

COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Tome XII
(Série A)

ISTANBUL
ŞİRKETİ MÜRETTİBİYE BASIMEVİ
1962

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara," est une organe de publication englobant toutes les disciplines scientifiques représentées à la Faculté: Mathématiques pures et appliquées, Astronomie, Physique et Chimie théoriques, expérimentales et techniques, Géologie, Botanique et Zoologie.

La Revue, à l'exception des tomes I, II, III, comprend trois séries:

Série A: Mathématiques et Physique.

Série B: Chimie.

Série C: Sciences naturelles.

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible, les communications des savants étrangers. Les langues allemande, anglaise et française sont admises indifféremment. Les articles devront être accompagnés d'un bref sommaire en langue turque.

Adresse:

Fen Fakültesi Tebliğler Dergisi,

Fen Fakültesi,

Ankara

Comité de Rédaction de la Série A:

R. Nasuhoglu

S. Süray

E. A. Kreiken

Secrétaire de publication

A. N. Ergun

COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A : Mathématique Physique Astronomie

Tome X.

1962

La Répartition des Variables RR Lyr et leur Nombre Total

par A. N. ESKIOĞLU

(*Institut d'Astronomie de l'Université d'Ankara*)

Özet : Pülsasyon yıldızları hakkında keşfedilmiş peryot-parlaklık bağıntısı üzerinde zaman zaman yapılmış olan düzeltme ve denemeler sayesinde, RR Lyr'ler için de

$$M = 0,17 - 0,2 \log P$$

özel hali mevcuttur. Bu değişen yıldızların her ne kadar mutlak parlaklıkları sıfır civarında ise de, hesaba sıhhat vermek için, mezkûr bağıntıdan hareket ederek ve soğurma da göz önüne alınarak, Kukarkin kataloğundan çıkarılan RR Lyr'lerin mesafeleri ve galaktik dik koordinatları hesaplanmıştır. Böylece elde edilen koordinatlardan faydalanılarak eksnelere dik, birer kiloparsek aralıklı tabakalarda bulunan RR Lyr sayılarının değişim grafikleri aranmıştır. Araştırmayı daha da aydınlatmak maksadı ile boylamına dağılım ve uzaydaki yığılma noktaları bulunmuştur.

Nihayet, Prof. Dr. E.A. Kreiken'in yıldız sistemini politropik gaz küresine benzetmesi fikri kullanılarak ve RR Lyr'lerin Galakside küresel bir simetriyi haiz oldukları düşünülerek, herhangi bir yöne dik ve yine birer kiloparsek aralıklı tabakalardaki teorik yıldız sayıları aranmıştır.

Teşvik edip, irşatlarını hiçbir zaman esirgemeyen sayın Prof. Dr. E.A. Kreiken'e burada münetlerimi sunmayı bir borç bilirim.

* * *

(*) Ce travail a été effectué comme thèse de doctorat, sous la direction de M. le Prof. Dr. E.A. Kreiken et a été présenté à la Faculté des Sciences d'Ankara le 29/XI/1960.

Sommaire : La relation période-luminosité, valable pour des étoiles à pulsation, grâce aux corrections et aux expériences, a la forme :

$$M = - 0,17 - 0,2 \log P$$

pour les RR Lyr. Bien que ces étoiles aient des magnitudes absolues d'environ zéro, pour donner plus d'exactitude au calcul, en partant de la relation citée et en faisant aussi les corrections d'absorption, on a calculé les distances et les coordonnées galactiques rectangulaires des RR Lyr, tirés du catalogue de Kukarkin. En profitant des coordonnées ainsi obtenues, on a compté les nombres de RR Lyr dans les tranches perpendiculaires aux axes et ayant une épaisseur d'un kiloparsec. Pour éclaircir notre recherche encore mieux, on a trouvé la répartition le long de longitude et les points d'accumulation spatiale des variables RR Lyr.

Enfin, on a cherché les nombres RR Lyr, également dans les tranches d'épaisseur d'un kiloparsec et perpendiculaires à n'importe quelle direction, en employant l'idée de M. Le Prof. Dr. E.A. Kreiken, qui est à la ressemblance d'un système d'étoiles à une sphère polytropique et en supposant que les RR Lyr se trouvent en une symétrie sphérique dans la Galaxie.

Je suis heureux d'offrir ma reconnaissance à M. Le Professeur E.A. Kreiken qui a encouragé mes recherches et qui ne ménage jamais son aide.

CHAPITRE I

LA RÉPARTITION PAR RAPPORT AUX OBSERVATIONS

1. Calculs des distances et de l'absorption.

Les valeurs (m, l, b, P) , qui intéressent notre sujet, sont empruntées de la dernière édition du catalogue de Kukarkin[1]. Dans cette édition, les étoiles variables sont séparées en trois groupes : les étoiles doubles (visuelles, spectroscopique, etc), les étoiles éruptives (des novae, des supernovae, etc) et les étoiles à pulsations (Céphéides, RR Lyrs et du type Mira Ceti, etc). Le catalogue contient 14711 étoiles variables dont 2426 sont RR Lyr. Actuellement les périodes de 503 RR Lyr ne sont pas données, parce que leurs observations sont insuffisantes. La magnitude absolue de ces étoiles est acceptée zéro. En effet, les magnitudes absolues des RR Lyr sont environ zéro ; cependant pour donner des précisions au calcul, on a employé la relation période-luminosité

