec{P'} \qquad \text{und} \qquad \dot{\vec{P}} = \dot{\vec{P'}}$$

ist, so erhalten wir Folgendes:

$$n \sin P = -\,n' \sin P'$$

und

$$A_{11} = \cos(P+P')\cos nt \cos n't + \sin nt \sin n't$$
$$A_{12} = \cos(P+P')\sin nt \cos n't - \cos nt \sin n't$$
$$A_{13} = -\sin(P+P')\cos n't$$
$$A_{21} = \cos(P+P')\cos nt \sin n't - \sin nt \cos n't$$
$$A_{22} = \cos(P+P')\sin nt \sin n't + \cos nt \cos n't$$
$$A_{23} = -\sin(P+P')\sin n't$$
$$A_{31} = \sin(P+P')\cos nt$$
$$A_{32} = \sin(P+P')\sin nt$$
$$A_{33} = \cos(P+P')$$

Da sich die Umkehrung der orthogonalen Transformation leicht, nämlich in der Form

$$\vec{E}_k = A_{lk}\,\vec{E}'_l$$

schreiben läset, finden wir

$$\dot{\vec{E}}_k = \sum_{l,\,m=1}^{3} \dot{A}_{lk}\,A_{lm}\,\vec{E}_m = \Omega_{km}\,\vec{E}_m$$

Wir wissen, dass $\| \Omega_{km} \|$ eine schief-symmetrische Matrix ist, also

$$\Omega_{km} + \Omega_{mk} = 0$$

gilt. Da im besonderen $\Omega_{kk} = 0$ ist, treten nur drei wesentliche Grössen in der Matrix $\| \Omega_{km} \|$ auf. Wir bezeichnen sie kürzer mit

$$\Omega_{km} = \Omega_n$$

für zyklische Anordnungen der drei Indizes $k, m, n = 123, 231, 312$. Nach diesen Definitionen können wir leicht die Ω_k berechnen:

$$\Omega_1 = (\dot{A}_{12}A_{13} + \dot{A}_{22}A_{23} + \dot{A}_{32}A_{33})\,dt = n'\sin(P+P')\cos nt\,dt$$
$$\Omega_2 = (\dot{A}_{13}A_{11} + \dot{A}_{23}A_{21} + \dot{A}_{33}A_{31})\,dt = n'\sin(P+P')\sin nt\,dt$$
$$\Omega_3 = (\dot{A}_{11}A_{12} + \dot{A}_{21}A_{22} + \dot{A}_{31}A_{32})\,dt = [-n+n'\cos(P+P')]\cdot dt$$

IV. E. Study's Übertragungsprinzip der Liniengeometrie besteht in der ein-eindeutigen Abbildung der gerichteten Geraden des dreidimensionalen Euklidischen Raumes auf die dualen Punkte der Einheitskugel. Besitz ein Strahl G den Richtugsvektor $\vec{g}$ und den Momentvektor $\vec{\bar{g}}$ um den Ursprung o, so wird das Vektorpaar $\vec{g}$, $\vec{\bar{g}}$ zum dualen Einheitsvektor

$$\vec{G} = \vec{g} + \varepsilon \vec{\bar{g}} \qquad (\text{mit } \varepsilon^2 = 0)$$

zusammengefasst.

Erweitern wir nun den zwangläufigen, geschlossenen Derhvorgang D ins Duale, so erhalten wir durch Übertragung einen zwangläufigen, geschlossenen Bewegungsvorgang B_I in Euklidischen Linienraum. Hierzu sehen wir alle durch grosse Buchstaben bezeichneten Grössen als duale Zahlen, bzw. Vektoren an, deren Realteil wir durch die zugehörigen kleinen Buchstaben ausdrücken; die Dualteile mögen dann durch Überstreichen angedeutet werden.

Wir wissen, dass die Übertragung in den Linienraum die beiden aufeinander rollenden Polkreise in zwei Drehhyperboloide überführt, die aufeinander schroten [1]:

Bevor wir die Formeln (6) und (7) auf unsere Beispiel anwenden, berechnen wir die infinitesimale Drehung und Schiebung.

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \varepsilon \vec{\bar{\omega}} = \Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2 + \Omega_3 \vec{e}_3 \qquad (\text{Moment bezügl. o})$$

$$\vec{\omega} = n' \sin(\rho + \rho') \cos nt \, \vec{e}_1 + n' \sin(\rho + \rho') \sin nt \, \vec{e}_2 + [-n + n' \cos(\rho + \rho')] \, \vec{e}_3$$

$$\vec{\bar{\omega}} = n' (\bar{\rho} + \bar{\rho}') \cos(\rho + \rho') \cos nt \, \vec{e}_1 + n' (\bar{\rho} + \bar{\rho}' \cos(\rho + \rho') \sin nt \, \vec{e}_2 - n' (\bar{\rho} + \bar{\rho}') \sin(\rho + \rho') \, \vec{e}_3$$

