Die Übertragung der Konstruktion von E. E. Bobillier in den Linienraum

von E. EGESOY

(Mathematisches Institut der Universität Ankara)

Özet: Bundan evvel neşredilen bir yazımızda, E. Study tekabül prensibinden faydalanarak, Savary inşasının çizgiler uzayına teşmili tetkik edilmişti. Bu makalemizde, yine aynı prensip kullanılarak, Savary inşasının daha genel hali olan E. E. Bobillicr çiziminin çizgiler uzayına teşmili incelenmiştir. Bu teoremin, bir parametreli düzlem hareketlere ait ifadesi şöyledir:

İki pol ışını üzerindeki X ve Y noktalarının yörüngelerinin bu noktalara ait eğrilik merkezleri X′ ve Y′ ise, XY ve X′Y′ doğruları daima sabit bir pol aşını üzerinde kesişirler; bu sabit pol ışınının durumu verilen pol ışınlarına bağlıdır. Alınan pol ışınlarından biri P polü etrafında dönerse, pol ışını da aynı açı kadar aynı yönde döner.

Bu teoremden faydalanarak verilen herhangi üçüncü bir noktaya tekabül eden eğrilik merkezi bulunabilir.

Bu yazımızda, bu teoremin küre üzerindeki karşılığı özetlenerek duale teşmil edilmiştir. Burada dual sayılar ve dual vektörlerin özelliklerinden ve bilhassa dual bir kürenin bir eksen etrafındaki dönmesine üç boyutlu Öklid uzayında bir «yivlenme» nin tekabül etmesinden faydalanılmıştır.

Şimdi çizimde ne yapıldığını özetleyelim:

R hareketli uzayı R′ sabit uzayına nazaran bir parametreli bir hareekt icra etsin. R nin X ve Y gibi sabit iki doğrusunun R′ de tevlit ettiği regle yüzeylere ait W. Blascchke üçyüzlülerini M ve N ile gösterelim. M/R′ va N/R′ hareketlerine ait âni dönme eksenlerini de X′ ve Y′ ile işaret edelim.

Önce, kanonik izafe sisteminde X, X′ ve Y doğruları bilindiğine göre Y′ doğrusunun çizimi verilmişfir. Tatbikatında isa, R nin X, Y ve Z sabit doğruları ve bunlarla ilgili X′, Y′ âni dönme eksenleri verildiğine göre, kanonik izafe sistemine bağlı olmaksızın, Z doğrusu ile ilgili Z′ âni dönme ekseninin nasıl çizileceği gösterilmiştir.

* * *

Zusammenfassung: Mit Hilfe des Übertragungsprinzipes der Liniengeometrie von E. Study [1] haben wir schon in einer früheren Arbeit die Übertragung der Savaryschen Konstruktion in den Linienraum behandelt [2].

Wir wollen jetzt mit der Verwendung desselben Prinzipes die Konstruktion von E. E. Bobillier, die noch allgemeiner als die Savarysche Konstruktion ist, in den Linienraum übertragen. Für die Ebene heisst der Satz von E. E. Bobillier:

Liegen auf zwei Polstrahlen zwei Paare zusammengehöriger*) Punkte X, X′ und Y, Y′, dann schneiden sich XY und X′ Y′ immer in den Punkten einer festen Achse, die nur von den beiden Polstrahlen abhängt. Dreht sich einer der beiden Polstrahlen um den Drehpol P, so dreht sich die zugehörige Achse um den gleichen Winkel im gleichen Sinn [3].

Man kann mit Hilfe dieses Satzes zu einem beliebigen dritten Punkt den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt finden.

In der vorliegenden Arbeit wird erst das sphärische Gegenstück dieses Satzes formuliert und ins Duale erweitert. Hierbei werden Eigenschaften der dualen Zahlen und Vektoren verwendet, insbesondere wird das Entsprechen einer dualen Kugel-Drehung und einer Schraubung benutzt.

Im Linienraum lautet die Konstruktion :

Der bewegliche Raum R führe einen einparametrigen Bewegungsvorgang gegen den festen Raum R′ aus. Die festen Geraden X und Y von R erzeugen im Verlaufe des Bewegungsvorgangs in R′ die Strahlflächen $(\overline{X})$ und $(\overline{Y})$ Die W. Blaschke-Dreibeine [4] von $(\overline{X})$ und $(\overline{Y})$ bezeichnen wir mit M und N. Die Momentanachsen von M/R′ und N/R′ seien die Geraden X′ und Y′.