$$(1) \quad M = - 0,17 - 0,2 \log P$$

des étoiles à pulsations de période inférieure à un jour [2]. Ayant ainsi obtenu les magnitudes absolues, on est passé aux distances selon la loi Pogson

$$M = m + 5 - 5 \log r$$

On doit certainement faire une correction à cause de l'absorption. Excepté les latitudes les plus basses, on a appliqué la formule

$$\log r - \log r_s = \frac{0,0335}{\sin b}$$

proposée par Shapley [3]. Quant aux latitudes de 0° , 1° et 2° , on a suivi la méthode ci-dessous : En considérant l'absorption du plan galactique, il y a aura une diminution d'une valeur de $0^m,75$ par kiloparsec sur la magnitude apparente [4]. Ainsi on pourrait écrire

$$(2) \quad M = m + 5 - 5 \log r - kr \quad (k=0,75)$$

ou bien en supprimant les magnitudes absolues entre (1) et (2) on a

$$m + 5,17 + 0,2 \log P = 5 \log r + kr$$

En appelant α le premier membre de cette relation, on a fait un tableau (tableau I) qui contient les valeurs arrondies de (r) . On avait déjà calculé les quantités α pour chaque étoile ; on a donc trouvé les distances en faisant une simple comparaison.

2. Les coordonnées rectangulaires et l'erreur du catalogue.

Comme les coordonnées rectangulaires, on a choisi le système de coordonnées galactiques habituelles à l'astronomie. Les relations entre ces coordonnées rectangulaires et les coordonnées polaires sont :

$$x = r \cos b \cos (l - l_0)$$

$$y = r \cos b \sin (l - l_0)$$

$$z = r \sin b$$

A l'aide de ces formules, on a calculé les coordonnées rectangulaires pour chaque RR Lyr.

On imagine, dans les trois sens, les plans perpendiculaires aux axes. Les nombres RR Lyr, qui se trouvent dans les tran-

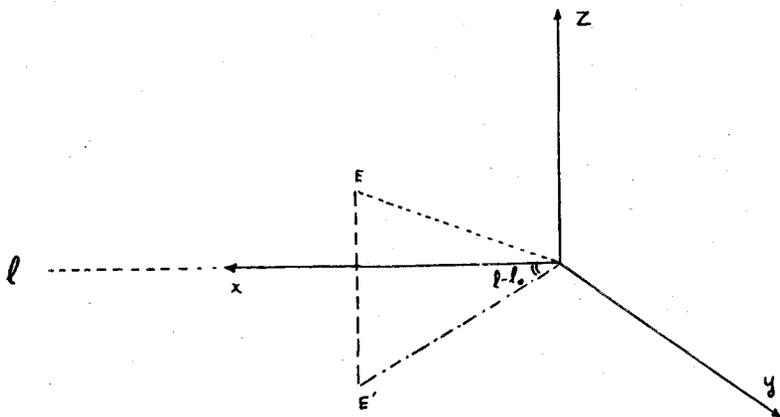


Fig. 1

ches ainsi obtenues, sont comptés et représentés par $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$; et on construit leur graphique (figure II - a, b, c, d, e). Les figures sont faites avec soin en considérant que la somme des écarts positifs et négatifs soit approximativement nulle. On donne dans le tableau II, les erreurs standards sur les écarts qui s'en produisent; il faut considérer ces écarts comme les déviations inévitables qui se présentent dans toutes les distributions dérivées d'un calcul.

3. Pensées sur les courbes.

Dans toutes les courbes, on voit une forte concentration centrale. C'est un résultat qu'on attend; car le centre de notre système est en même temps le centre de la gravitation.

Si on considère deux à deux les dénombrements dans la direction positive et négative, on voit seulement qu'il y a une symétrie assez claire dans la direction des (y); cependant la courbe des (y) négatifs est glissée un peu en haut. Assymétrie la plus remarquable est dans la direction (z); on peut l'attribuer à la conséquence que le soleil n'est pas dans le plan de la Galaxie. Car, comme on sait, le soleil est d'environ 30 parsecs dans la direction des (z) positifs et c'est pourquoi aussi $F(2)$, $F(3)$,... sont beaucoup plus grands que ceux des (z) négatifs.