$$[\text{mit } \quad P = \rho + \varepsilon \bar{\rho} \qquad \text{und} \qquad P' = \rho' + \varepsilon \bar{\rho}']$$

oder

$$\vec{\omega} = 2a \cos nt \, \vec{e}_1 + 2a \sin nt \, \vec{e}_2 + b \, \vec{e}_3$$

$$\vec{\bar{\omega}} = \bar{a} \cos nt \, \vec{e}_1 + \bar{a} \sin nt \, \vec{e}_2 + \bar{b} \, \vec{e}_3$$

mit

$$\begin{cases} 2a = n' \sin(\rho + \rho) & , \quad \bar{a} = n'(\bar{\rho} + \bar{\rho}' \cos(\rho + \rho') \\ b = -n + n' \cos(\rho + \rho'), & \bar{\delta} = -n'(\bar{\rho} + \bar{\rho}') \sin(\rho + \rho') \end{cases}$$

Mit diesen Abkürzungen ergibt sich die RICCATIsche Differentialgleichung (8) in der Form :

$$\dot{\xi} = \frac{1}{P}(ia\, e^{-int}\, \xi^2 + ib\, \xi + i\, a\, e^{int})$$

oder

$$\dot{\xi} = -i\, A e^{-int}\, \xi^2 + i\, B\, \xi + i\, A\, e^{int}\ , \qquad (A = a : P, \quad B = b : P)$$

Eine spezielle Lösung der Gestalt

$$\xi = K\, e^{int}$$

drängt sich auf und führt zur (quadratischen) Bestimmungsgleichung

$$AK^2 + (n - B) \cdot K - A = 0$$

für die reelle Konstante K. Dass allgemeine integral des Systems

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -i\, A\, e^{-int}\, \xi^2 + i\, B\, \xi + i\, A\, e^{int} \\ \dot{\eta} &= i\, A\, e^{int}\, \eta^2 - i\, B\, \eta - i\, A\, e^{-int} \end{aligned}$$

ist

$$\xi = \frac{1 + W\, K\, e^{i(n+p)t}}{-K + W\, e^{i(n+p)t}} \cdot e^{int} \qquad (p = 2\, AK - B, \quad W = W(c_1))$$

$$\eta = \frac{1 + W\, K\, e^{-i(n+p)t}}{-K + W\, e^{-i(n+p)t}} \cdot e^{-int}$$

Die Parameterdarstellung der Lösung des homogenes Systems ist daher :

$$x_1 = 2X\left[(W^2 - 1)\cos nt + W \cos pt - WK^2 \cos(2n + p)t\right] : (W^2 + 1)(K^2 + 1)$$

$$x_2 = 2X[(W^2 - 1)\sin nt - W \sin pt - WK^2 \sin(2n + p)]\, t : (W^2 + 1)(K^2 + 1)$$

$$x_3 = X\left[(W^2 - 1)(K^2 - 1) + 4\, WK \cos(n + p)t\right] : (W^2 + 1)(K^2 + 1)$$

oder

$$\vec{X}_h = x_1\, \vec{e}_1 + x_2\, \vec{e}_2 + x_3\, \vec{e}_3.$$

V. Suchen wir jetzt die spezielle Lösung des inhomogenen Systems:

$$P\vec{x}_t + Q\vec{x}_u = \vec{\bar{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{X}$$

oder

$$P x_t + Q x_u = -by + a \sin nt\, z + \bar{a} \cos nt$$

$$P y_t + Q y_u = bx - a \cos nt\, z + \bar{a} \sin nt$$

$$P Z + Q Z = -a \sin nt\, x + a \cos nt\, y + \bar{b}$$

Wir suchen den Ansatz:

$$x = A + B \sin nt + C \cos nt$$

$$y = D + E \sin nt + F \cos nt$$

$$Z = L + M \sin nt + N \cos nt$$

mit

$$A = a_1 + a_2 u\,, \quad B = b_1 + b_2 u\,, \quad C = c_1 + c_2 u$$

$$D = d_1 + d_2 u\,, \quad E = e_1 + e_2 u\,, \quad F = f_1 + f_2 u$$

$$L = l_1 + l_2 u\,, \quad M = m_1 + m_2 u\,, \quad N = n_1 + n_2 u$$

Wir finden sofort:

$$N = M = 0\,, \quad E = C\,, \quad F = -B$$

und

$$A = D = 0$$

Also

$$x = B \sin nt + C \cos nt$$

$$y = C \sin nt - B \cos nt$$

$$Z = L$$

$$b_2 = c_1 = l_1 = 0$$

$$b_1 = \frac{a\bar{b} + \bar{a}(pn-b)}{a^2 + (pn-b)^2}$$

$$c_2 = \frac{a\left[a\bar{a} + \bar{b}(b-pn)\right]}{Q\left[a^2 + (b-pn)^2\right]}$$

$$l_2 = \frac{(b-pn)\left[a\bar{a} + \bar{b}(b-pn)\right)}{Q\left[a^2 + (b-pn)^2\right]}$$

$$x = b_1 \sin nt + c_2 u \cos nt$$

$$y = -b_1 \cos nt + c_2 u \sin nt$$

$$z = l_2 u$$

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{a}{b - pn}\right)^2 z^2 = b_1{}^2 \qquad \text{Drehhyperboloide.}$$

Spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist

$$\vec{S} = (b_1 \sin nt + c_2 u \cos nt)\, \vec{e_1} + (-b_1 \cos nt + c_2 u \sin nt)\, \vec{e_2} + l_2\, u\, \vec{e_3}.$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (2) ist:

$$\vec{X} = \vec{X_h} + \vec{S}\,.$$

VI. Die Hüllflächen ϕ' des Rastraumes ergeben sich durch die Transformation

$$\vec{X'} = \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Ox} = \vec{U} + \vec{X}$$

oder

$$X'_i = a_{ik}\,(x_k + u_k) \qquad i,\ k = 1,\ 2,\ 3$$

$$\vec{E_i} = \vec{e_i} + \varepsilon\, \vec{\bar{e}_i} \qquad \vec{\bar{e}_i} = 0 \qquad \text{(Moment bezügl. o)}$$

$$\vec{E'_i} = \vec{e'_i} + \varepsilon\, \vec{\bar{e}'_i} \qquad \vec{\bar{e}_i} = -\vec{u} \times \vec{e'_i}$$

$$\vec{E'_i} = A_{ik}\, \vec{e_i} \qquad A_{ik} = a_{ik} + \varepsilon\, \bar{a}_{ik}$$

$$\vec{e'_i} = a_{ik}\, \vec{e_k} \qquad \text{und} \qquad \bar{a}_{ik}\, \vec{e_k} = -\vec{u} \times \vec{e'_i}$$

$$\vec{\bar{a}_{ik}}\ \vec{e_k} = \vec{e_1}\, a_{i2}\, u_3 - a_{i3}\, u_2) + \vec{e_2}\,(a_{i3}\, u_1 - a_{i1}\, u_3) + \vec{e_3}\,(a_{i1}\, u_2 - {}_{i2}\, u_1)$$

$$\bar{a}_{i2}\, u_3 - a_{i3}\, u_2 = \bar{a}_{i1}\,,\ a_{i3}\, u_i - a_{i1}\, u_3 = \bar{a}_{i2}\,,\ a_{i1}\, u_2 - a_{i2}\, u_1 = \bar{a}_{i3}\ i = 1,2,3$$

$$u_1 = (a_{21}\, \bar{a}_{12} - a_{11}\, \bar{a}_{22}) : a_{32}$$

$$u_2 = (a_{22}\, \bar{a}_{11} - a_{12}\, \bar{a}_{21}) : a_{31}$$

$$u_3 = (a_{23}\, \bar{a}_{12} - a_{13}\, \bar{a}_{22}) : a_{32}$$

Da

$$a_{11} = \cos(\rho + \rho') \cos nt \cos n't + \sin nt \sin n't$$

$$a_{12} = \cos(\rho + \rho') \sin nt \cos n't - \cos nt \sin n't$$

$$a_{13} = -\sin(\rho + \rho') \cos n't$$

$$a_{21} = \cos(\rho + \rho') \cos nt \sin n't - \sin nt \cos n't$$

$$a_{22} = \cos(\rho + \rho') \sin nt \sin n't + \cos nt \cos n't$$

$$a_{23} = -\sin(\rho + \rho') \sin n't$$

$$a_{31} = \sin(\rho + \rho') \cos nt$$

$$a_{32} = \sin(\rho + \rho') \sin nt$$

$$a_{33} = \cos(\rho + \rho')$$

$$\bar{a}_{11} = -(\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \sin(\rho + \rho') \cos nt \cos n't$$

$$\bar{a}_{12} = -(\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \sin(\rho + \rho') \sin nt \cos n't$$

$$\bar{a}_{13} = -(\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \cos(\rho + \rho') \cos n't$$

$$\bar{a}_{21} = -(\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \sin(\rho + \rho') \cos nt \sin n't$$

$$\bar{a}_{22} = -(\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \sin(\rho + \rho') \sin nt \sin n't$$

$$\bar{a}_{23} = -(\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \cos(\rho + \rho') \sin n't$$

$$\bar{a}_{31} = (\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \cos(\rho + \rho') \cos nt$$

$$\bar{a}_{32} = (\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \cos(\rho + \rho') \sin nt$$

$$\bar{a}_{33} = -(\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \sin nt$$

sind, finden wir für $\vec{u}$:

$$u_1 = (\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \sin nt$$

$$u_2 = -(\bar{\rho} + \overline{\rho'}) \cos nt$$

$$u_3 = 0 .$$

Literaturverzeichnis

[1] H. R. Müller, Über geschlossene Bewegungsvorgänge. Mon Für Math. 55, (206—214), 1951