Zuerst wirt bei Vorgabe der Geraden X, X′ und Y im kanonischen Bezugskreuz die Gerade Y′ konstruiert. Im letzten Abschnitt wird gezeigt, wie die der Geraden Z zugehörige Momentanachse Z′ unabhängig vom kanonischen Bezugskreuz gefunden werden kann, wenn die festen Geraden X, Y und Z von R und die Momentanachsen X′, Y′ bekannt sind.

Das sphärische Gegenstück des Satzes von E. E. Bobillier.

Wir betrachten zwei kozentrische Einheitskugeln K und K′. K sei eine bewegliche Kugelschale (Gangkugel) und K′ sei eine feste Kugelschale (Rastkugel). Um einen eingliedrigen Bewegungsvorgang K/K′ festzulegen, nehmen wir das kanonische Bezugskreuz $\{0\,;\, P_1\,,\, P_2\,,\, P_3\}$ aus [5]. Wir bezeichnen mit p_3 den Grosskreis, der die Punkte P_1 und P_2 enthält (Fig. 1). Die sphärischen Polstrahlen, die durch den Punkt P_1 gehen und mit p_3 die Winkel Φ und θ bilden, bezeichnen wir mit g_1 und g_2. X und Y seien zwei auf der Gangkugel K befestigte Punkte, X′ und Y′ seien die zugehörigen sphärischen Krümmungsmittelbunkte ihrer Bahn auf der Rastkugel K′. Die Grosskreise, die der Reihe nach die Punkte X, Y und X′, Y′ enthalten, bezeich- wir mit a und a'. Die beiden Grosskreise a und a' schneiden sich in einem Punkt U. Den sphärischen Polstrahl, der durch die Punkte P_1 und U geht, nennen wir g_0. Das sphärische

*) Bahnpunkt und Bahnkrümmungsmittelpunkt bei einem einparametrigen Bewegungsvorgang.

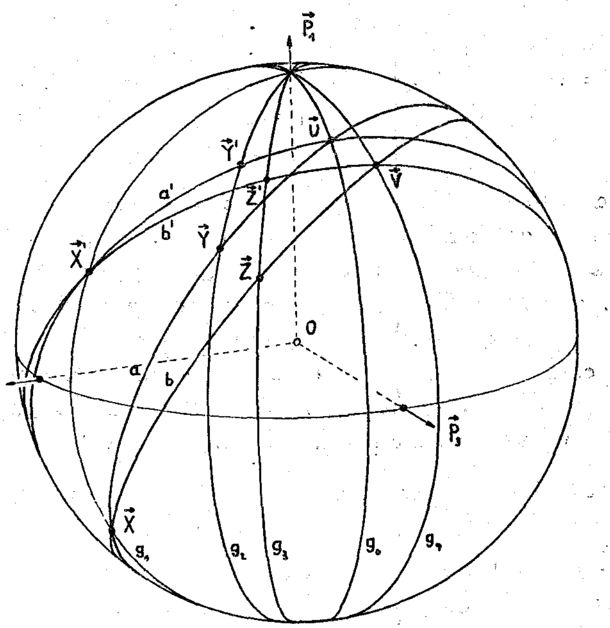

Fig. 1

Gegenstück des Satzes von E. E. Bobillier besagt, dass g_0 den Winkel $\Phi + \theta$ mit p_3 bildet [6].

Die Konstruktion von E. E. Bobillier in der sphärischen Kinematik.

Wenn die Punkte X, X' und Y gegeben sind, findet man den Punkt Y' nach diesem Satz auf folgende Weise:

Da $\widehat{(p_3, g_1)} = \widehat{(g_2, g_0)} = \Phi$ ist, so kann der Polstrahl g_0 leicht ermittelt werden. Dann findet man den Schnittpunkt U mit g_0 und a. Den Polstrahl, der durch die Punkte X' und U führt, bezeichnen wir mit a'. Der gesuchte Punkt Y' ist der Schnittpunkt von g_2 und a'.

Die Üpertragung der Konstruktion von E. E. Bobillier in den Linienraum.