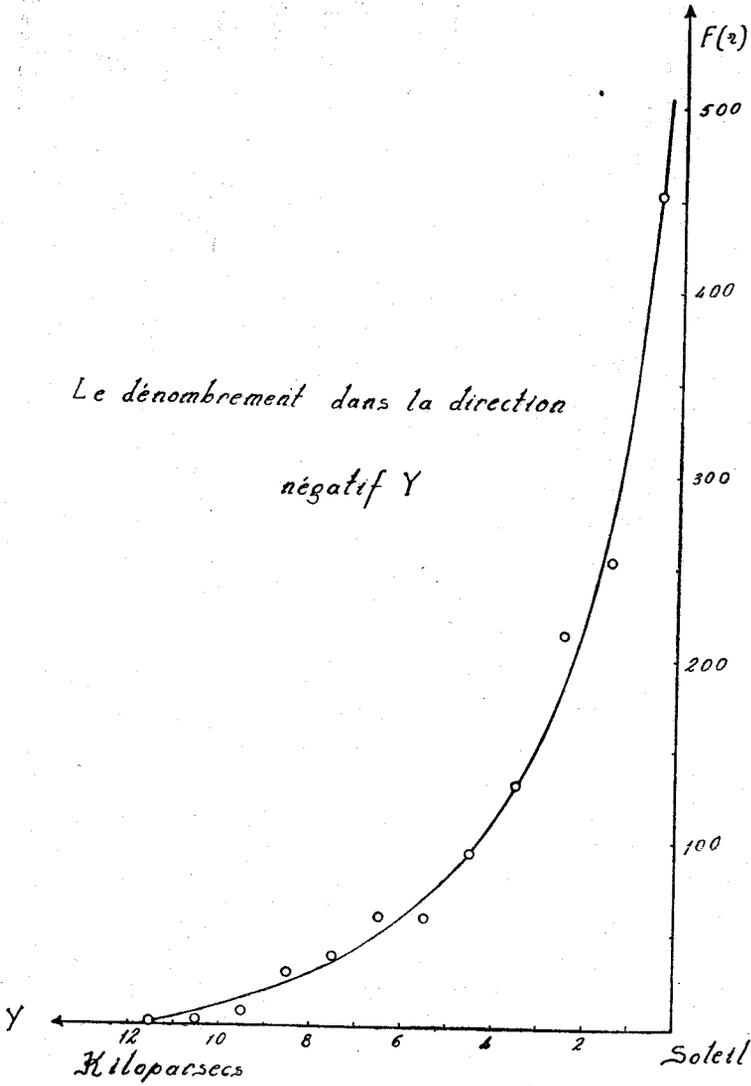


Fig. 2a

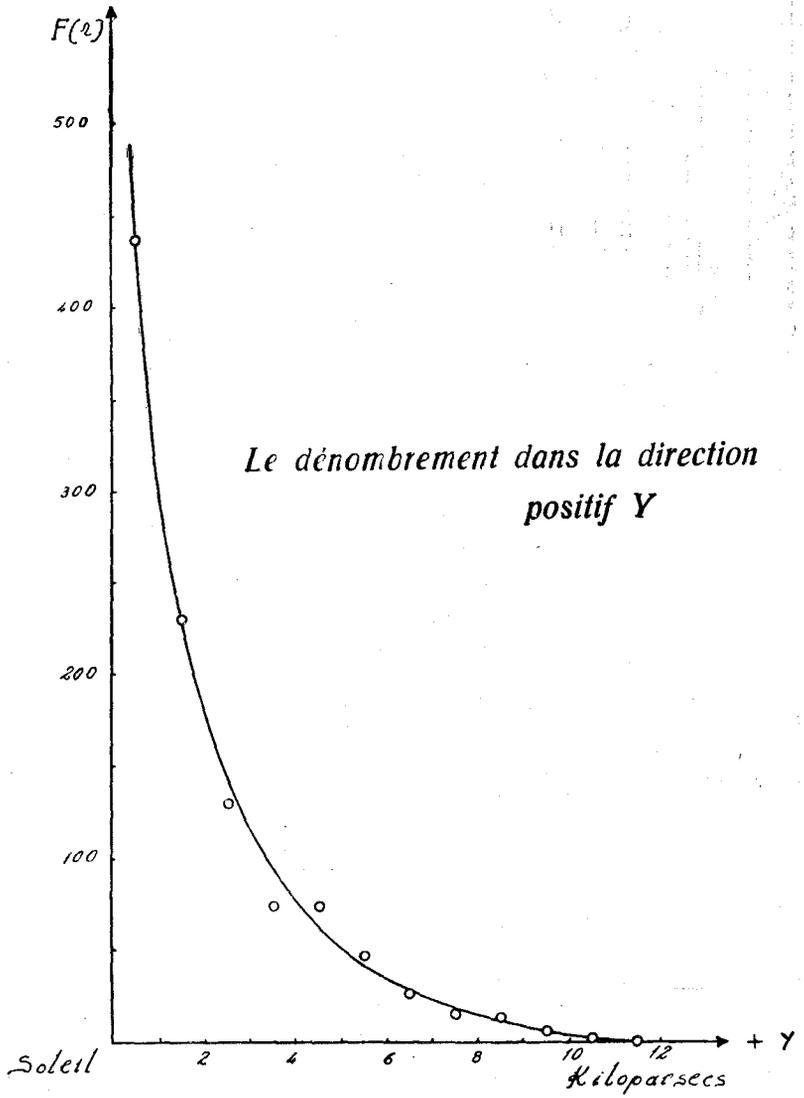


Fig. 2b

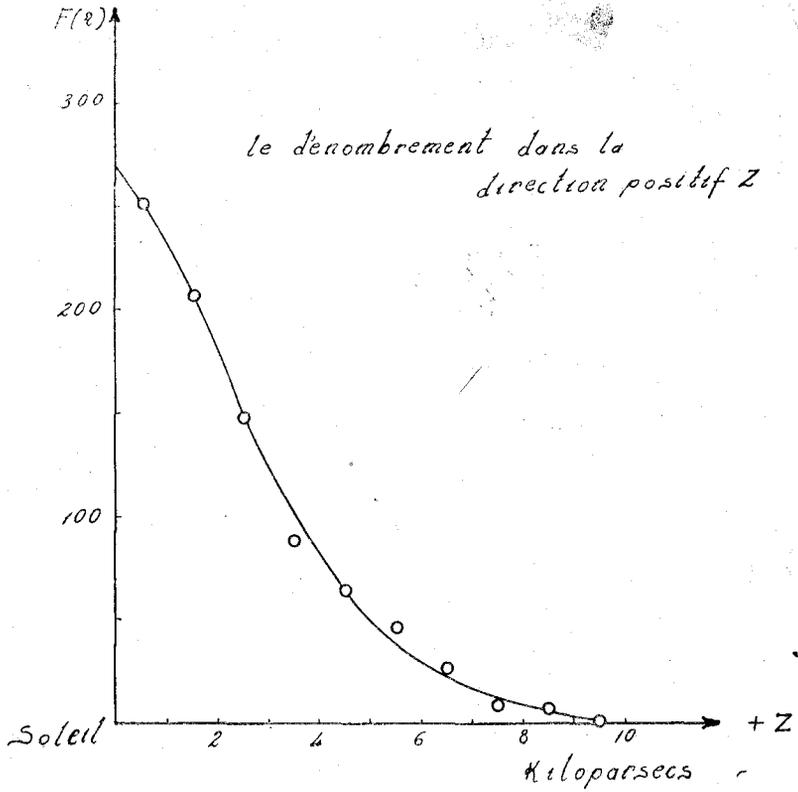


Fig 2e

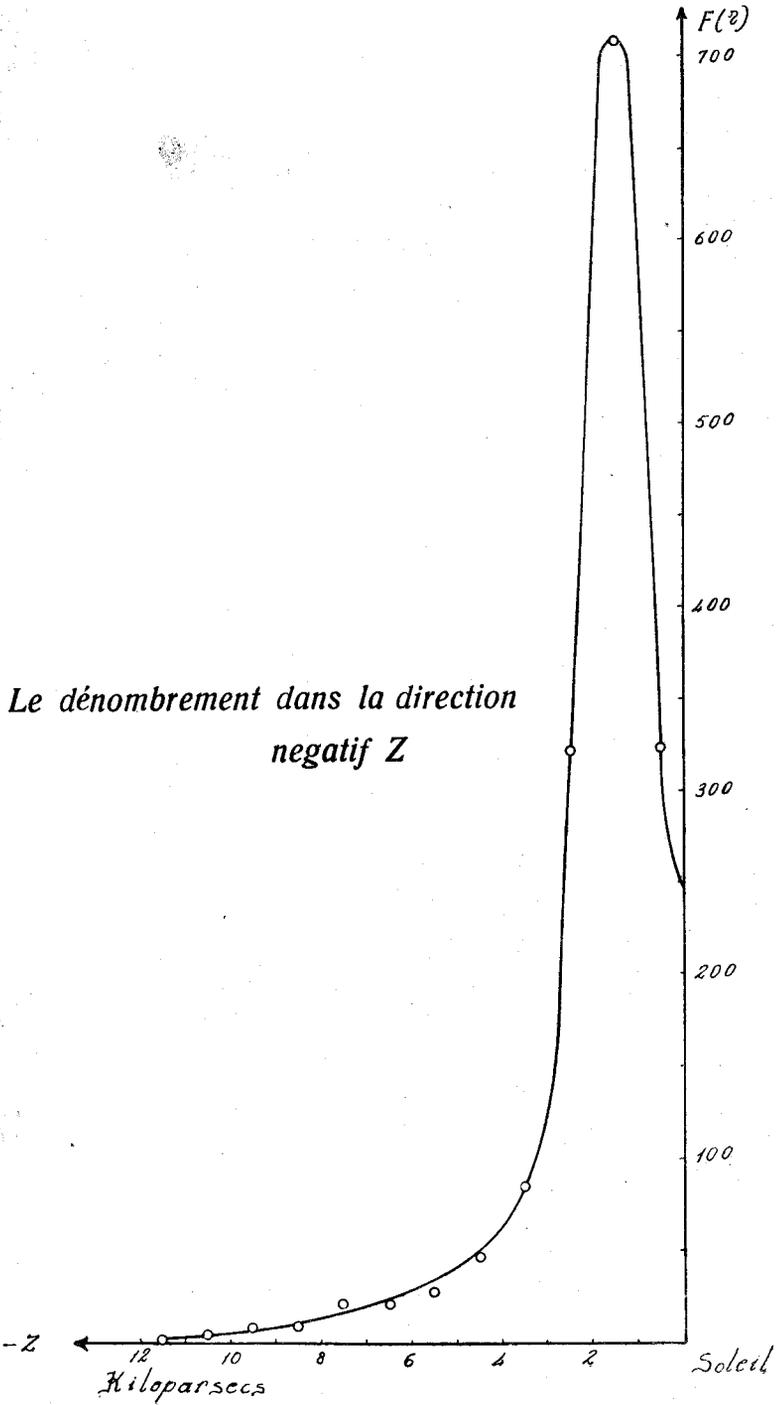


Fig. 2d

Ce n'est que l'influence de l'absorption qui augmente vers le plan galactique ; on ne peut pas ainsi observer l'hémisphère sud aussi bien que l'hémisphère nord. Car toutes les étoiles RR Lyr de l'hémisphère sud sont observées à travers des nuages absorbants. C'est pour cette raison que la distribution n'est pas bien connue ; l'application des corrections statistiques est très difficile. Si l'on considère les courbes dans la direction

Dans la direction X

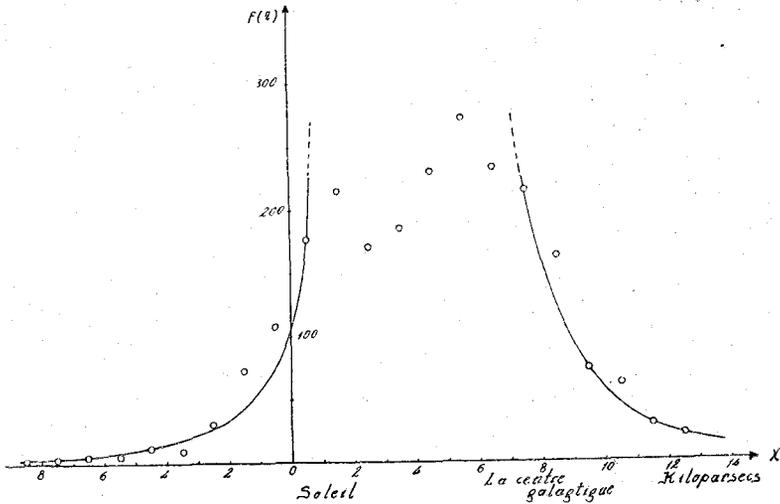


Fig 2e

des (x), on voit que leur axe de symétrie ne passe pas par le centre galactique bien qu'elles se ressemblent. En effet cet axe est glissé 4^{kpc} au long de (OX) positive ; cela nous fait comprendre l'existence d'une forte absorption interstellaire. Comme on sait, les nuages sont tellement larges dans la direction du centre qu'on ne peut pas observer le centre lui-même ; ainsi on ne pourra pas observer les variables RR Lyr plus loin que le centre. On doit prédire donc qu'à partir d'à peu près $\pm 8^{kpc}$ du soleil, la courbe est sous la grande influence de l'absorption et c'est pourquoi dans ce cas aussi, les corrections statistiques sont insuffisantes.

4. Répartition au long de longitude et de latitude galactique.

Pour étudier la répartition dans un autre sens, on imagine des tranches perpendiculaires au plan galactique, de 30° autour du soleil ; et on a compté les étoiles qui se trouvent en chaque tranche. On a donné ces nombres dans la première colonne du (tableau III) ; en outre le même tableau contient :

La répartition au long de longitude

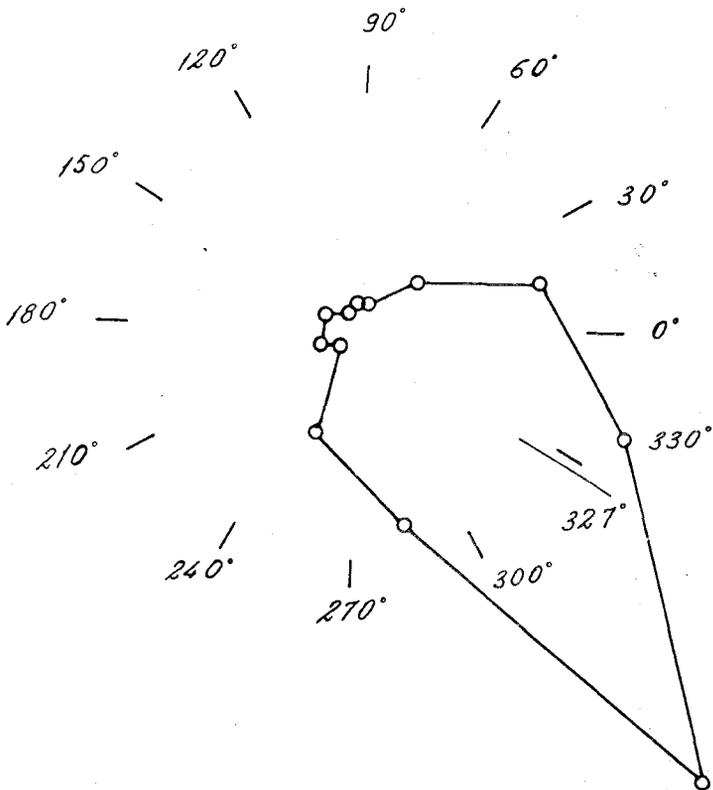


Fig. 3.

$$\frac{\Sigma l}{n} = \bar{l}$$

La moyenne des longitudes des étoiles qui se trouvent dans une tranche.

$$\frac{\Sigma +b}{n} = +\bar{b}$$

La moyenne des latitudes des étoiles de latitude positive qui se trouvent dans une tranche.

$$\frac{\Sigma -b}{n} = -\bar{b}$$

La moyenne des latitudes des étoiles de latitude négative qui se trouvent dans une tranche.

A l'aide des nombres d'étoiles et des \bar{l} on a obtenu la (figure 3). La distance d'un point de chaque tranche au soleil nous donne le nombre des RR Lyr en considérant qu'un millimètre représente dix étoiles. L'accumulation dans la direction du centre se voit très clairement. L'axe des (y) négatifs est dans la direction de la longitude d'environ 240° . A la page 4, on avait dit que la courbe $F(-y)$ est glissé un peu en haut; on peut voir également cette propriété sur la figure 3. (Figure 4) est