Die Senkrechten im Punkte O auf den Ebenen der Grosskreise p_3, g_0, g_1, g_2, a und a' schneiden die Kugel der Reihe nach in den Punkten P_3, G_0, G_1, G_2, A und A'. Daraus ergeben sich folgende Beziehungen:

I	II	III	IV	V	VI
1. $P_3G_1=\cos\Phi$	1. $G_1X=0$	1. $G_2Y=0$	1. $G_0U=0$	1. $AX=0$	1. $A'X'=0$
2. $G_2G_0=\cos\Phi$	2. $G_1X'=0$	2. $G_2Y'=0$	2. $G_0P_1=0$	2. $AY=0$	2. $A'Y'=0$
	3. $G_1P_1=0$	3. $G_2P_1=0$		3. $AU=0$	3. $A'U'=0$

Nach Study's Übertragungsprinzip der Liniengeometrie können den gerichteten Geraden des dreidimensionalen Euklidischen Raumes die dualen Punkte der Einheitskugel eineindeutig zugeordnet werden. Da den dualen Drehungen der Einheitskugel eineindeutig die Bewegungen des dreidimensionalen Raumes entsprechen, denken wir uns den obigen zwangläufigen Drehungsvorgang K/K' ins Duale erweitert. Die auftretenden Grössen seien also dualen Zahlen bzw. Vektoren gleich.

Durch duale Übertragung werden aus den Bahnkurven (X) und (Y) zweier in K befestigter Punkte X und Y die Bahnflächen $(\overline{X})$ und $(\overline{Y})$ der im Gangraum R festen Geraden X und Y.

Wir bezeichnen jetzt die W. Blaschke-Dreibeine der zugehörigen Bahnflöchen mit $M(X=X_1, X_2, X_3)$ und $N(Y=Y_1, Y_2, Y_3)$. Die Momentanachsen der Bewegungen M/R' und N/R' benennen wir mit X' und Y'. Die Konstruktion von E. E. Bobillier im Linienraum besteht aus der Konstruktion der Geraden Y', wenn die Geraden X, X' und Y gegeben sind.

Jetzt beschreiben wir unsere Konstruktion: Aus den Bedingungen II_3 und III_3 folgern wir, dass die Geraden G_1 und G_2 die Gerade P_1 rechtwinkelig schneiden. Zuerst zeichnen wir diese beiden Geraden. Dann zeichnen wir die Geraden X, X' und Y und berücksichtigen die Gültigkeiten II_1, II_2 und III_1.

Setzen wir $\Phi=\varphi+\varepsilon\varphi_0$ in der Bedingung I_1 ein, so bedeutet in der dualen Zahl Φ der Reelteil φ den Winkel (euklidisch) und der Dualteil φ_0 den kürzesten Abstand der beiden Geraden P_3 und G_1. Aus der Bedingung I_2 können wir entnehmen, dass die Geraden G_2 und G_0 denselben Winkel und kürzesten Abstand haben wie die Geraden P_3 und G_1.

Da die Geraden G_1 und G_2 bekannt sind, kan man die Gerade G_0 so konstruieren, dass die Bedingung IV_2 erfüllit ist. Wenn wir der Reihe nach die folgenden Konstruktionen ausführen, finden wir leicht die Gerade Y' (Fig. 2):

Mit Hilfe von	V_1	und	V_2	konstruirt man das Gemeinlot	A	von	X	und Y.
»	IV_1	»	V_3	» »	U	»	G_0	» A.
»	VI_1	»	VI_3	» »	A′	»	X′	» U,
»	III_2	»	VI_2	» »	Y′	»	G_2	« A′

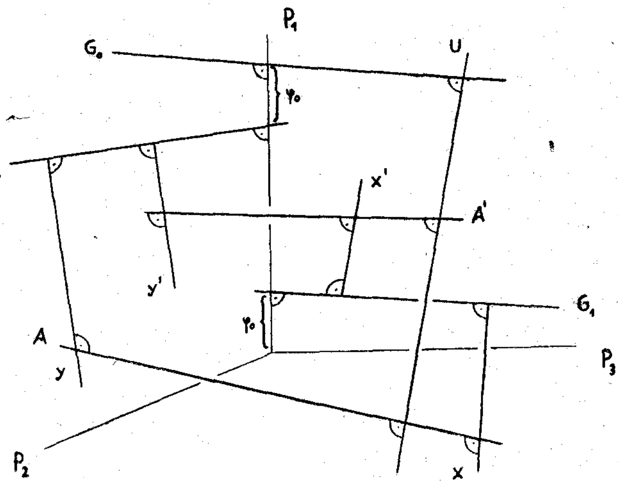

Fig. 2

Eine Anwendung der Konstruktion von E. E. Babillier im Linienraum.