Les points d'accumulation spatial des variables RR Lyr

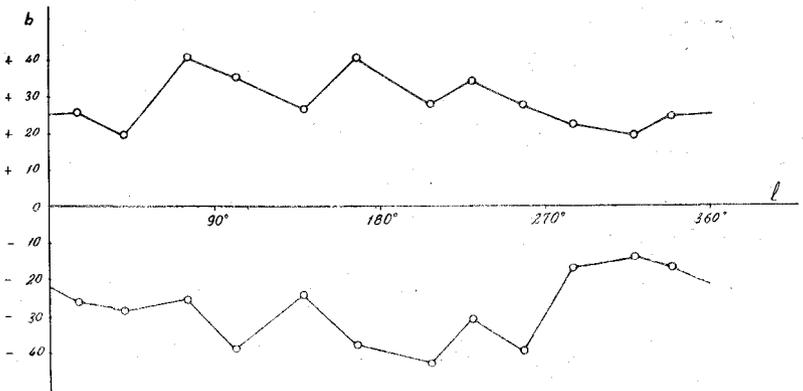


Fig. 4

construite à l'aide des moyennes arithmétiques \bar{l} et \bar{b} à chaque tranche. Elle représente les points d'accumulation dans l'espace. Cette figure n'est pas régulière; c'est la conséquence, certainement, de dix nuages absorbants qui se trouvent irrégulièrement autour du soleil [5].

CHAPITRE II

CALCUL THÉORIQUE

1. La ressemblance d'un système d'étoiles à un système polytropique.

Pour le calcul théorique de densité, du nombre total de RR Lyr et de la courbe $F(r)$ qui est la fonction des nombres d'étoiles des tranches, on a profité de la nouvelle théorie de Prof. E.A. Kreiken [6]. Cette théorie prend comme principe la ressemblance entre un modèle d'étoile et un système d'étoiles ; car le rapport d'une étoile à un molécule est le même que celui des distances d'étoile à ceux molécules.

Rappelons brièvement les renseignements sur les systèmes polytropiques : Comme on sait, en partant des équations suivantes

$$dP = g dr \rho \quad (\text{Équation d'équilibre hydrostatique}).$$

$$g = \frac{G}{r^2} \int_0^r 4 \pi r^2 dr \cdot \rho \quad (\text{condition d'équilibre})$$

$$\text{et } PV = RT \quad (\text{La relation cinétique des gaz})$$

on trouve :

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + 4 \pi G \rho = 0$$

A l'aide de la thermodynamique, on peut exprimer ρ en valeur de φ :

$$\rho = \left[\frac{\varphi}{(n+1) \mathcal{H}} \right]^n$$

(n) s'appelle l'index polytropique et \mathcal{H} est une constante. Donc on obtient :

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr} + a^2 \varphi^n = 0$$

Enfin une dernière fois, on fait ce changement des variables :

$$r = a^{-1} \varphi_0^{-\frac{1}{2}(n-1)} z ; \quad \varphi = u \varphi_0$$

et on a l'équation d'Emden :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{2}{z} \cdot \frac{du}{dz} + u^n = 0$$

On doit déterminer la valeur (n) pour chaque système séparément ; cependant pour $n > 5$, la masse totale n'est plus finie. C'est pourquoi en laissant de côté ce cas-ci, Prof. Kreiken a comparé les fractions de masse comme 0,1 M ; 0,2 M. etc. dans les cas $n = 2$, $n = 3$, et $n = 5$ avec celles des amas globulaires. Cette comparaison fait comprendre que (n) doit être égal à 5 pour notre système galactique. Dans ce cas, il donne la solution de l'équation (tableau IV). Après avoir obtenu (n), revenons à nos transformations qu'on a faites pendant la formation de l'équation ; et tâchons d'obtenir la valeur

$$\alpha = a^{-1} \varphi_0^{-\frac{1}{2}(n-1)}$$

pour notre système. La moitié de la masse totale des amas globulaires est dans la sphère de rayon $6,17^{kpc}$ et la moitié de la masse du tableau IV est dans la sphère de rayon $z = 2,29$; ce qui nous donne :

$$\alpha = \frac{r}{z} = 8,4 \times 10^{21} \text{ cm.}$$

Cherchons maintenant ρ_0 ; le tableau IV donne aussi

$$\frac{\rho_{r=8.2}}{\rho_{r=0}} = \frac{(u^5)_{z=3}}{(u^5)_{z=0}} = \frac{0,0312}{1}$$

D'autre part, on avait calculé les distances ; on compte 5 RR Lyr de distance plus petite que 500 parsecs, 32 RR Lyr de distance plus petite qu'un kiloparsec. Pour ces valeurs on trouve respectivement $\rho_{8.2} = 9,55$ et $\rho_{8.2} = 7,64$. La moyenne de ces deux valeurs est $\bar{\rho}_{8.2} = 8,59$. Ainsi, on obtient :

$$[*] \quad \rho_0 = 286 \text{ RR Lyr/kpc}^3$$

D'après le travail cité, on peut trouver, maintenant, le nombre total de RR Lyr :

$$S = 1,73 \rho_0 \alpha^3 = 9737 \text{ RR Lyr}$$

2. Calcul théorique de $F(r)$.

On cherche d'abord les densités : Dans le paragraphe⁽¹⁾

$$\rho = 286 \quad , \quad \alpha = 8,4 \times 10^{21}$$

étaient donnés. On calcule les z correspondant à 1, 2, 3, ... kpc avec la formule $r = z \alpha$, et on lit les densités dont les valeurs sont présentées dans le tableau V.

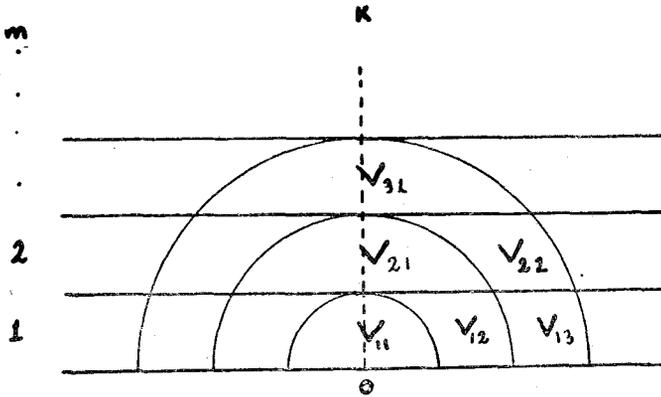


Fig. 5

On calcule ensuite, les volumes qui se trouvent dans les tranches d'un kiloparsec d'épaisseur perpendiculaire à un axe tout à fait arbitraire. Comme on voit dans la figure 5, on sup-

[*] On a essayé, aussi, la formule

$$\log n = 1,20 - 0,69 R$$

donnée par Baade [7], pour trouver la densité et on trouve :

$$n = 0,0348 \text{ RR Lyr/kpc}^3$$

c'est trop petite par rapport à la densité observée. Baade a observé les RR Lyr entre les distances 0,6 et 2,7 kpc; il n'observe que quelques régions spéciales et d'ailleurs le Savant cite que sa formule est correcte dans les alentours du centre Galactique. En tout cas il semble que la formule qu'il donne ne peut pas être extrapolée jusqu'aux alentours du soleil.

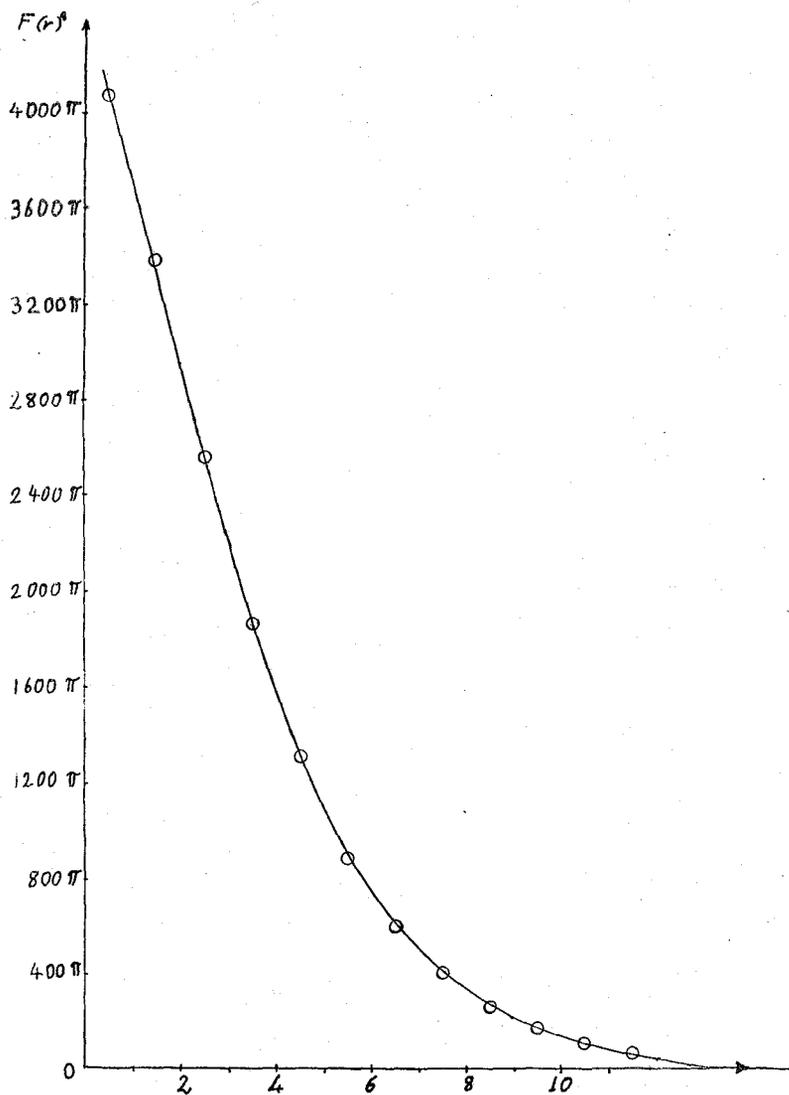


Fig. 6

pose à partir du centre galactique qu'il y ait des écorces sphérique et que dans chaque écorce, la densité soit constante. Donc, chaque tranche est composée d'un couvercle sphérique et de plusieurs anneaux. On représente avec V_{mn} une partie de volume, contenue dans la m^e tranche et le n^e anneau d'une tranche. En employant la formule élémentaire de couvercle sphérique bien connue, on trouve :

$$n^e \text{ anneau de la première tranche } V_{1n} = [3n^2 + 0 \cdot n - 1] \frac{\pi}{3} - \sum_{v=1}^{n-1} V_{1v}$$

$$n^e \text{ anneau de la deuxième tranche } V_{2n} = [3n^2 + 6 \cdot n - 4] \frac{\pi}{3} - \sum_{v=1}^{n-1} V_{2v}$$

⋮ ⋮

$$n^e \text{ anneau de la } m^e \text{ tranche } V_{mn} = \{3n^2 + 6(m-1) - [1 + 3(m-1)]\} \frac{\pi}{4} - \sum_{v=1}^{n-1} V_{mv}$$

On emploie la formule V_{mn} ainsi obtenue pour trouver les volumes de chaque tranche. Après avoir multiplié ces volumes avec des densités du tableau V, la somme des valeurs de chaque tranche nous donne respectivement $F(1)$, $F(2)$, ... (tableau VI). On représente ces valeurs avec la figure 6 qui descend beaucoup plus régulièrement que les courbes d'observations.