Liegen auf zwei sphärischen Polstrahlen g_1 und g_2 zwei Paare zusammengehöriger Punkte X, X′ und Y, Y′, dann schneiden sich a und a' immer in den Punkten eines festen sphärischen Polstrahl g_0, der nur von den Polstrahlen g_1 und g_2 abhängt. Dreht sich z. B. der Polstrahl g_2 um den Winkel Ω um P_1, so dreht sich der zugehörige sphärische Polstrahl g_0 um den gleichen Winkel im gleichen Sinn. Hiermit kann man zu einem festen beliebigen Punkt Z, der auf dem Polstrahl g_3 liegt, den entsprechenden Z′ finden (Fig. 1).

Die Grosskreise, die der Reihe nach die Punkte X, Z und X′, Z′ enthalten, bezeichnen wir mit b und b'. b und b' schneiden sich in einem Punkt V. Den sphärischen Polstrahl, der durch die Punkte V und P führt, nennen wir g_4.

Die Senkrechten im Punkte O auf den Ebenen der Grosskreise g_3, g_4, b und b' schneiden die Kugel der Reihe nach in den Punkten G_3, G_4, B und B'. Man kann daher folgende Bedingungen schreiben:

I	II	III	IV	V
1. $G_2G_3=\cos\Omega$	1. $G_1X=0$	1. $G_2Y=0$	1. $G_3Z=0$	1. $AX=0$
2. $G_0G_4=\cos\Omega$	2. $G_1X'=0$	2. $G_2Y'=0$	2. $G_3Z'=0$	2. $AY=0$
	3. $G_1P_1=0$	3. $G_2P_1=0$	3. $G_3P_1=0$	3. $AU=0$

VI	VII	VIII	XI	X
1. $A'X'=0$	1. $G_0P_1=0$	1. $BX=0$	1. $B'X'=0$	1. $G_4V=0$
2. $A'Y'=0$	2. $G_0U=0$	2. $BZ=0$	2. $B'V=0$	2. $G_4P_1=0$
3. $A'U=0$		3. $BV=0$	3. $B'Z'=0$	

Wir denken uns auch die neu eingeführten Zahlen und Vektoren ins Duale erweitert.

Da die Geraden X, X', Y, Y' und Z im Linienraum bekannt sind, wollen wir die Gerade Z' konstruieren: Setzen wir $\Omega=\omega+\varepsilon\,\omega_0$ in den Bedingungen I_1 und I_2 ein, entnehmen wir, dass die Geraden Paare G_2, G_3 und G_0, G_4 denselben Winkel und kürzesten Abstand haben. Wir führen jetzt die folgenden Konstruktionen aus.

Mit Hilfe von	II_1	und	II_2	konstruiert man das Gemeinlot	G_1	von	X	und	X',
»	III_1	»	III_2	»	G_2	»	Y	»	Y',
»	II_3	»	III_3	»	P_1	»	G_1	»	G_2,
»	IV_1	»	IV_3	»	G_3	»	Z	»	P_1,
»	V_1	»	V_2	»	A	»	X	»	Y,
»	VI_1	»	VI_2	»	A'	»	X'	»	Y',
»	V_3	»	VI_3	»	U	»	A	»	A',
»	VII_1	»	VII_2	»	G_0	»	P_1	»	U,

Da die Geraden G_2, G_3 und G_0 bekannt sind, kan man G_4 so konstruieren, dass die Bedingung X_2 erfüllt ist.

»	$VIII_1$	»	$VIII_2$	»	B	»	X	»	Z,
»	$VIII_3$	»	X	»	V	»	B	»	G_4,
»	IX_1	»	IX_2	»	B'	»	X'	»	V,
»	IV_2	»	IX_3	»	Z'	»	C_3	»	B'.

Literaturverzeichnis

[1] E. Study ; Geometrie der Dynamen, Berlin, 1903

[2] E. Egesoy ; Communications de la Faculte des sciences de l'Universite d,Ankara, Serie A, t. IX, 1961

[3] W. Blaschke - H. R. Müller; Ebene Kinematik, München, 1956

[4] W. Blaschke; Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, Berlin, 1945

[5] H. R. Müller; Sphärische Kinematik, Berlin, 1962

[6] R. Garnier ; Cours de Cinematique, t. II, Paris, 1956.

(Eingegangen : 23 XI. 1962)

Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara Série A. Tome XII

Table des matières