Tableau I

<i>kpc</i> <i>r</i>	α	<i>kpc</i> <i>r</i>	α
0,5	13,875	2,8	19,850
0,6	14,400	2,9	19,475
0,7	14,775	3,0	19,650
0,8	15,100	3,1	19,775
0,9	15,425	3,2	19,950
1,0	15,750	3,3	20,075
1,1	16,025	3,4	20,200
1,2	16,300	3,5	20,325
1,3	16,525	3,6	20,500
1,4	16,800	3,7	20,625
1,5	17,025	3,8	20,750
1,6	17,200	3,9	20,875
1,7	17,425	4,0	21,000
1,8	17,650	4,1	21,125
1,9	17,825	4,2	21,250
2,0	18,000	4,3	21,375
2,1	18,175	4,4	21,500
2,2	18,350	4,5	21,625
2,3	18,525	4,6	21,750
2,4	18,700	4,7	21,875
2,5	18,875	4,8	22,000
2,6	18,955	4,9	22,125
2,7	19,175	5,0	22,250

Tableau II

Les erreurs standards et les modules de précision

		<i>d</i>	<i>h</i>
dans la direction	+x	0,65	1,09
> > >	-x	0,50	1,41
> > >	+y	0,25	2,83
> > >	-y	0,50	1,41
> > >	+z	0,30	2,86
> > >	-z	0,25	2,88

Tableau III

Les nombres des RR lyr. d'après les longitudes, et les moyennes des longitudes et des latitudes

intervalles	N	l	$-b$	$+b$
0°—30°	270	14°,9	-25°,8	+25°,8
30°—60°	108	40°,3	-28°,8	+19°,9
60°—90°	85	75°,0	-25°,2	+41°,1
90°—120°	84	101°,5	-88°,4	+35°,6
120°—150°	21	138°,4	-23°,7	+26°,7
150°—180°	58	167°,5	-37°,9	+40°,8
180°—210°	65	207°,6	-42°,7	+28°,1
210°—240°	40	229°,9	-30°,6	+34°,4
240°—270°	170	258°,1	-39°,3	+28°,0
270°—300°	309	284°,7	-16°,8	+22°,6
300°—330°	866	318°,5	-15°,9	+19°,3
330°—360°	438	338°,8	-10°,5	+25°,9

Tableau IV

« $u^5 = \frac{\rho}{\rho_0}$ et $-z^2 \frac{du}{dz}$ est la masse »

z	u^5	$-z^2 \frac{du}{dz}$	z	u^5	$-z^2 \frac{du}{dz}$
0,00	1,0000	0,00000	4,5	0,0060	1,8972
0,25	0,9510	0,00505	5,	0,0037	1,4575
0,50	0,8196	0,08555	6,	0,0016	1,5120
0,75	0,6484	0,10838	7	0,0008	1,6023
1,00	0,4899	0,2088	8	0,0004	1,7088
1,25	0,3508	0,3470	9	0,00024	1,7100
1,50	0,2469	0,4860	10	0,00015	1,7150
1,75	0,1729	0,6216	12	0,00008	1,7280
2,00	0,1206	0,7492	16	0,000015	1,73
2,50	0,0802	0,9638	20	0,000005	1,73
3,0	0,0812	1,1250	50	0,000000	1,78
3,5	0,0172	1,2588	100	—	1,73
4,0	0,0100	1,8440			

Tableau V

r, kpc	ρ	r, kpc	ρ	r, kpc	ρ
0,5	274	5,5	36	10,5	3
1,5	219	6,5	21	11,5	2
2,5	154	7,5	13	12,5	1
3,5	94	8,5	8	13,5	1
4,5	60	9,5	5	14,5	0

Tableau VI

r	$F(r)$	r	$F(r)$
0 — 1	4064 π	6 — 7	601 π
1 — 2	3370 π	7 — 8	401 π
2 — 3	2557 π	8 — 9	261 π
3 — 4	1859 π	9 — 10	164 π
4 — 5	1296 π	10 — 11	100 π
5 — 6	884 π	11 — 12	58 π

Littérature

- [1] B. V. Kukarkin et ses collaborateurs, *The General Catalogue of Variable stars*, Tom I, 1958.
- [2] B. V. Kukarkin, *Erforschung der struktur und Entwicklung der stern-systeme*, page 16, 1954.
- [3] M. Waldmeier, *Einführung in die astrophysik*, page 227, 1948.
- [4] P. Gaposchkin, *Variable stars and Galactic structure*, page 90, 1954.
- [5] Evry Schatzman, *Origine et évolution des mondes*, page 105, 1957.
- [6] E. A. Kreiken, *Representation of stellar systems by polytropic gas spheres*, *Annales d'Astrophysique*, 24, 3, 1961.
- [7] W. Baade, *population of the galactic nucleus and the Evidence for the presence of an old population pervading the whole disk of our Galaxy*, *Astronomical Research*, volume 5, page 310, 1958.

(Manuscrit reçu le 21 Juin 1961)